Dal Caos ai Sistemi Complessi:

frattali, sincronizzazione, criticità auto-organizzata, reti complesse e meccanica statistica generalizzata

Andrea Rapisarda

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Università di Catania

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare

Complexity Science Hub Vienna

Cosa studia la Fisica

- La Fisica si occupa dello studio delle leggi che regolano i fenomeni naturali e le interazioni dei costituenti della materia.

- Generalmente l'approccio di un fisico è quello di rendere il problema il più semplice possibile, cercando di individuare le caratteristiche fondamentali del fenomeno in studio e trascurando il resto.

- Ad esempio: lo studio del moto di un grave o di un pendolo, trascurando l'attrito

- Questo metodo *riduzionista* ha portato a degli enormi successi, ma si basa sull'idea, <u>non sempre valida</u>, che basta scomporre un oggetto o un fenomeno in quelle che sono le sue parti fondamentali per spiegarne il suo comportamento complessivo

- **Non è sempre realistico descrivere con semplici figure geometriche (coni,cerchi,cubi,triangoli, ecc.) gli oggetti che vogliamo studiare**

- **Le singole componenti di un sistema fisico non interagiscono sempre debolmente, ma sono spesso fortemente accoppiate con termini non lineari. Ad ad esempio a differenza della semplice forza elastica**

$$F = -kx$$

che contiene solo un termine lineare, è spesso più realistico considerare dei termini quadratici o di ordine superiore

- **Il tutto non è sempre la semplice somma delle singole parti.**

- **I fenomeni naturali sono in generale <u>più complessi</u> di quanto a prima vista possa spesso sembrare....basta guardarsi intorno.**

Determinismo e predicibilità

- Le leggi della meccanica sono deterministiche….
  …ovvero date le condizioni iniziali ad un tempo t e conoscendo la forma funzionale della legge che regola il fenomeno, posso conoscere l'evoluzione passata e futura del fenomeno.

- Come mai allora molti fenomeni naturali sembrano essere del tutto casuali?

DETERMINISMO $\not\Leftrightarrow$ PREDICIBILITA'

- Nonostante la radicata convinzione di molti…

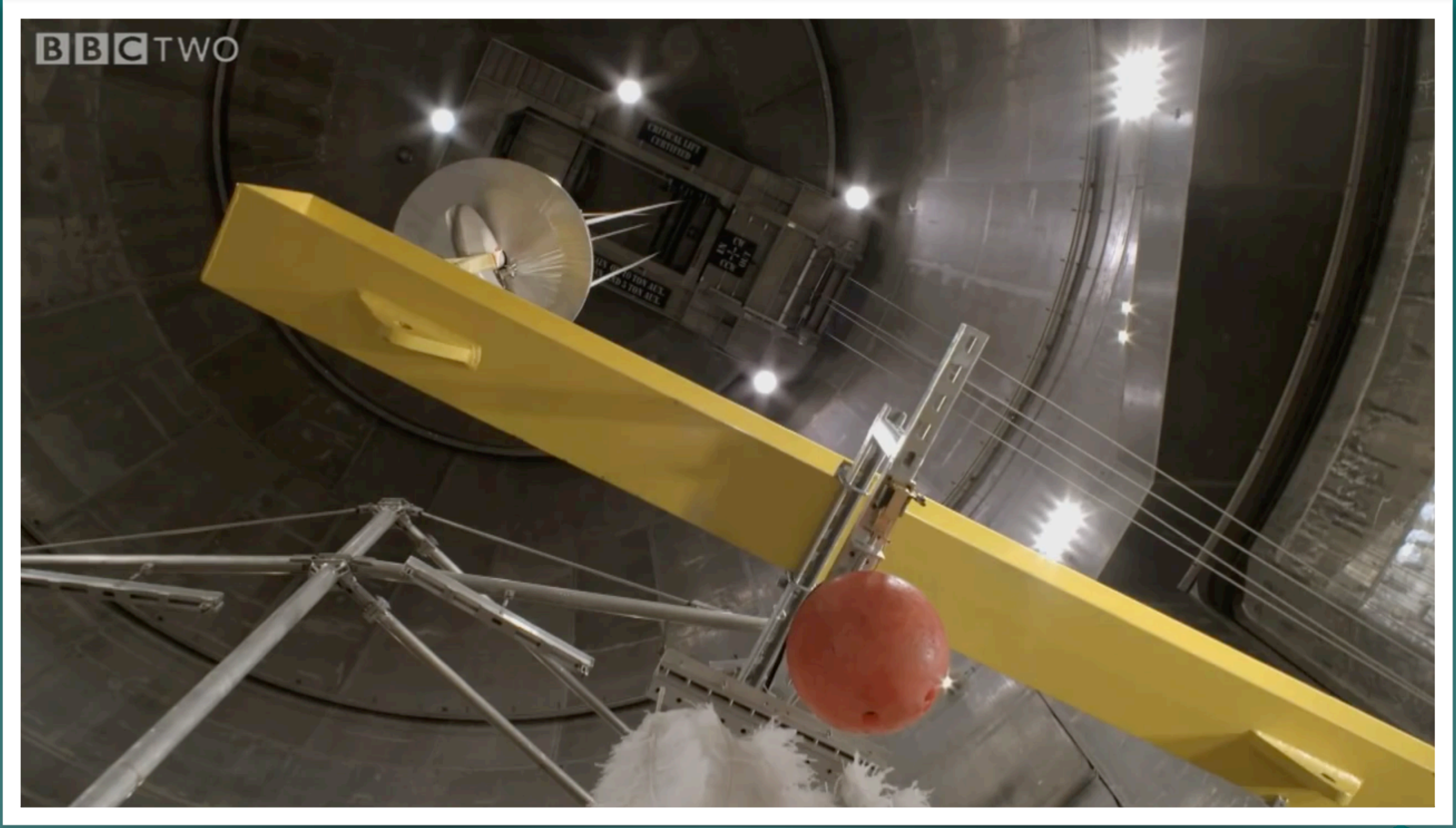
Non sempre è necessario un modello complicato per spiegare un comportamento complicato:

Leggi semplici con termini non lineari possono avere comportamenti molto complicati…
….e piccole differenze iniziali possono causare grandi ed imprevedibili effetti nell'evoluzione futura.

Lancio dei dadi

La pallina della roulette

La caduta di una piuma (in presenza di attrito)



Determinismo e predicibilità

Perchè

- il lancio dei dadi
- il moto della pallina nella roulette
- il moto di una piuma che cade
- il tempo che farà fra due settimane
- Il gocciolamento di un rubinetto
- i terremoti

sembrano essere dominati dal caso e sfidano la nostra possibilità di previsione, nonostante siano tutti fenomeni descrivibili con leggi deterministiche?

Determinismo e predicibilità

Punto di vista di Laplace

Pierre Simon de Laplace
(1749-1827)

Essai philosophique sur les probabilitès

"Un'intelligenza che, per un istante dato, potesse conoscere tutte le forze da cui la natura è animata, e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, e che inoltre fosse abbastanza grande da sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e quelli dell'atomo più leggero: nulla le risulterebbe incerto, l'avvenire come il passato sarebbe presente ai suoi occhi. Lo spirito umano offre, nella perfezione che ha saputo dare all'astronomia, una debole parvenza di questa intelligenza."

Determinismo e predicibilità

Punto di vista di Poincarè

Henri Poincaré
(1854-1912)

Science et méthode
di Henri Poincaré

Una causa piccolissima che sfugga alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancar di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto, che è governato da leggi. Ma non sempre è così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito.

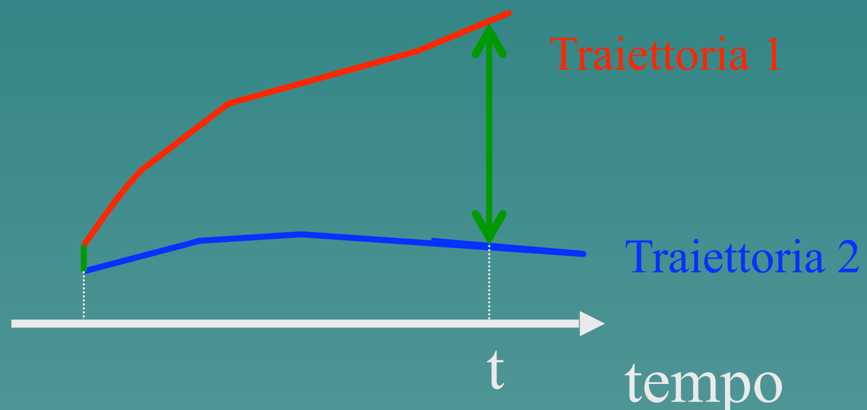
Come dobbiamo rappresentare un recipiente pieno di gas? Innumerevoli molecole animate da grandi velocità solcano questo recipiente in tutte le direzioni; a ciascun istante, urtano le parete o si scontrano tra loro; e questi urti hanno luogo nelle condizioni più diverse. Ciò che in questo caso ci colpisce non è la piccolezza delle cause, ma soprattutto la loro complessità. Eppure, il primo elemento è ancora presente e ha un ruolo importante. Se una molecola fosse deviata, verso sinistra o verso destra rispetto alla sua traiettoria, di una quantità piccolissima, paragonabile al raggio d'azione delle molecole di un gas, essa eviterebbe una collisione, oppure la subirebbe in condizioni diverse, e questo farebbe variare, magari di 90 o di 180 gradi, la direzione della sua velocità dopo l'urto.

E non è tutto: abbiamo appena visto che è sufficiente deviare la molecola, prima dell'urto, di una quantità infinitamente piccola, perché essa sia deviata, dopo l'urto, di una quantità finita.

Perché i meteorologi hanno tanta difficoltà a prevedere il tempo con un certo grado di esattezza? Perché i rovesci di pioggia, e le tempeste stesse, ci sembrano arrivare a caso, tanto che molte persone trovano del tutto naturale pregare per avere la pioggia o il bel tempo, mentre riterrebbero ridicolo invocare un'eclisse con la preghiera? Noi vediamo che le grandi perturbazioni si producono generalmente nelle regioni in cui l'atmosfera è in equilibrio instabile. I meteorologi sono ben consapevoli che questo equilibrio è instabile, che un ciclone nascerà da qualche parte, ma dove? Non sono in grado di dirlo; un decimo di grado in più o in meno in un punto qualunque e il ciclone scoppia qui e non là, porta le sue devastazioni in contrade che sarebbero state risparmiate. Se si fosse conosciuto questo decimo di grado, si sarebbe potuto prevederlo in anticipo, ma le osservazioni non erano né abbastanza ravvicinate né abbastanza precise, ed è per questo che tutto sembra dovuto all'intervento del caso.

Cos'è il Caos deterministico

- Diciamo che un fenomeno mostra un regime di caos deterministico quando:
- Abbiamo una dipendenza molto sensibile dalle condizioni iniziali
- Ovvero una incertezza iniziale che cresce esponenzialmente col tempo
- Questo determina una impredicibilità a lungo termine della sua evoluzione futura.



Perchè il Caos deterministico implica impredicibilità a lungo termine

Abbiamo visto che l'incertezza iniziale ε_0 sempre presente si propaga nel tempo secondo la legge

$$\boxed{\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{\lambda t}} \qquad (1)$$

λ si chiama massimo esponente di Lyapunov.

Supponiamo di non volere un'incertezza maggiore di 1, e indichiamo questo tempo di previsione massimo con t_{max}, cioè sia $\varepsilon(t_{max})=1$.

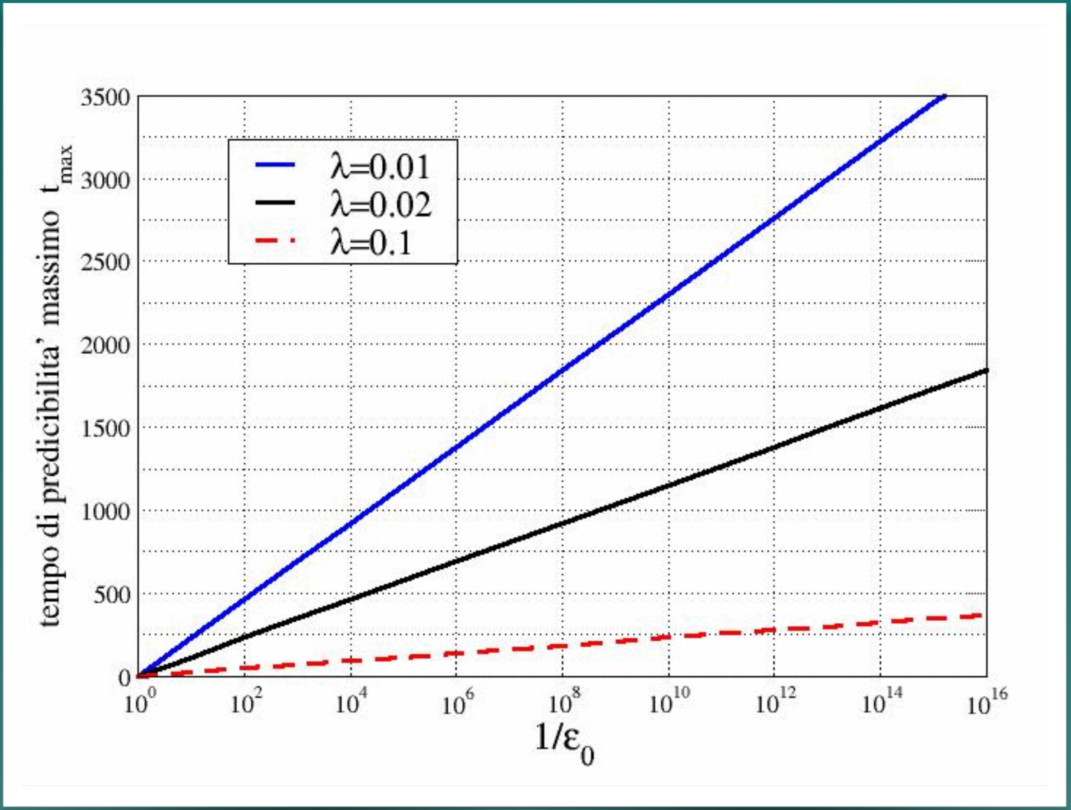
Allora dalla (1) prendendo i logaritmi di entrambi i membri si ottiene

$$\boxed{t_{max} = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)}$$

Per quanto piccolo possa essere il nostro tasso di crescita esponenziale λ, se $\lambda>0$, per poter raddoppiare il tempo di previsione bisogna diminuire di molti ordini di grandezza l'incertezza iniziale, raggiungendo inevitabilmente dei limiti invalicabili

Impredicibilità a lungo termine

Per raddoppiare il tempo di previsione massimo t_{max} bisogna diminuire l'incertezza iniziale di parecchi ordini di grandezza…
…questo ovviamente è possibile solo fino ad un certo punto.



Il Caos è intorno a noi

Si potrebbe pensare che essendo stato ignorato per così tanto tempo questo fenomeno sia raro…

Invece si può tranquillamente affermare che

Il caos deterministico
è la regola più che l'eccezione.

Bisogna temere il caos?

Assolutamente No!

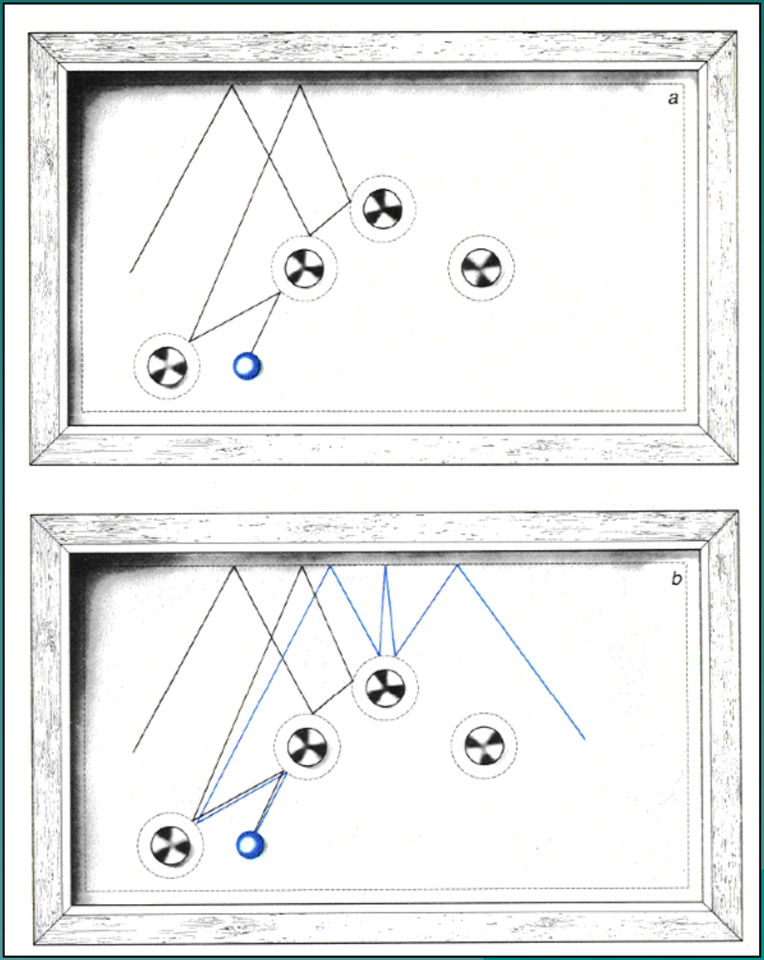
Ecco alcune buone ragioni

- Il caos può essere studiato in maniera rigorosa e segue delle leggi universali.
- E’ fondamentale sapere se un sistema si trova in un regime caotico o regolare.
- Il caos può essere estremamente utile
- E’ indispensabile al mescolamento dei fluidi, ma anche alla evoluzione dei viventi ed alla loro sopravvivenza in un ambiente che varia nel tempo.
- Il caos può essere controllato

Esempi di Caos deterministico

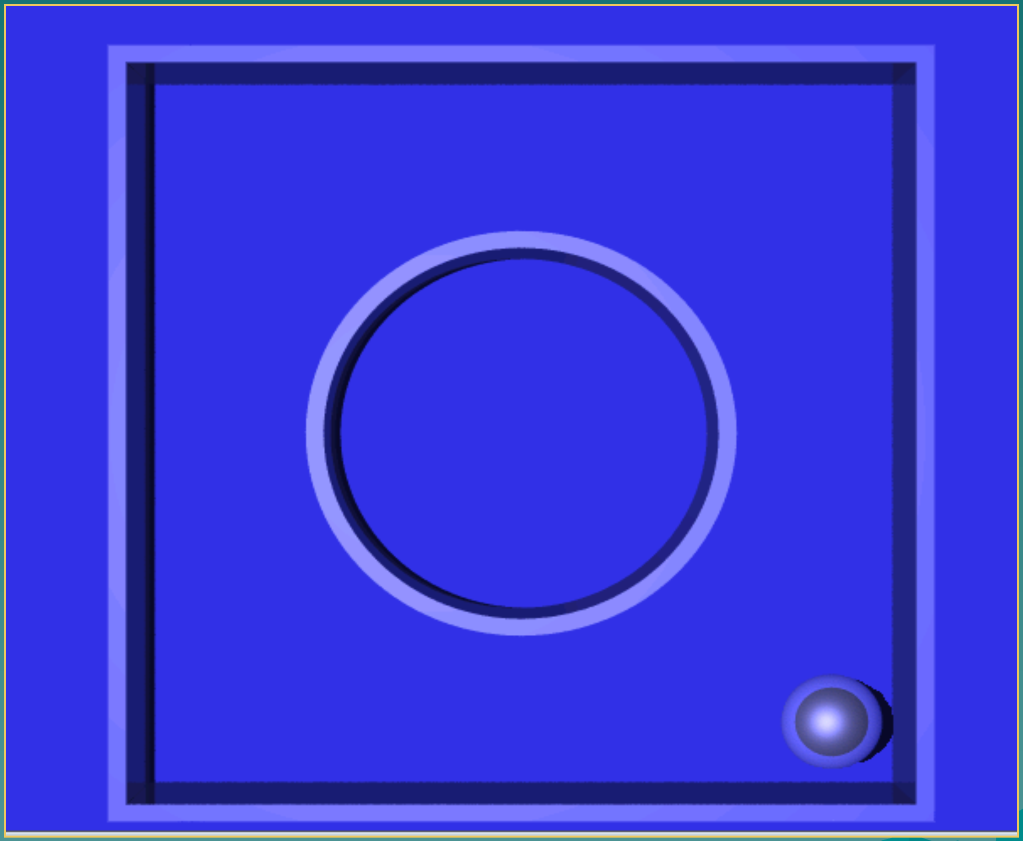
- Il biliardo

Gli ostacoli sferici per il potere defocalizzante delle superfici curve fanno sì che piccole differenze iniziali vengano amplificate ….dopo pochi rimbalzi due traiettorie inizialmente simili hanno una evoluzione completamente diversa



Il biliardo di Sinai

Il matematico russo Jakov Sinai (1935) oggi professore a Princeton ha provato in maniera rigorosa che questo biliardo con un ostacolo sferico mostra caos deterministico



Esempi di Caos deterministico

- Il pendolo smorzato e forzato

Esempi di Caos deterministico

- Il sistema solare non è così stabile come si potrebbe pensare…

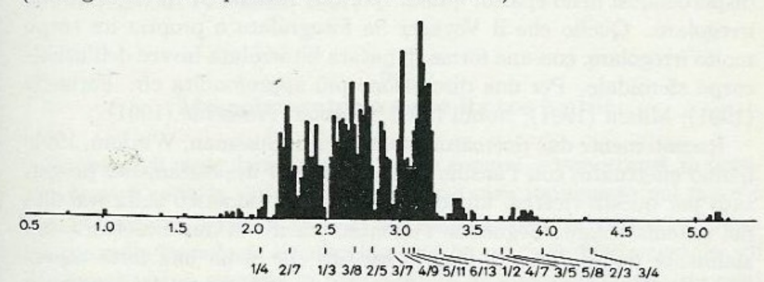
- Gia’ Poincarè si rese conto agli inizi del secolo che il problema dei tre corpi non è integrabile….ovvero non ammette una soluzione analitica… e un piccolo corpo di prova si muove in maniera erratica nel campo gravitazionale di due grossi corpi massivi.

- Oggi oltre a dettagliati studi teorici (Wisdom, Laskar e altri) vi sono diverse indicazioni sperimentali in questa direzione

  -Il moto irregolare di Iperione un satellite molto deformato di Saturno

  -la distribuzione dei periodi degli asteroidi, che mostra dei buchi in corrispondenza di valori razionali con il periodo dell’orbita di Giove

Frazione del numero di asteroidi in funzione del semiasse maggiore dell’orbita (le lunghezze sono espresse in unità astronomiche)

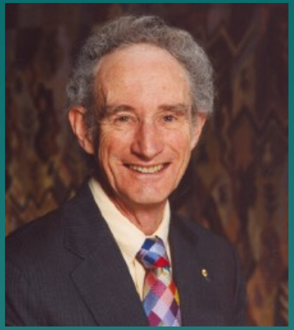


I numeri razionali indicano le distanze alle quali gli asteroidi sono in risonanza; ad esempio 2/7 significa che l’asteroide compie 7 giri intorno al Sole nel tempo in cui Giove ne compie 2.

Esempi di Caos deterministico

- La mappa logistica
  di Robert May (1976)

$$x_{n+1} = r\, x_n\,(1 - x_n)$$



Robert May (1936 -2000)

Nature **261** 459–67 (1976)

Simple mathematical models with very complicated dynamics

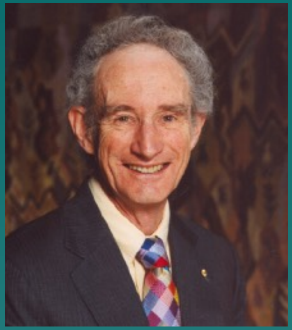
Robert M. May*

First-order difference equations arise in many contexts in the biological, economic and social sciences. Such equations, even though simple and deterministic, can exhibit a surprising array of dynamical behaviour, from stable points, to a bifurcating hierarchy of stable cycles, to apparently random fluctuations. There are consequently many fascinating problems, some concerned with delicate mathematical aspects of the fine structure of the trajectories, and some concerned with the practical implications and applications. This is an interpretive review of them.

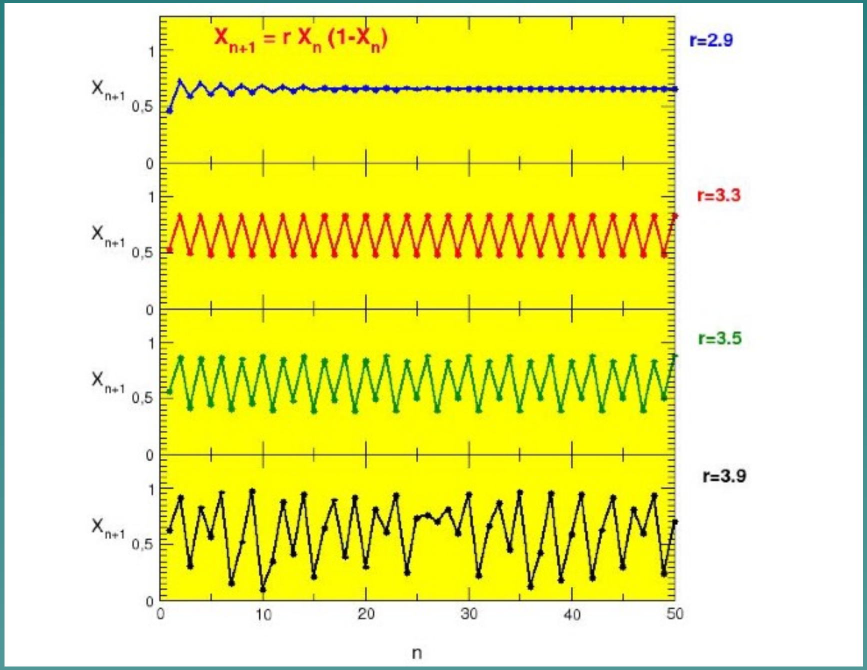
Esempi di Caos deterministico

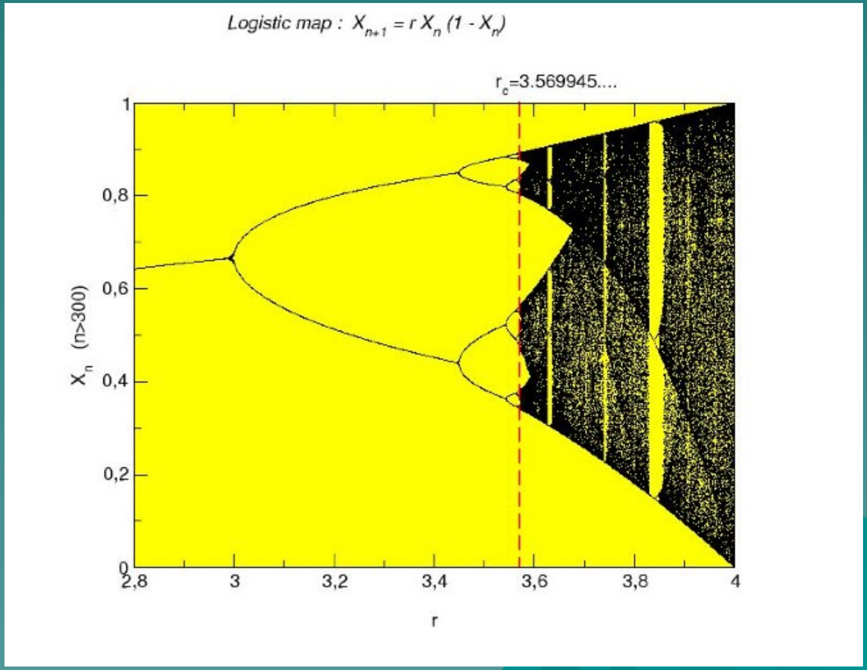
- La mappa logistica di Robert May (1976)

$$x_{n+1} = r\, x_n\, (1 - x_n)$$



Robert May (1936 -2000)





Esempi di Caos deterministico

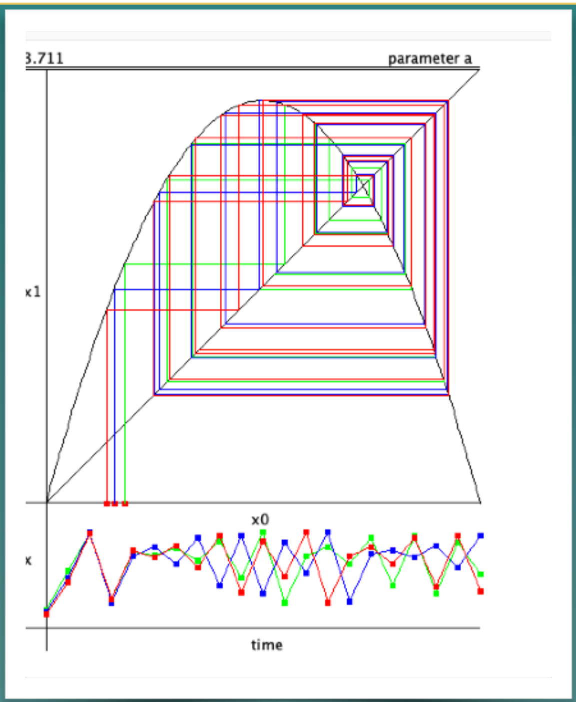
- La mappa logistica

May (1976)

$$x_{n+1} = a\, x_n\, (1 - x_n)$$

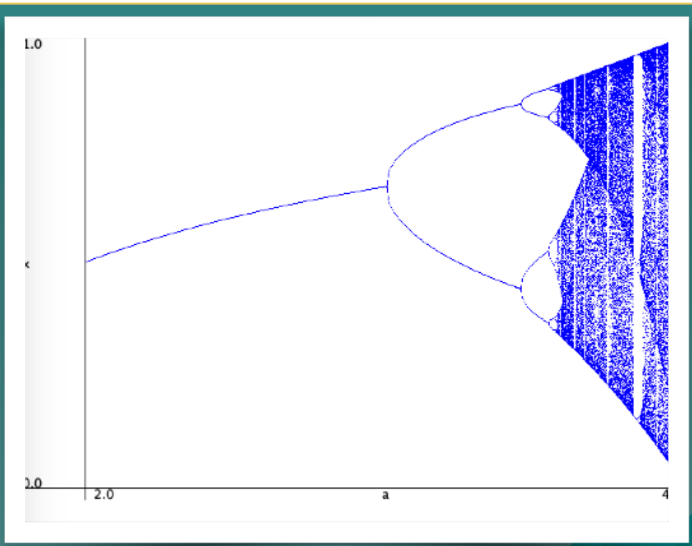
- Sensibilità alle condizioni iniziali

Time Series of Logistic map



- Diagramma di biforcazioni

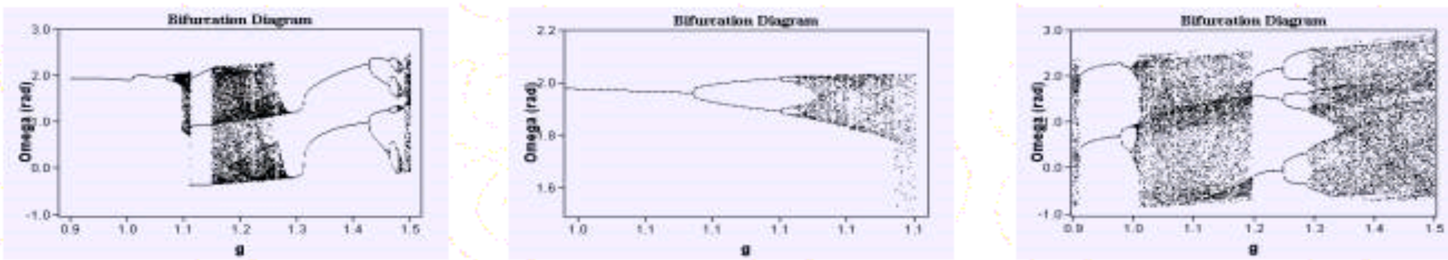
Bifurcation diagram of the logistic map



Biforcazioni nel pendolo

Observations:

Below are some bifurcation diagrams that can be obtained for various values of the dampening factor (q).



(a) (b) (c)

Fig. 1: Bifurcation Diagram of the damped, driven pendulum when $\omega_D = 2/3$ and $\Phi = 0.0$. g ranges from 0.9 to 1.50 (a) q = 2; (b) an expansion of (a); (c) q = 4.

Depending on the initial conditions of the system, the behavior can follow different branches to chaos. Since the Bifurcation Diagram is viewed stroboscopically, a periodic system will have one point. A system exhibiting period doubling will have two points and a chaotic system will have multiple points. Figure (b) is an expansion of the bifurcation diagram for the system when experiencing the first bifurcation into period doubling and then chaos.

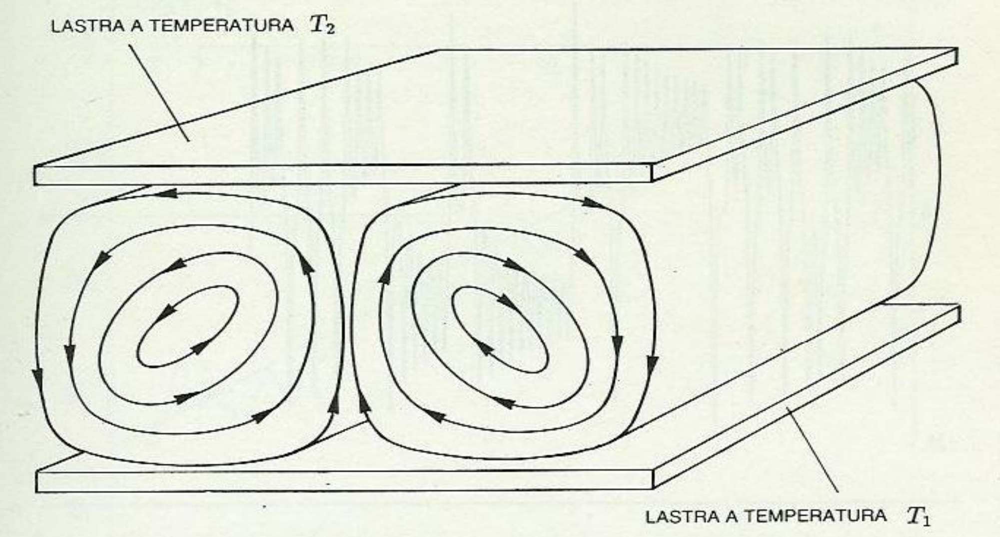
Attrattori strani

- Il modello di Lorenz (1963)

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -\sigma(x-y) \\
\dfrac{dy}{dt} = rx - y - xz \\
\dfrac{dz}{dt} = xy - bz
\end{cases}
$$

x è legata alla velocità del fluido mente y e z sono collegate alla differenza di temperatura

Convezione di Rayleigh-Bénard



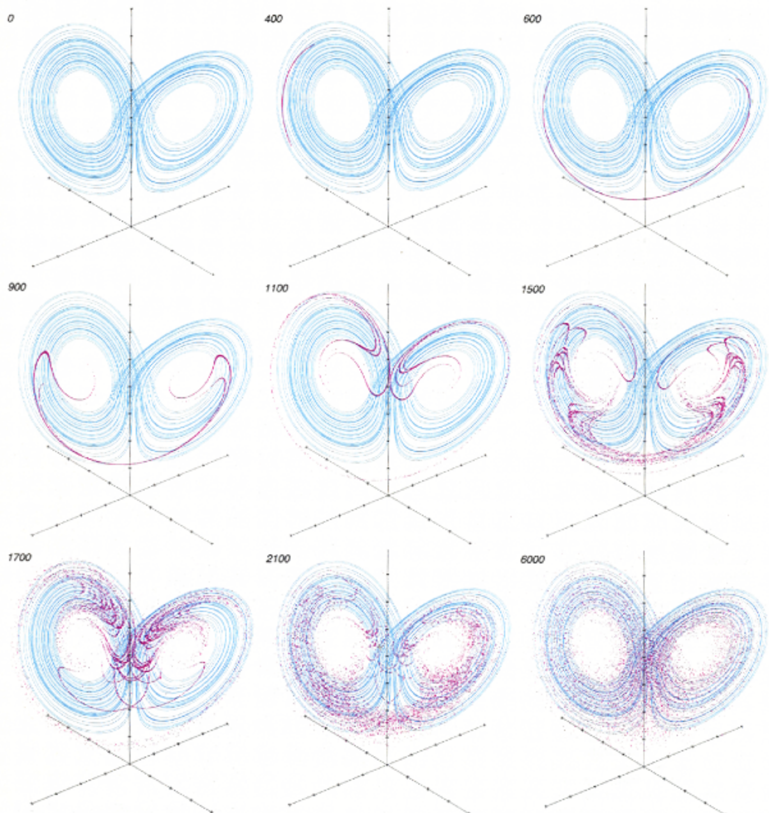
$\sigma = 10$ Parametro che dipende dalla viscosità del fluido

$b = 8/3$ Parametro che dipende dalla geometria

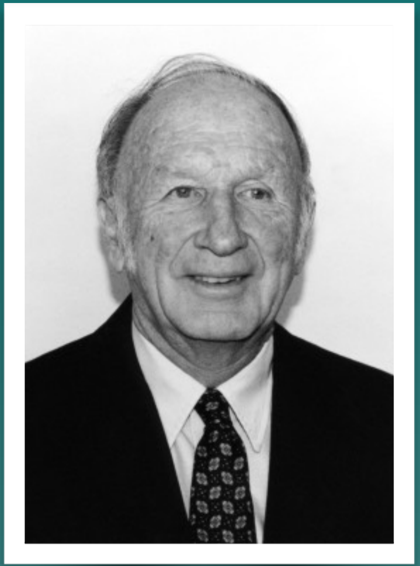
$r = 28$ Parametro di controllo proporzionale alla differenza di temperatura

Attrattori strani

- L'attrattore di Lorenz (1963)



La divergenza delle traiettorie vicine è la ragione di fondo per la quale il caos porta all'imprevedibilità. Una misurazione perfetta corrisponderebbe a un punto dello spazio degli stati, ma tutte le misurazioni reali sono imprecise e generano un alone di indeterminazione. Lo stato effettivo può essere in qualunque punto interno a questo alone. Come si vede qui nel caso dell'attrattore di Lorenz, l'imprecisione della misura iniziale è rappresentata da 10 000 puntini rossi, che all'inizio sono così vicini tra loro da essere indistinguibili. Via via che ciascun punto si muove per effetto delle equazioni, l'alone viene stirato e forma un lungo filo sottile, che poi si piega su se stesso molte volte, fino a quando i punti risultano diffusi su tutto l'attrattore. Ora la previsione è impossibile: lo stato finale può essere in qualunque punto dell'attrattore. Per un attrattore prevedibile, invece, tutti gli stati finali rimangono vicini tra loro. I numeri sopra l'illustrazione sono in unità di 1/200 di secondo.



Edward Lorenz (1917 - 2008)

Universalità della transizione ordine-caos

La transizione dall'*ordine al caos* **segue delle leggi universali ben precise**

Infatti è caratterizzata da due costanti scoperte da Feigenbaum nel 1978 e confermate sperimentalmente con diversi dispositivi

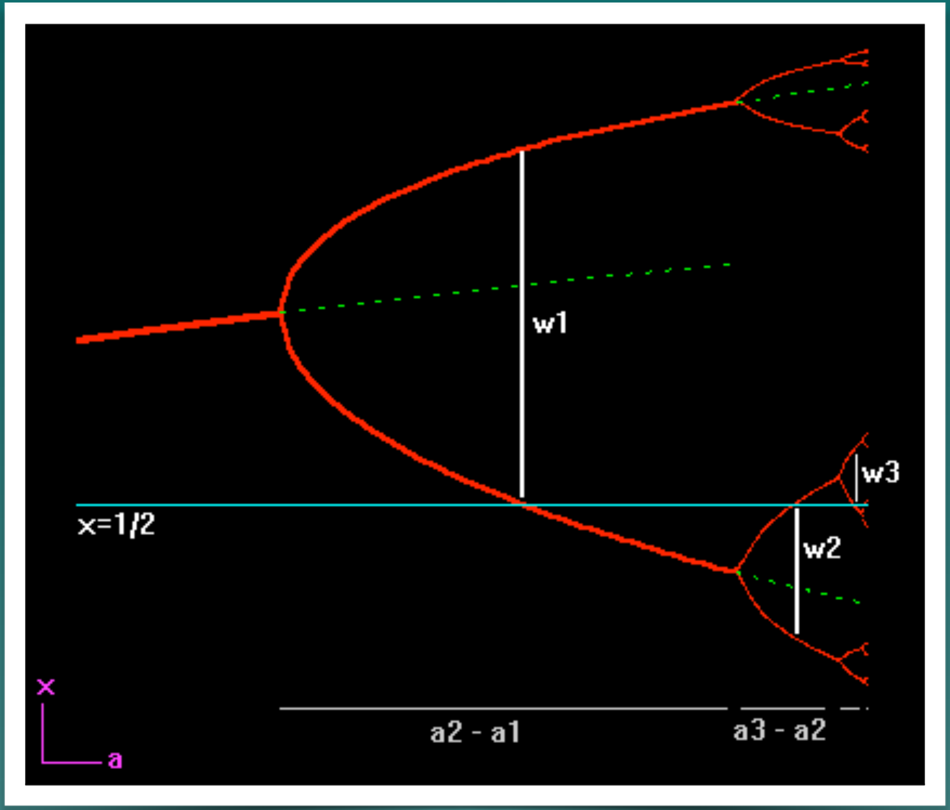
Mitchell Jay Feigenbaum (Filadelfia, 19 dicembre 1944 – New York, 30 giugno 2019) matematico e fisico statunitense, vincitore del premio Wolf nel 1986.

Universalità della transizione ordine-caos

Costanti di Feigenbaum

$$\delta = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.6692016091\ldots$$

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \frac{w_n}{w_{n+1}} = 2.5029078750\ldots$$



Conferme sperimentali delle costanti di Feigenbaum α e δ

experiment	no. period doublings	δ	α
hydrodynamic:			
water[1]	2		
water[2]	4	4.3(8)	
helium[3]	4	3.5(1.5)	
mercury[4]	4	4.4(1)	
Electronic:			
diode[5]	4	4.5(6)	
diode[6]	5	4.3(1)	2.4(1)
transistor[7]	4	4.7(3)	
Josephson simul.[8]	3	4.5(3)	2.7(2)
Laser:			
laser feedback[9]	3	4.3(3)	O.K.
laser[10]	2		
laser[11]	3		
Acoustic:			
helium[12]	3		
helium[13]	3	4.8(6)	
Chemical:			
B-Zh reaction[14]	3		
Computer:			
N-S truncation[15]	5	4.6(2)	2.5(1)
Brusselator[16]	7	4.6(2)	
Theory:	∞	4.669..	2.503..
equation no.		(5.1)	(4.2)

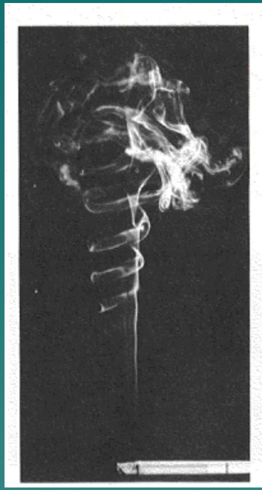
1. Gollub and Benson (1980).
2. Giglio, Musazzi and Perini (1981).
3. Libchaber and Maurer (1981).
4. Libchaber, Laroche and Fauve (1982).
5. Linsay (1982).
6. Testa, Pérez and Jefferies (1982).
7. Arecchi and Lisi (1982).
8. Yeh and Kao (1982).
9. Hopf, Kaplan, Gibbs and Shoemaker (1981).
10. Arecchi, Meucci, Puccioni and Tredicce (1982).
11. Weiss, Godone and Olafsson (1983).
12. Lauterborn and Cramer (1981).
13. Smith, Tejwani and Farris (1982).
14. Simoyi, Wolf and Swinney (1982).
15. Franceschini and Tebaldi (1979).
16. Kai (1981).

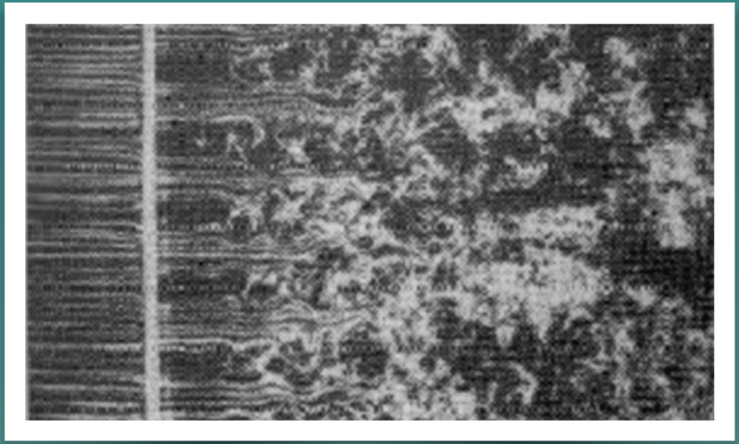
Caos spazio-temporale: La turbolenza

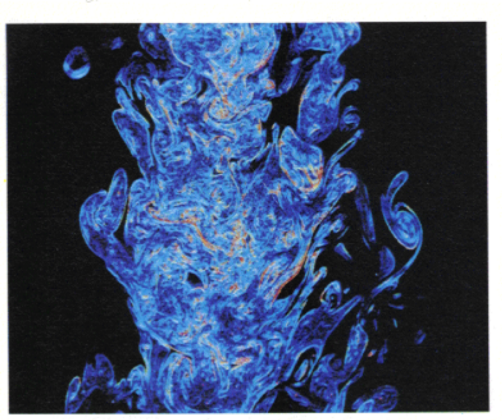
All’aumentare della velocità oltre una certa soglia il moto di un fluido passa da un regime laminare ….

ad uno turbolento.

Si formano strutture complesse che variano nello spazio e nel tempo. Si ha caos spazio-temporale.



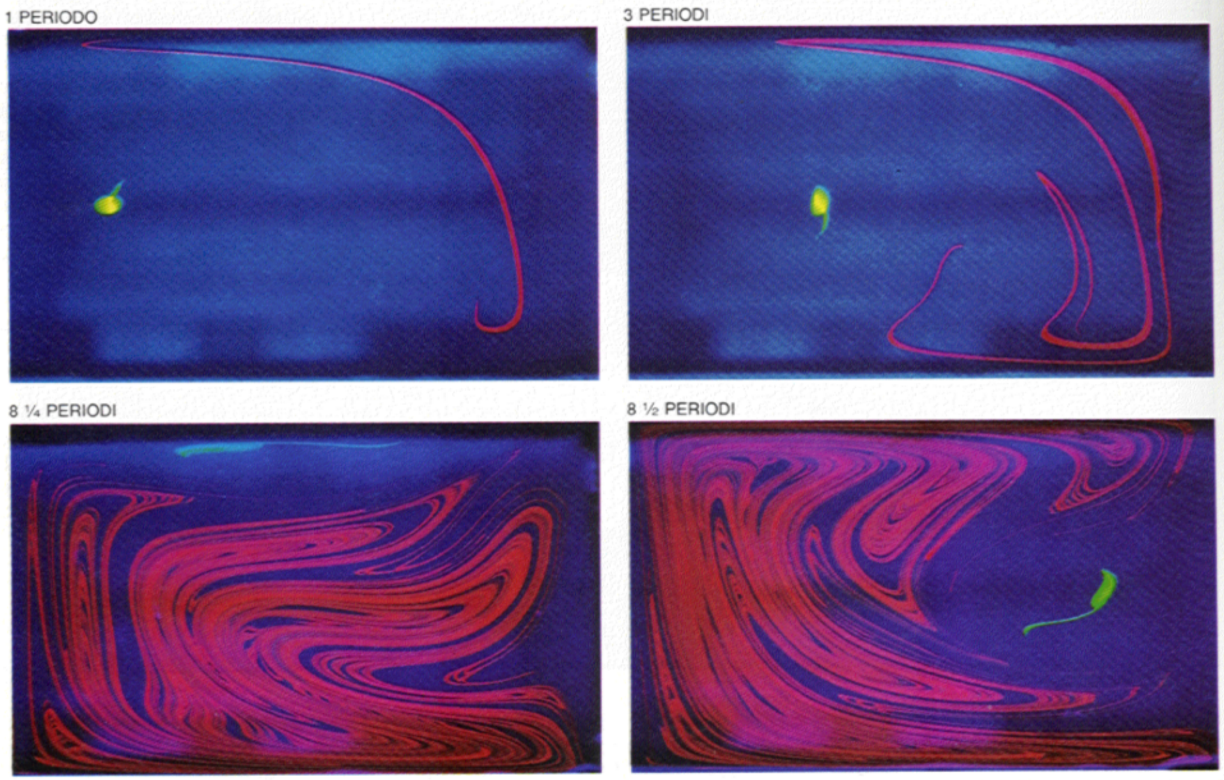




Il flusso turbolento può generare strutture molto diverse da quelle prodotte in un flusso viscoso lento. L’immagine, ottenuta da K. R. Sreenivasan della Yale University, è una ricostruzione al calcolatore di un getto d’acqua espulso da un ugello circolare in acqua quieta. Le strutture del flusso venivano originariamente registrate su pellicola sciogliendo un colorante fluorescente nell’acqua espulsa e dirigendo una lama di luce laser lungo l’asse dell’ugello. L’intensità della fluorescenza risultante è proporzionale al gradiente di concentrazione relativo del colorante nell’acqua; le immagini sono state codificate in colore dal blu scuro al rosso a seconda del gradiente di concentrazione. Il flusso turbolento mostrato appare formato da varie strutture frattali sovrapposte, tra cui numerosi vortici.

Caos e mescolamento di fluidi

Il meccanismo dell'allungamento e del ripiegamento

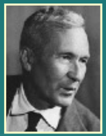


L'allungamento e il ripiegamento tipici del mescolamento caotico sono evidenziati dalla goccia rossa in questa sequenza di fotografie dell'esperimento mostrato nell'illustrazione della pagina precedente. Dopo tre periodi è chiaramente visibile lo schema fondamentale di allungamento e ripiegamento. L'isola verde che contraddistingue una regione di mescolamento essenzialmente non caotico e le pieghe che caratterizzano una regione di mescolamento caotico si muovono nella cavità, ma dopo ogni periodo tornano nelle stesse

Breve cronistoria del caos deterministico

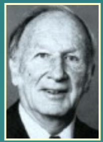
- **Poincarè (1900) Il problema dei tre corpi**

- **G. Birkhoff(1935) Teoremi sui sistemi dinamici**



- **Kolmogorov (1941) – Turbolenza, Entropia, Teorema KAM**

- **Y. Sinai – Ergodicità del biliardo con ostacoli sferici**



- **E. Lorenz (1963) – Effetto farfalla nelle previsioni meteorologiche**

- **B. Mandelbrot (1970) - I frattali**

- **D. Ruelle (1971) - Attrattori strani**

- **M. Feigenbaum (1980) – Universalità della mappa logistica**
- **…e da allora tanti altri fino ai giorni nostri**

Cos’è un frattale

“Perché la geometria viene spesso descritta come fredda e arida? Una ragione è l’inabilità di descrivere la forma di una nuvola o di una montagna una linea costiera o un albero.
Le nuvole non sono delle sfere, le montagne non sono dei coni le linee costiere non sono dei cerchi, il sughero non è liscio ed i fulmini non si muovo lungo linee diritte.”

-- Benoit B. Mandelbrot --

Così Mandelbrot nel suo libro *The Fractal Geometry of Nature* descrive l'inadeguatezza della geometria euclidea nella descrizione della natura.

Mandelbrot è il padre della dei frattali e inventore del famoso insieme che porta il suo nome.

Benoît Mandelbrot

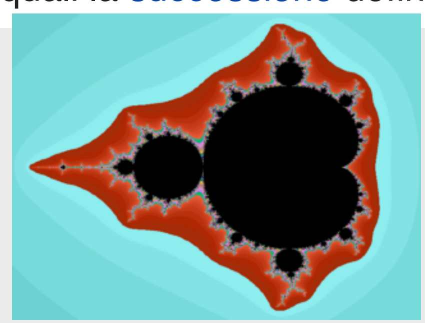
(Varsavia, 20 novembre 1924 – Cambridge, 14 ottobre 2010)

Mandelbrot è il padre dei frattali e inventore del famoso insieme che porta il suo nome.

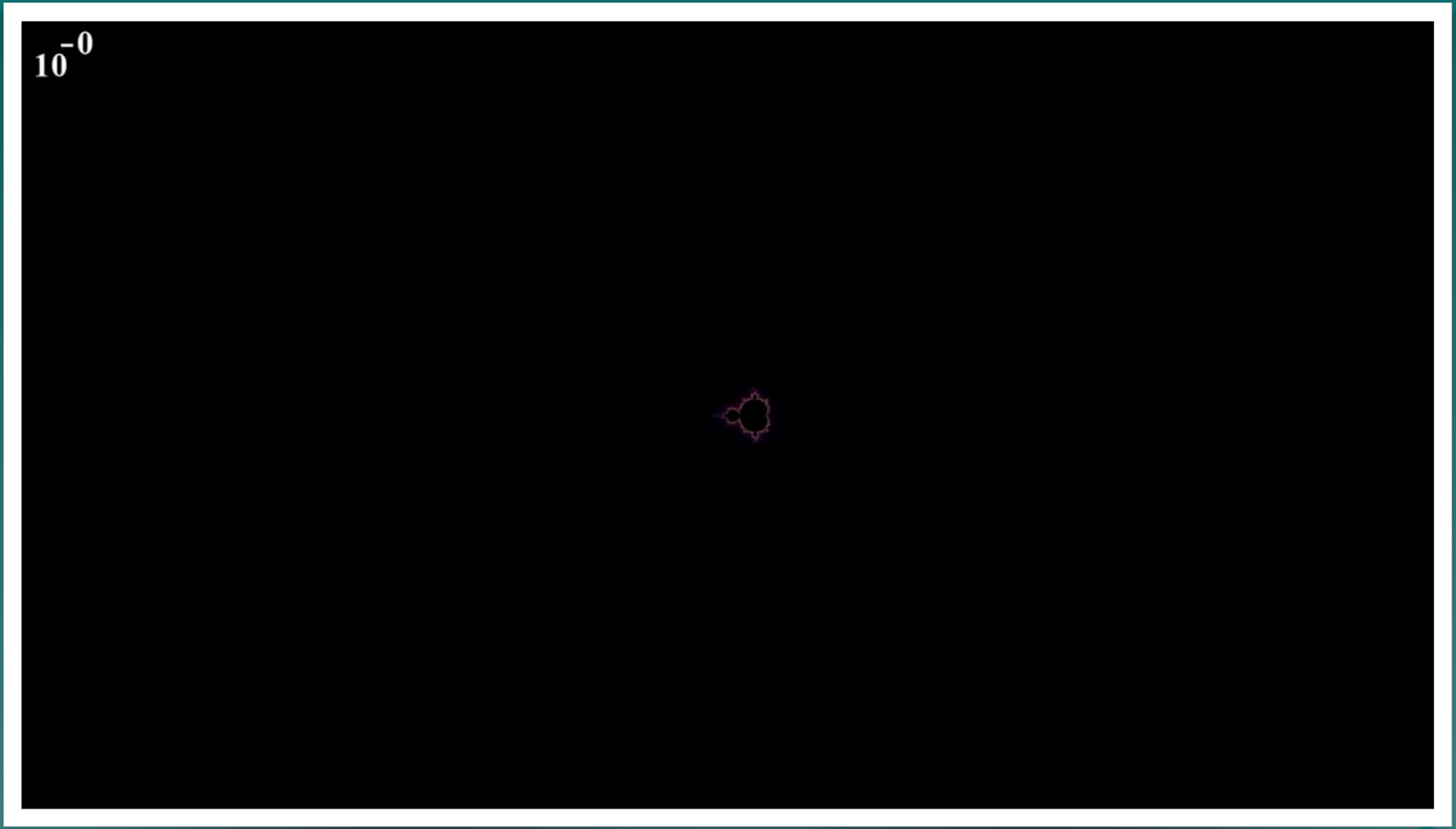
È l'insieme dei numeri complessi per i quali la successione definita da:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

è limitata



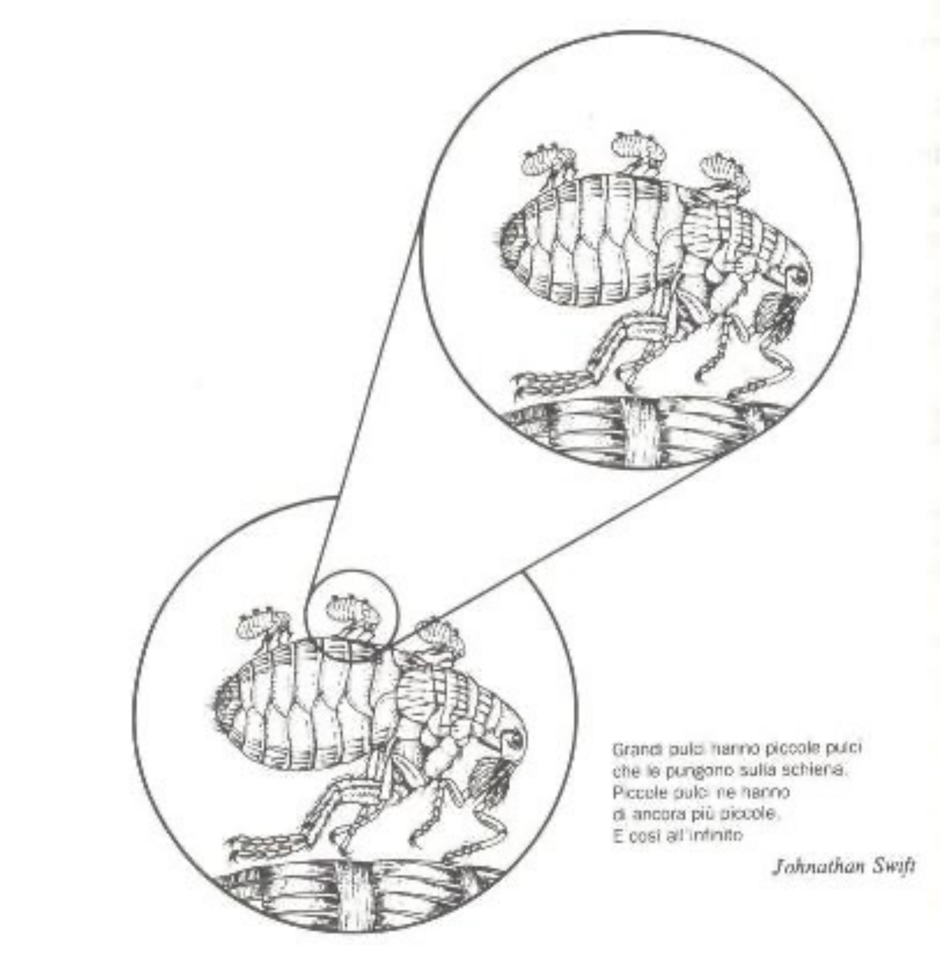
Il set di Mandelbrot



Cos’è un frattale

Un frattale è un oggetto che mostra una invarianza di scala…ovvero ha la stessa struttura a tutte le scale

e che possiede una dimensione non intera.



Cos’è un frattale

Il termine frattale fu coniato da Mandelbrot e ha origine nel termine latino *fractus*, poichè la dimensione di un frattale non è intera.

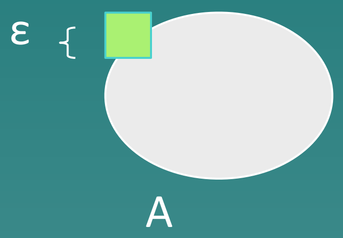
La dimensione di un oggetto è data dal numero minimo di coordinate necessarie ad individuare i punti dell’oggetto stesso.

Così per un punto è 0
per una linea è 1
per una superficie è 2
…

La dimensione frattale

La dimensione frattale è una generalizzazione della definizione di dimensione euclidea

$$N(\varepsilon) \propto \frac{L}{\varepsilon}$$



$$N(\varepsilon) \propto \frac{A}{\varepsilon^2}$$

per cui

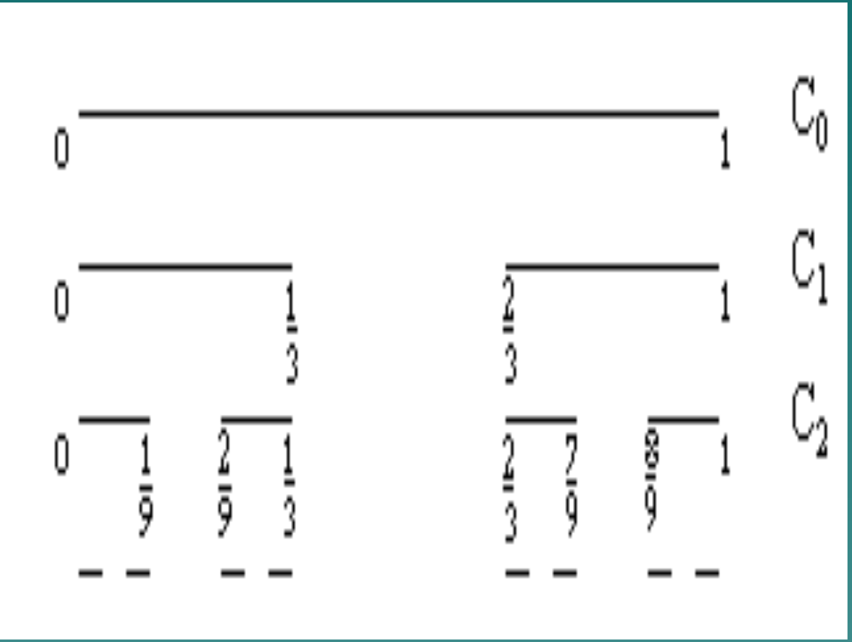
$$N(\varepsilon) \propto \frac{1}{\varepsilon^D}$$

Generalizzando si può definire la dimensione frattale ***D**$_F$* come

anche per valori non interi

$$\boxed{D_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}}$$

Un semplice frattale:
La polvere di Cantor

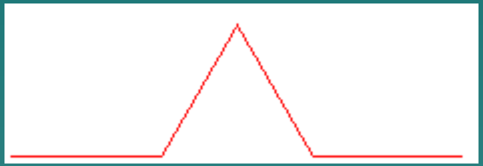


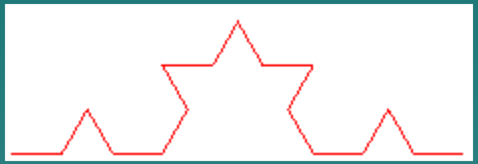
N	ε	iterazione
1	1	0
2	1/3	1
2^2	$(1/3)^2$	2
2^n	$(1/3)^n$	n

Georg Cantor
1845-1918

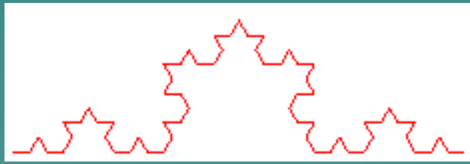
$$D_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(2)^2}{\ln(3)^2} = 0.63...$$

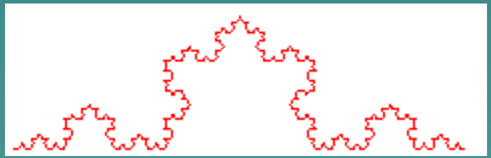
La curva di Koch



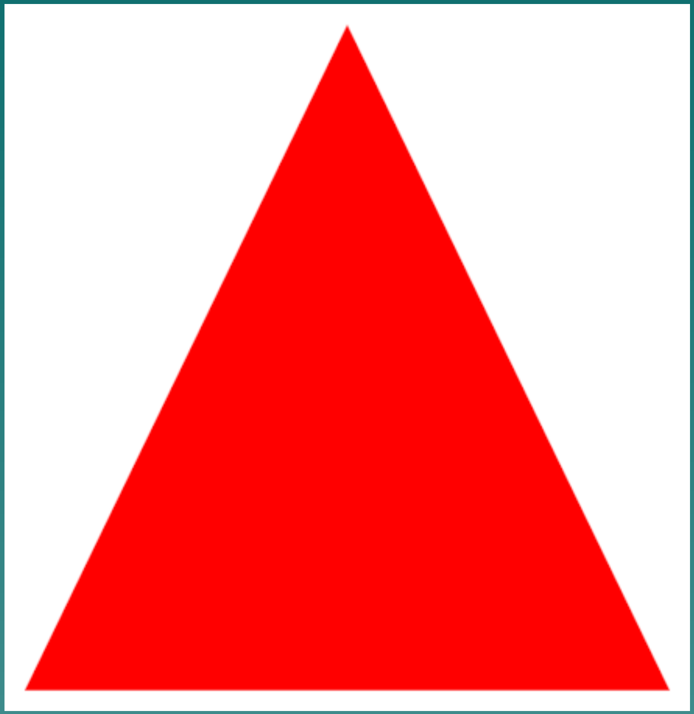


$$D_F = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26..$$





Il triangolo di Sierpinski

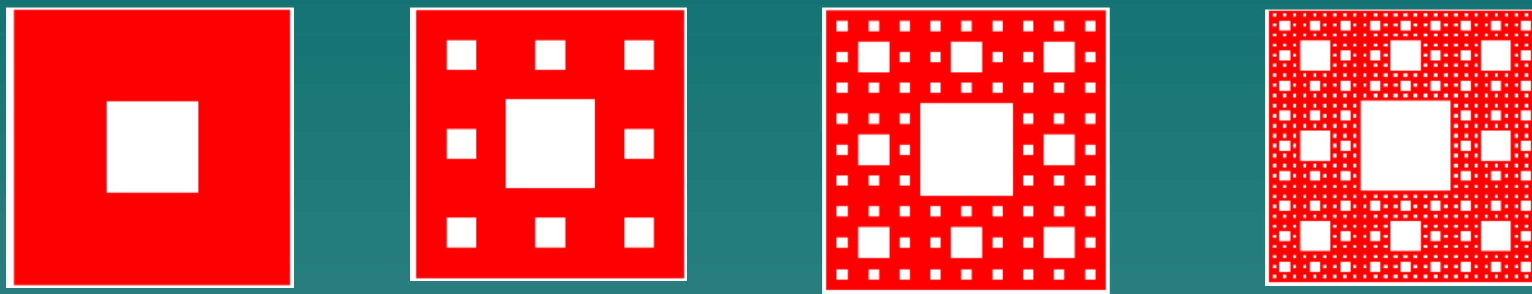


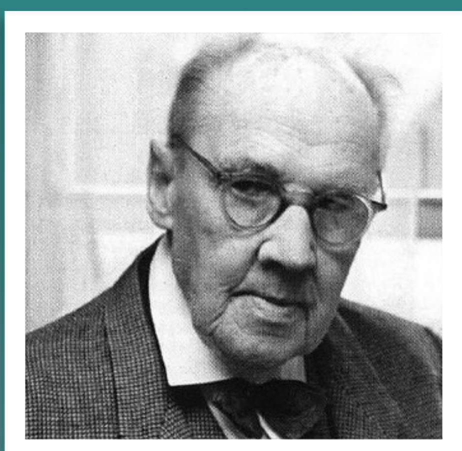
W. Sierpinski

(1882-1969)

$$D_F = \frac{ln3}{ln2} = 1.585...$$

Il tappeto di Sierpinski





W. Sierpinski

(1882-1969)

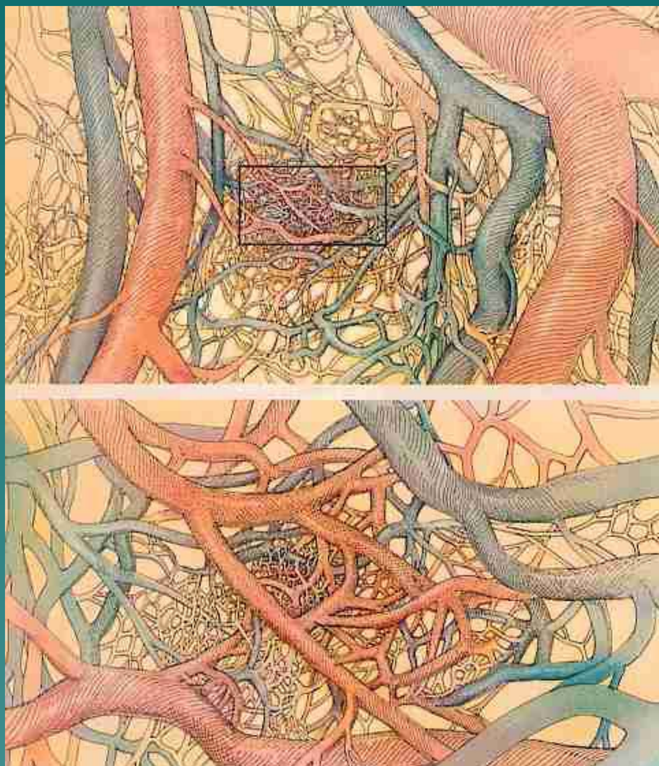
$$D_F = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.9$$

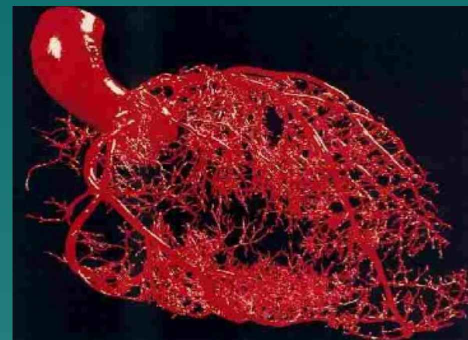
Strutture frattali intorno noi

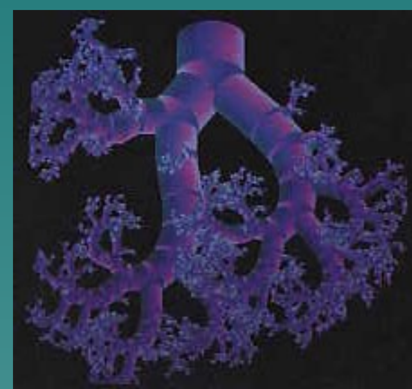
Strutture frattali intorno noi

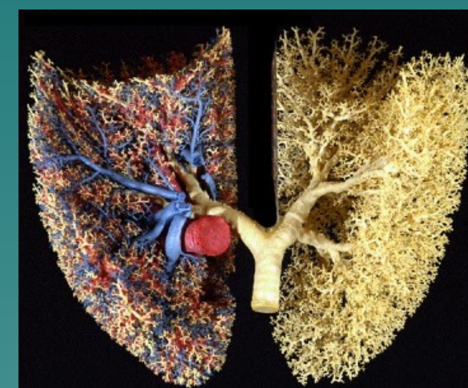
Strutture frattali intorno noi

strutture frattali intono a noi









Le strutture frattali massimizzano il rapporto superficie/volume: sebbene il volume di un paio di polmoni umani sia di soli ~ 4 - 6 litri, la superficie dello stesso paio di polmoni è compresa tra 50 e 100 metri quadrati, che è più o meno la stessa area di un campo da tennis!

strutture frattali intono a noi

- Una rete fluviale

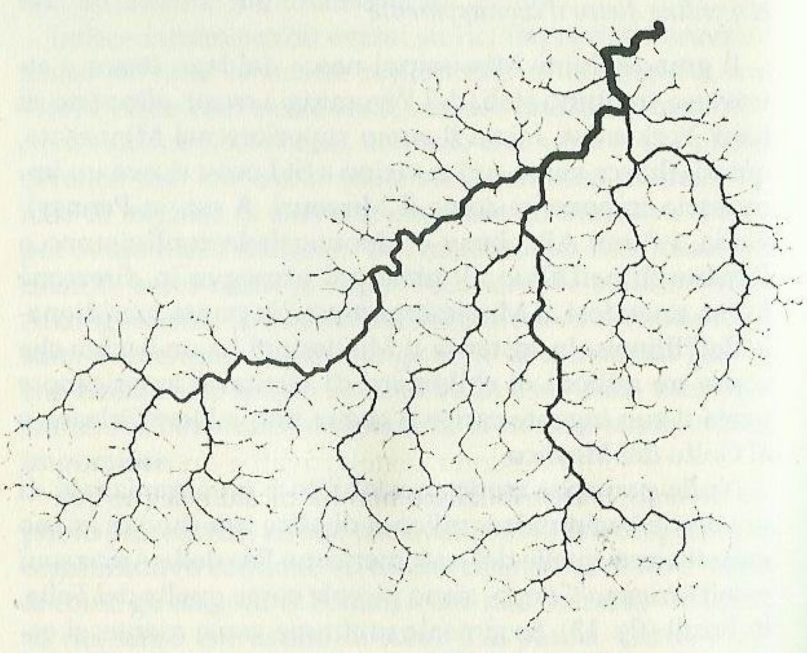


Figura 13. La struttura della rete fluviale del Fella, in Friuli. (L'immagine, riprodotta con il permesso di Ignacio Rodríguez-Iturbe e Andrea Rinaldo, è tratta da *Fractal River Basins*, Cambridge, Cambridge University Press, 1997.)

Frattali in economia

- L'andamento degli indici di Borsa ha una struttura irregolare ed autosimilare….ovvero è un frattale

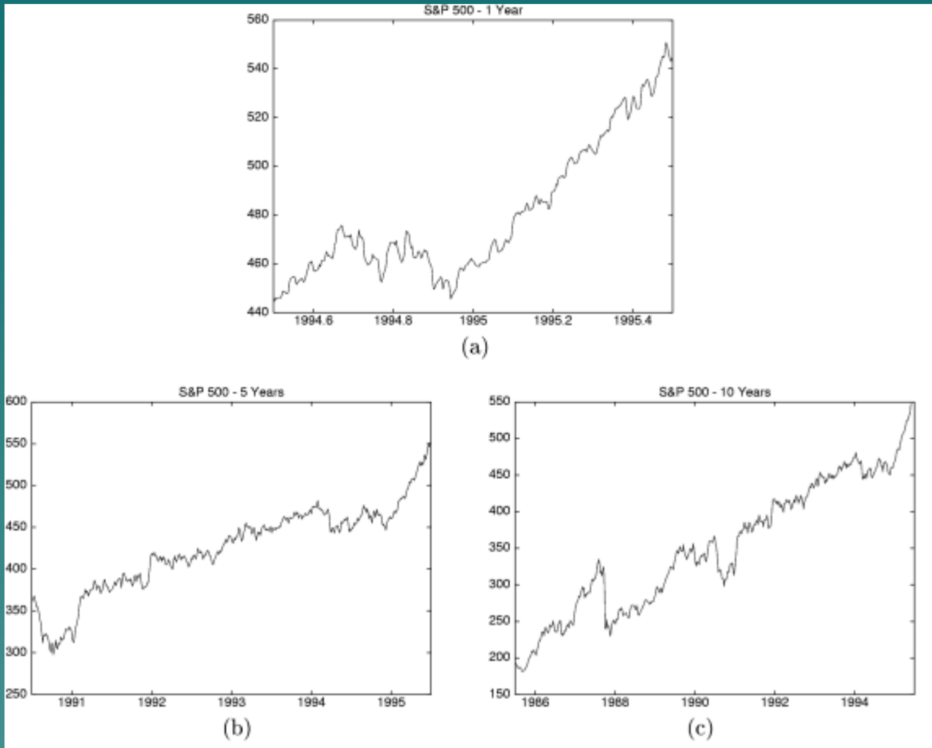
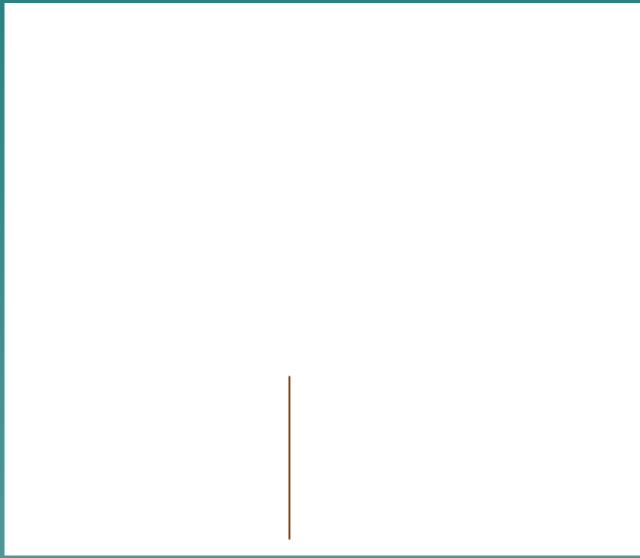


Figure 5.9 The S&P 500 stock index shown on various time scales. (a) one year, (b) five years, (c) ten years

- Non è difficile costruire un albero o una foglia con una semplice regola iterativa



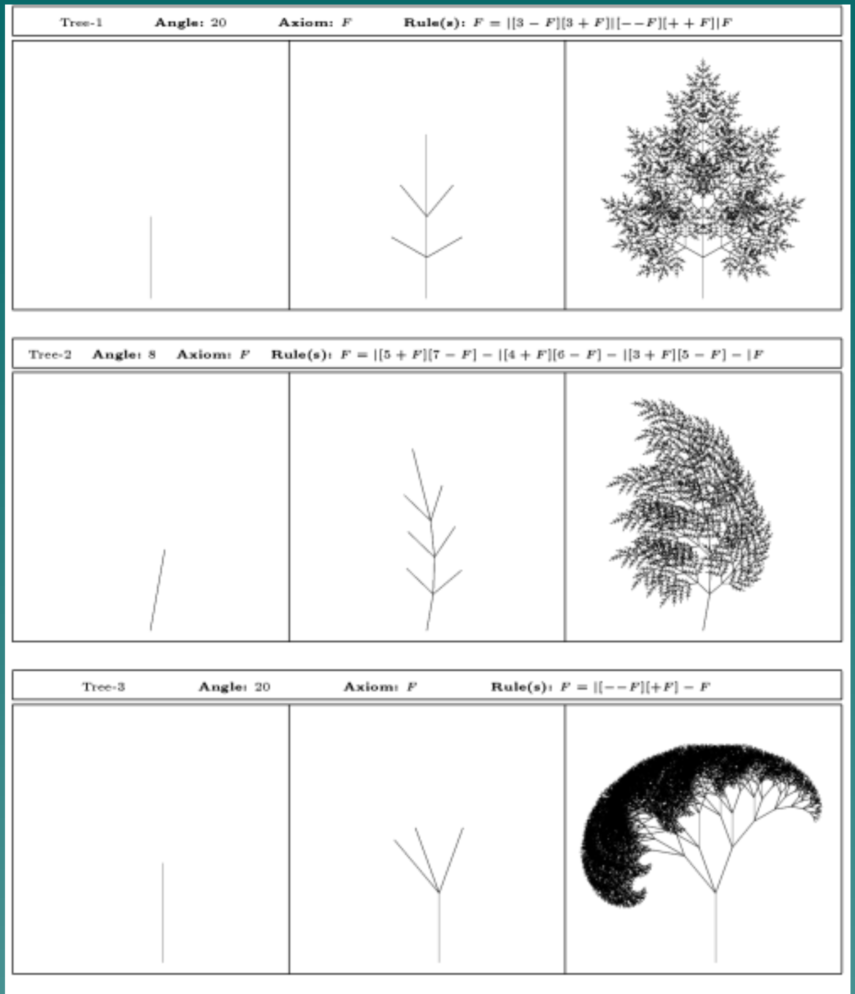


Figure 6.7 And yet more plantlike fractals: Tree-1 has an increased branching factor that creates a fuller image. Tree-2 illustrates how to use a small turning angle to make more realistic curves.

Caos e frattali

- I sistemi dinamici dissipativi hanno degli attrattori con dimensione frattale, gli attrattori strani
- Gli esponenti di Lyapunov sono correlati con le dimensioni frattali

Passiamo adesso da semplici sistemi composti da pochi elementi in interazione fra di loro, a sistemi che sono costituiti da molti elementi: ad esempio un gas, ma anche un insieme di componenti elettronici o di cellule o di animali o di persone o di società…

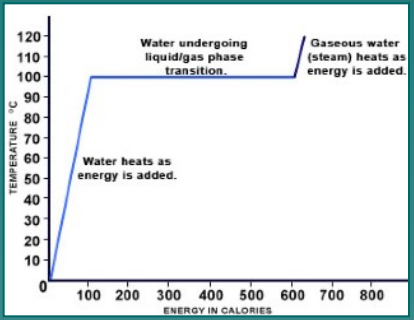
Caos e meccanica statistica

- Il caos, ipotizzato già da Boltzmann alla fine dell'800 perchè un gas potesse raggiungere lo stato di equilibrio termodinamico, garantisce che questo equilibrio venga di fatto e in tempi rapidi raggiunto e rappresenta un meccanismo di cruciale importanza per i fondamenti della meccanica statistica.

L. Boltzmann
(1844-1906)

Transizioni di fase e fenomeni critici

- Fornendo calore ad una pentola di acqua è possibile portarla alla temperatura di ebollizione facendo passare l'acqua dallo stato liquido allo stato di vapore.



- Avviene così una transizione di fase a temperatura e pressione costante .
- Al di sopra di una temperatura critica però non sarà più possibile liquefare il vapore
- Al punto critico tutto il sistema è correlato, abbiamo cioè una invarianza di scala, con fluttuazioni di densità molto grandi e a tutte le scale.

Invarianza di scala e correlazione

Al punto critico il sistema mostra invarianza di scala e correlazioni su tutto il sistema…

Ovvero

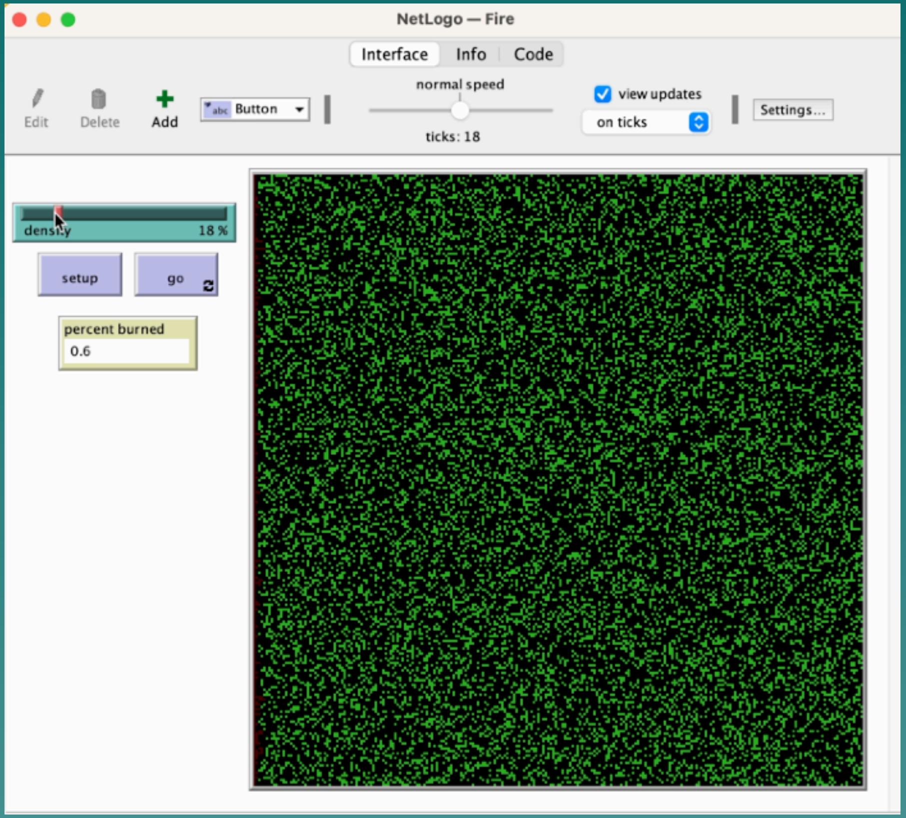
Una piccola perturbazione si ripercuote velocemente su tutto il sistema…

Sistemi al punto critico

Un esempio:

La propagazione di un incendio in una foresta dove gli alberi sono distribuiti in maniera casuale con una certa densità.

L'incendio si propaga da parte a parte e la foresta brucia tutta solo se la densità supera una soglia critica che è intorno ad una densità di alberi del 59%



Sistemi alla "soglia del caos"

- Ordine e caos sono due situazioni estreme ma tutto sommato facilmente trattabili.

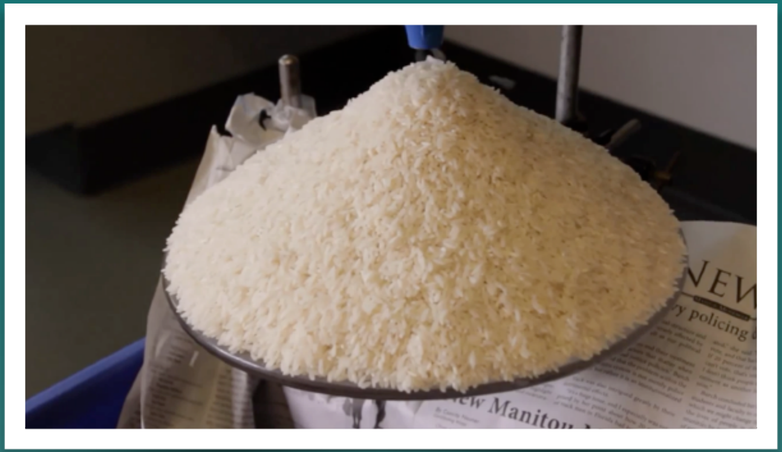
- Molto più complicato è invece lo studio delle situazioni intermedie ovvero dei sistemi fuori equilibrio e alla soglia del caos in cui il sistema viola l'ipotesi di ergodicità, visitando regioni dello spazio delle fasi in maniera diseguale, muovendosi su di un attrattore frattale.

La criticità auto-organizzata

- E' possibile avere anche dei sistemi che si auto-organizzano verso uno stato critico, senza dover variare alcun parametro esterno, come ad esempio la temperatura. Questo fenomeno scoperto negli anni 80 dal fisico danese Per Bak si chiama criticità auto-organizzata

- Ad esempio il modello della pila di sabbia

- I terremoti mostrano delle caratteristiche compatibili con la criticità auto-organizzata



Cos’è un sistema complesso

Sebbene non esista una definizione generalmente accettata di sistema complesso si può però tentare di definire sistema complesso, un sistema dinamico composto da molte parti elementari interagenti fra di loro in maniera non lineare, che al variare del tempo mostra un comportamento *emergente* non previsto dalle interazioni delle singole componenti.

Inoltre un sistema complesso ha una sua *struttura gerarchica interna* che viene generalmente distrutta da modifiche del sistema stesso.

I sistemi complessi sono sistemi che stanno alla soglia del caos

Esempi di Sistemi complessi

- sistemi fisici fuori equilibrio: Vetri di spin o sistemi con forze a lungo raggio: plasmi o sistemi gravitazionali)

- sistemi biologici: il cervello, il DNA, il sistema immunitario

- sistemi ecologici: ecosistemi, catene alimentari
- sistemi sociali: comunità di individui di vario genere
- sistemi economici: mercati finanziari, reti di commercio

- sistemi di comunicazione: reti di computers, il world wide web,reti elettriche e telefoniche

Il fenomeno dell'emergenza

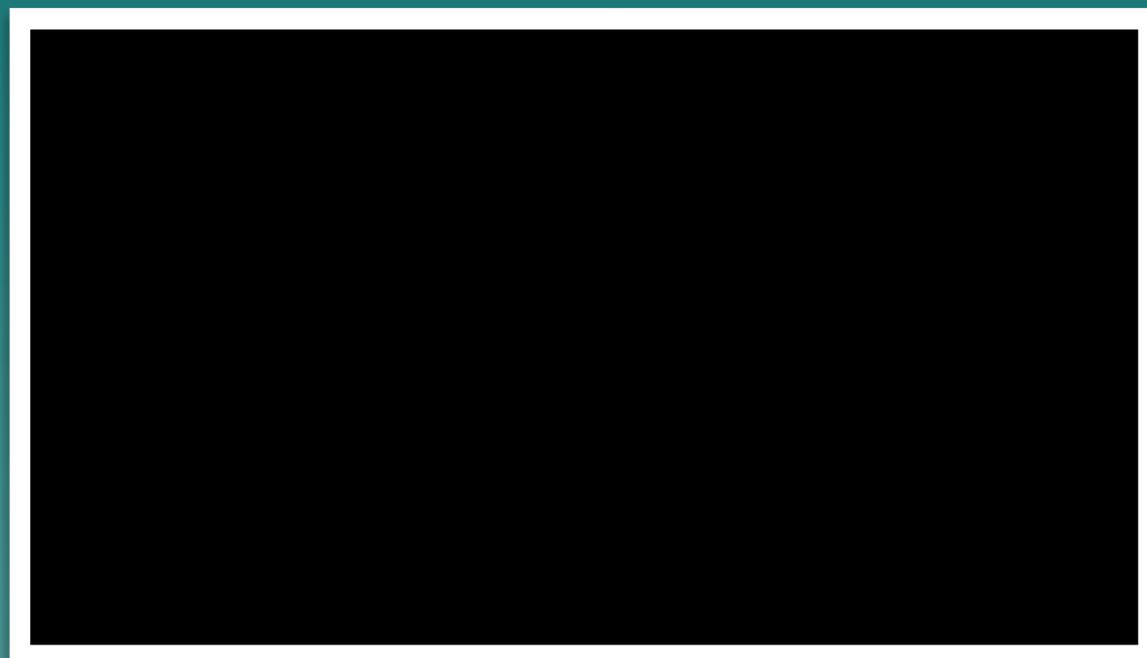
I moti collettivi e sincronizzati

I metronomi accoppiati

Il fenomeno dell’emergenza

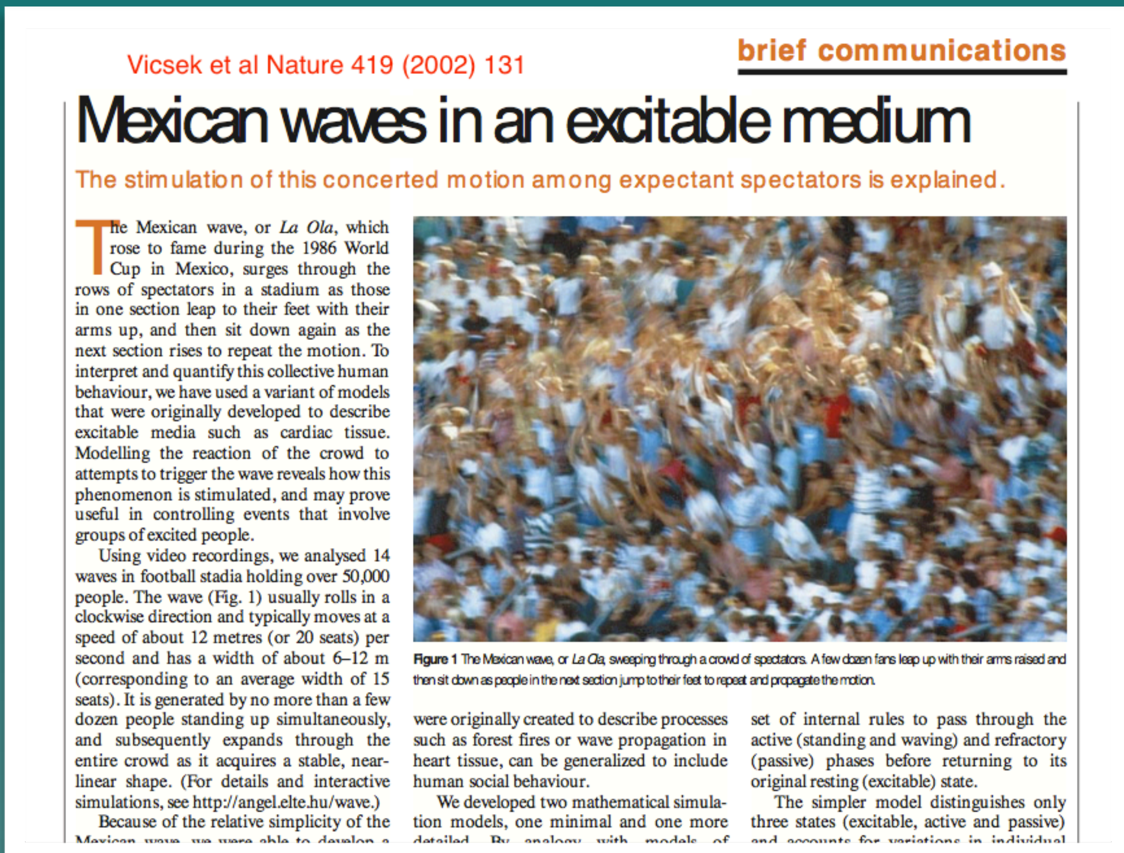
I moti collettivi e sincronizzati

La Ola



Il fenomeno dell'emergenza

I moti collettivi e sincronizzati



Vicsek et al Nature 419 (2002) 131

brief communications

Mexican waves in an excitable medium

The stimulation of this concerted motion among expectant spectators is explained.

The Mexican wave, or *La Ola*, which rose to fame during the 1986 World Cup in Mexico, surges through the rows of spectators in a stadium as those in one section leap to their feet with their arms up, and then sit down again as the next section rises to repeat the motion. To interpret and quantify this collective human behaviour, we have used a variant of models that were originally developed to describe excitable media such as cardiac tissue. Modelling the reaction of the crowd to attempts to trigger the wave reveals how this phenomenon is stimulated, and may prove useful in controlling events that involve groups of excited people.

Using video recordings, we analysed 14 waves in football stadia holding over 50,000 people. The wave (Fig. 1) usually rolls in a clockwise direction and typically moves at a speed of about 12 metres (or 20 seats) per second and has a width of about 6–12 m (corresponding to an average width of 15 seats). It is generated by no more than a few dozen people standing up simultaneously, and subsequently expands through the entire crowd as it acquires a stable, near-linear shape. (For details and interactive simulations, see http://angel.elte.hu/wave.)

Because of the relative simplicity of the

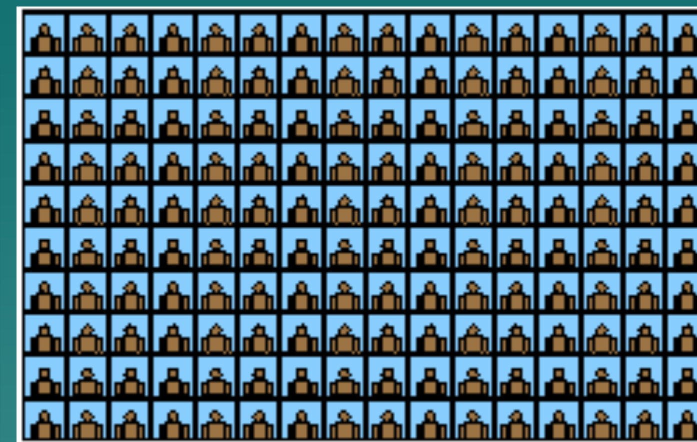
Figure 1 The Mexican wave, or *La Ola*, sweeping through a crowd of spectators. A few dozen fans leap up with their arms raised and then sit down as people in the next section jump to their feet to repeat and propagate the motion.

were originally created to describe processes such as forest fires or wave propagation in heart tissue, can be generalized to include human social behaviour.

We developed two mathematical simulation models, one minimal and one more

set of internal rules to pass through the active (standing and waving) and refractory (passive) phases before returning to its original resting (excitable) state.

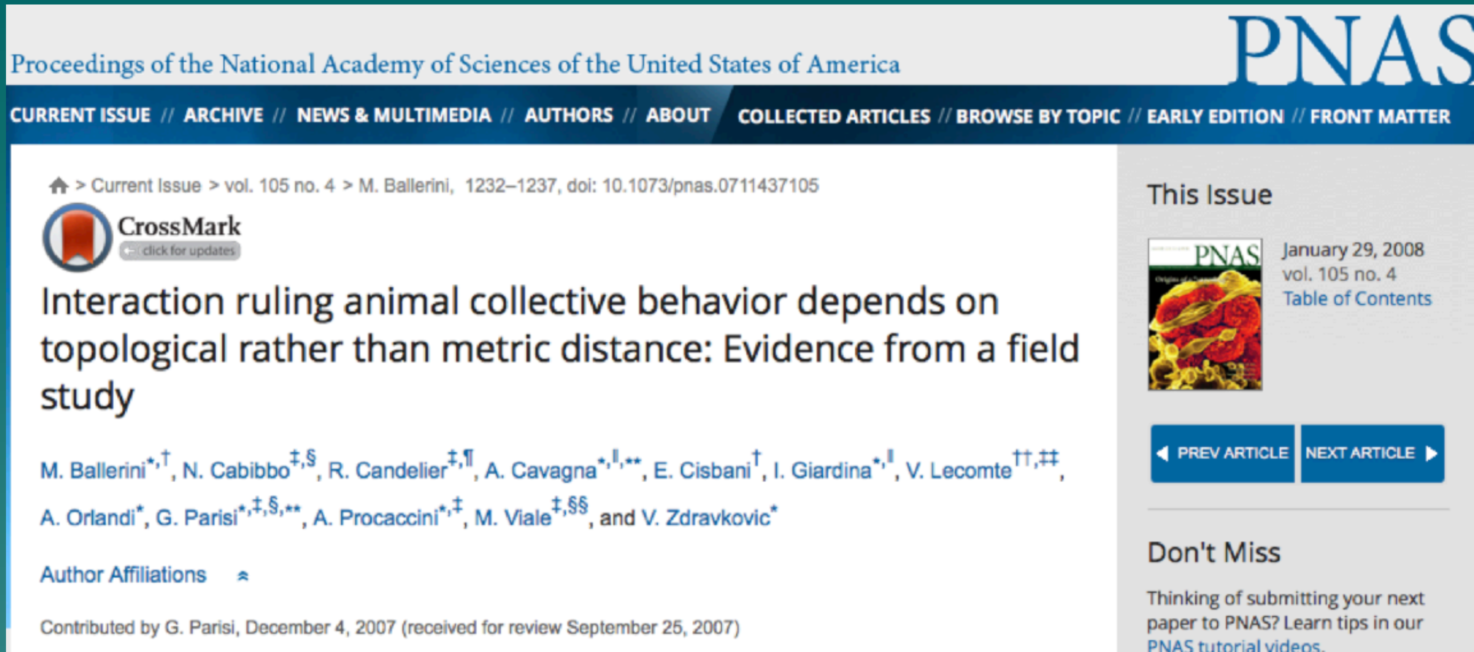
The simpler model distinguishes only three states (excitable, active and passive)



Il fenomeno dell'emergenza

I moti collettivi e sincronizzati

Gli stormi di uccelli



Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America

PNAS

CURRENT ISSUE // ARCHIVE // NEWS & MULTIMEDIA // AUTHORS // ABOUT COLLECTED ARTICLES // BROWSE BY TOPIC // EARLY EDITION // FRONT MATTER

> Current Issue > vol. 105 no. 4 > M. Ballerini, 1232–1237, doi: 10.1073/pnas.0711437105

CrossMark
click for updates

Interaction ruling animal collective behavior depends on topological rather than metric distance: Evidence from a field study

M. Ballerini[*,†], N. Cabibbo[‡,§], R. Candelier[‡,¶], A. Cavagna[*,‖,**], E. Cisbani[†], I. Giardina[*,‖], V. Lecomte[††,‡‡], A. Orlandi[*], G. Parisi[*,‡,§,**], A. Procaccini[*,‡], M. Viale[‡,§§], and V. Zdravkovic[*]

Author Affiliations

Contributed by G. Parisi, December 4, 2007 (received for review September 25, 2007)

This Issue

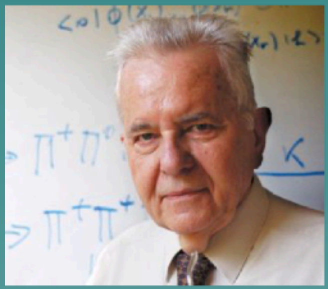
January 29, 2008
vol. 105 no. 4
Table of Contents

PREV ARTICLE NEXT ARTICLE

Don't Miss

Thinking of submitting your next paper to PNAS? Learn tips in our PNAS tutorial videos.

Anche la formazione spontanea degli stormi di uccelli può essere pure studiata in maniera rigorosa e quantitativa



Nicola Cabibbo

Presidente Infn
Presidente Enea
Presidente Accademia Pontificia delle Scienze

Giorgio Parisi

Premio Nobel 2021
Medaglia Boltzmann
Premio Dirac
Vice-Presidente Accademia dei Lincei

Il Nobel a Giorgio Parisi nel 2021

Physics | The Nobel Prize in Physics 2021 | Giorgio Parisi - Facts

The Nobel Prize in Physics 2021

Syukuro Manabe
Klaus Hasselmann
Giorgio Parisi

Share this

Giorgio Parisi
Facts

© Nobel Prize Outreach.
Photo: Laura Sbarbori

Giorgio Parisi
The Nobel Prize in Physics 2021

Born: 4 August 1948, Rome, Italy

Affiliation at the time of the award: Sapienza University of Rome, Rome, Italy

Prize motivation: “for the discovery of the interplay of disorder and fluctuations in physical systems from atomic to planetary scales”

Prize share: 1/2

Modello di Kuramoto

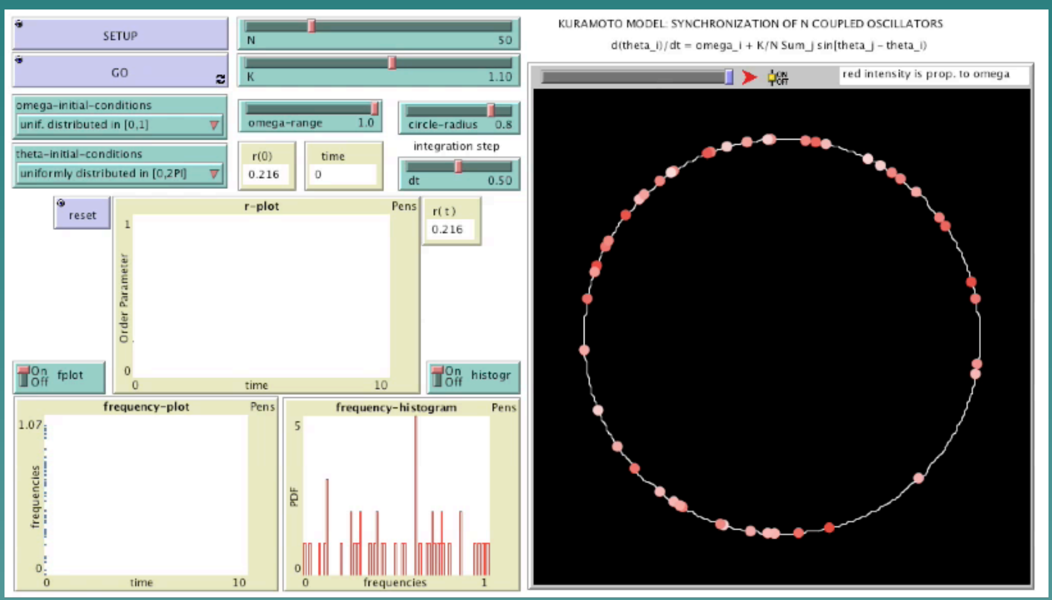
N oscillatori accoppiati

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i) \qquad i = 1, \ldots, N$$

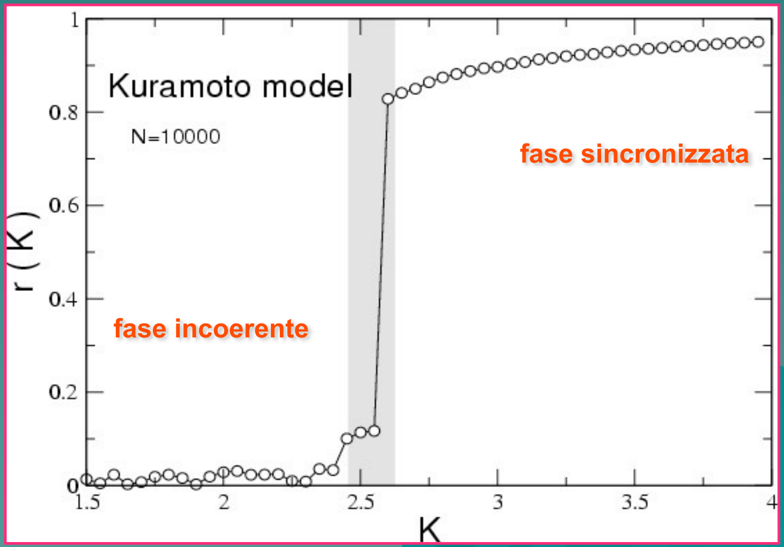
parametro d'ordine

$$re^{i\Psi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}$$

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + Kr\sin(\Psi - \theta_i)$$



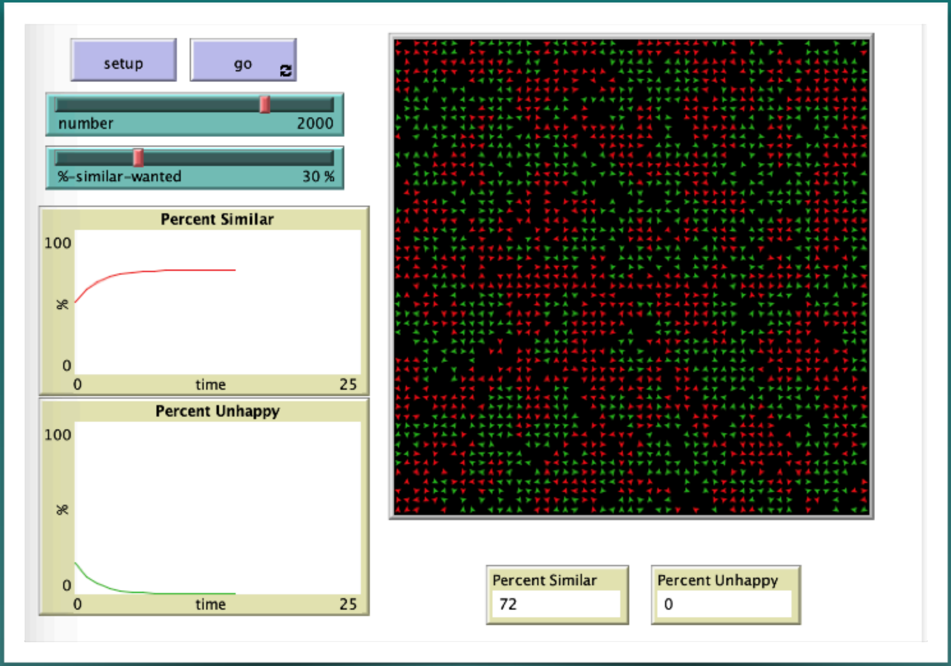
Transizione di fase

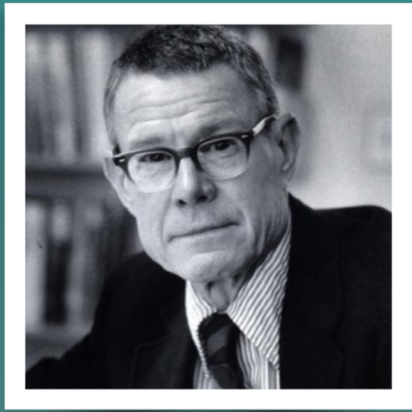


Il fenomeno dell'emergenza

Come può nascere la segregazione sociale

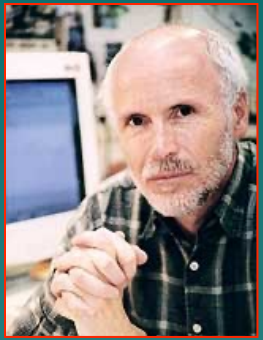
Partendo da 2 tipi di popolazioni, basta indicare una minima richiesta di desiderare un 30% di individui simili come vicini, per creare agglomerati macroscopici di aree abitate da individui della stessa popolazione

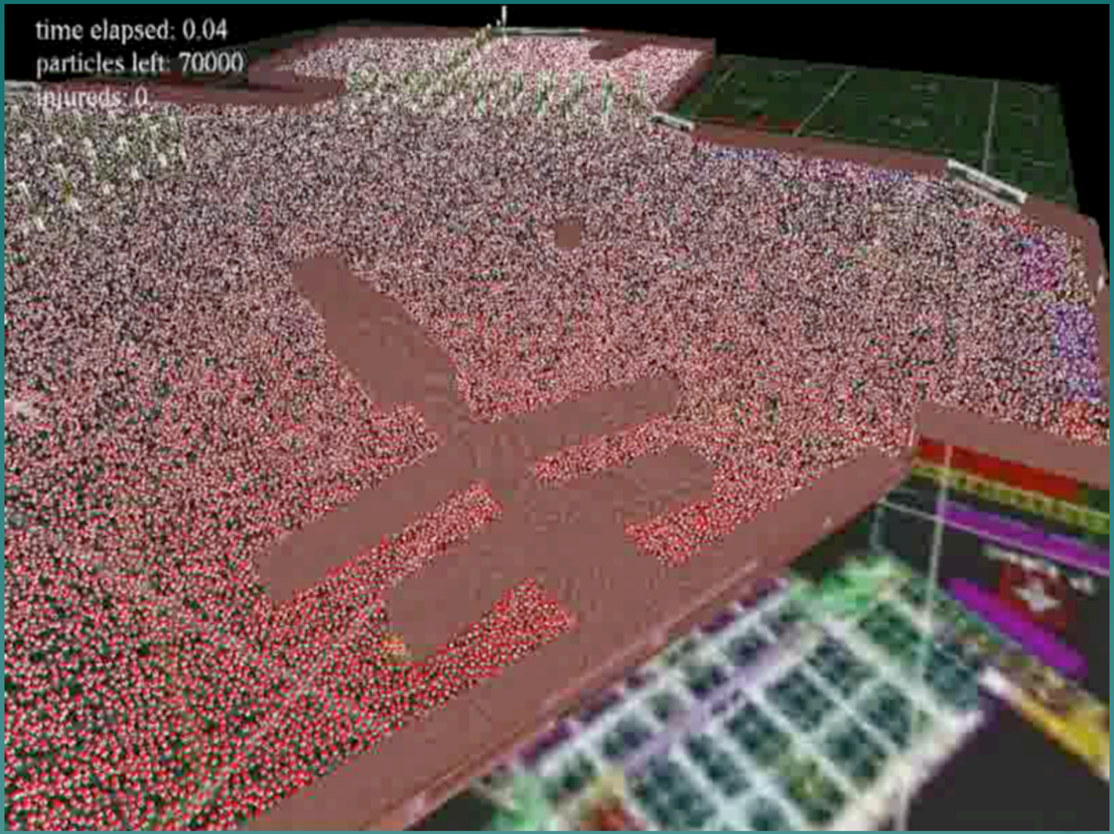




Thomas Schelling (1921-2016) Economista americano premio Nobel per l'Economia nel 2005 per i suoi contributi alla teoria dei giochi

Capire la mobilità umana per prevenire i disastri dovuti al panico

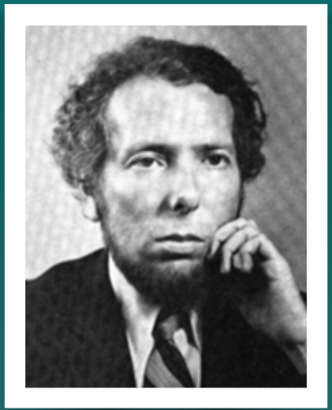




Dirk **Helbing**, Illes J. **Farkas**, and Tamas **Vicsek**: Simulating dynamical features of escape panic. *Nature* **407**, 487-490 (2000).

http://www.tu-dresden.de/vkiwv/vwista/Pedestrians/ http://angel.elte.hu/~panic/

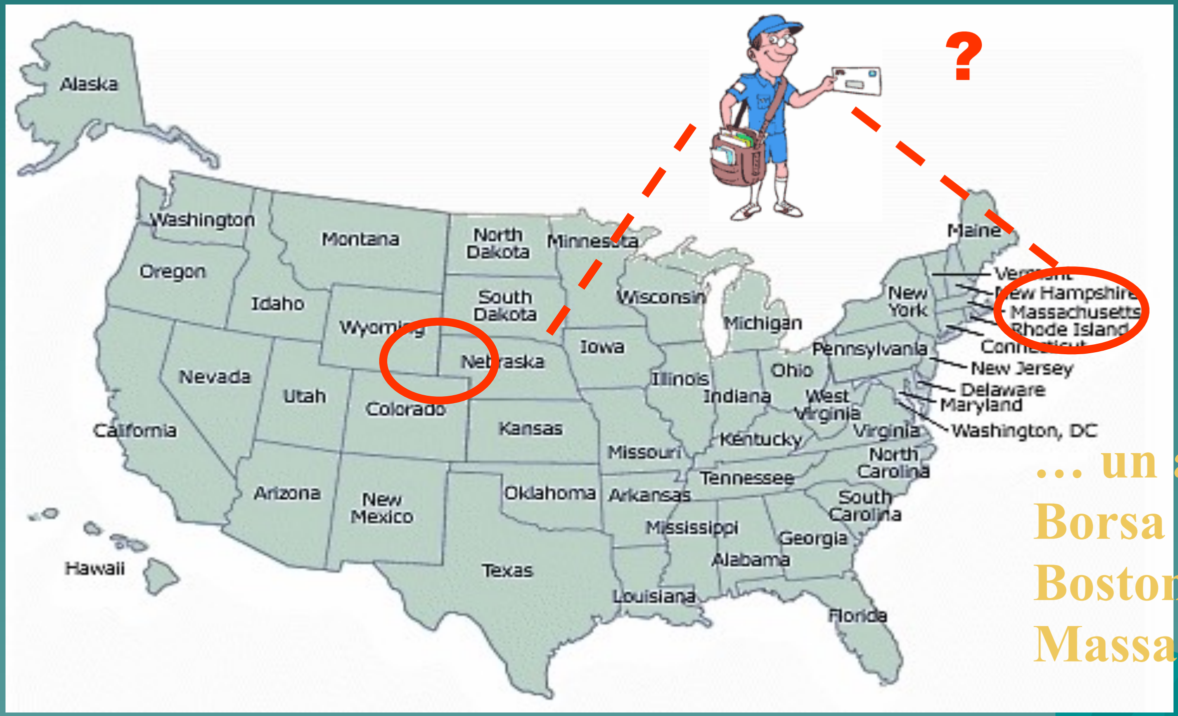
I 6 gradi di separazione



Stanley Milgram (1933–1984)
Psicologo americano

L'esperimento di Stanley Milgram (Harvard, anni '60)

160 persone prese a caso ad Omaha, Nebraska…



… un agente di Borsa di Boston, Massachussets

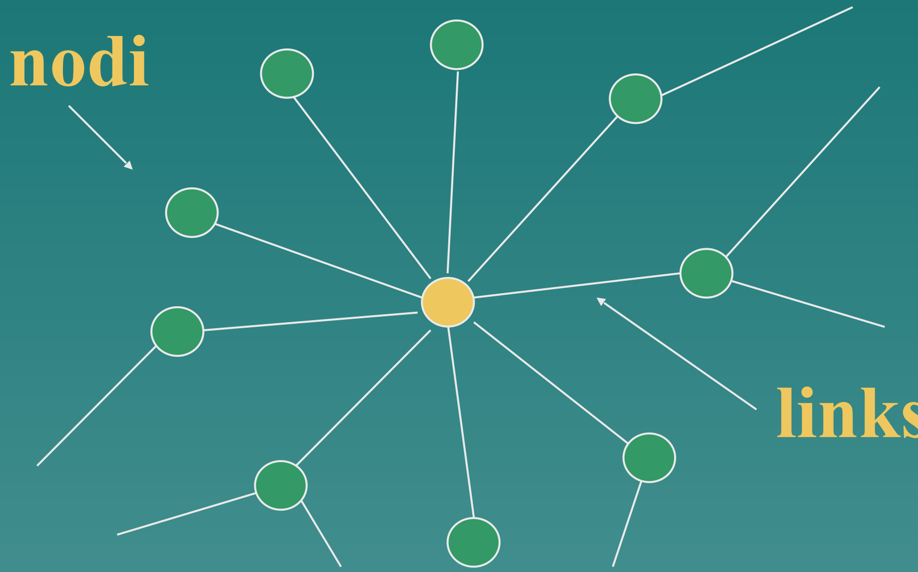
Il nuovo paradigma delle reti

L'oracolo di Bacon per il calcolo del numero di Kevin Bacon nella rete degli attori

https://www.oracleofbacon.org/

Ma Kevin Bacon… non ha un ruolo più importante di altri… nella rete degli attori.
Si può ripetere la stessa cosa con qualsiasi altro attore !

Cosa sono le reti o i grafi



Un sistema sociale o in generale un sistema complesso si può rappresentare tramite una rete o un grafo

6 gradi di separazione

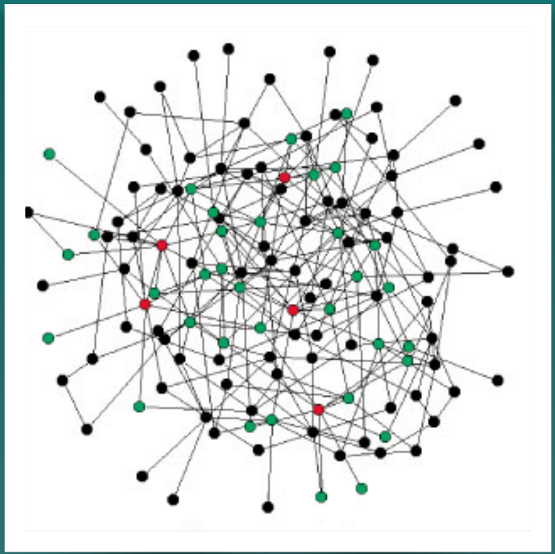
La rete degli attori così come altre reti sociali è un “piccolo mondo” o meglio uno small-world !

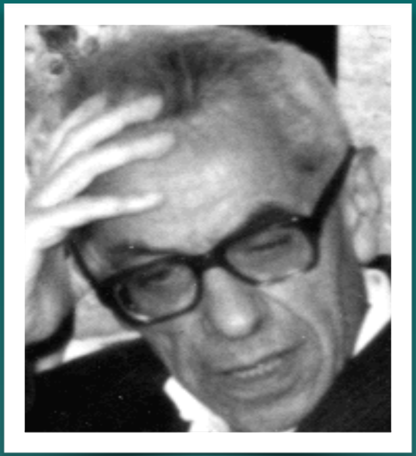
Cerchiamo di capire come si ottiene questo fenomeno e quanto sia generale.

Supponendo che ogni persona conosca 50 persone diverse ecco quante persone posso raggiungere in soli 6 passaggi

1	50	
2	50^2	2,500
3	50^3	125,000
4	50^4	6,250,000
5	50^5	312,500,000
6	50^6	15,625,000,000

I Grafi casuali



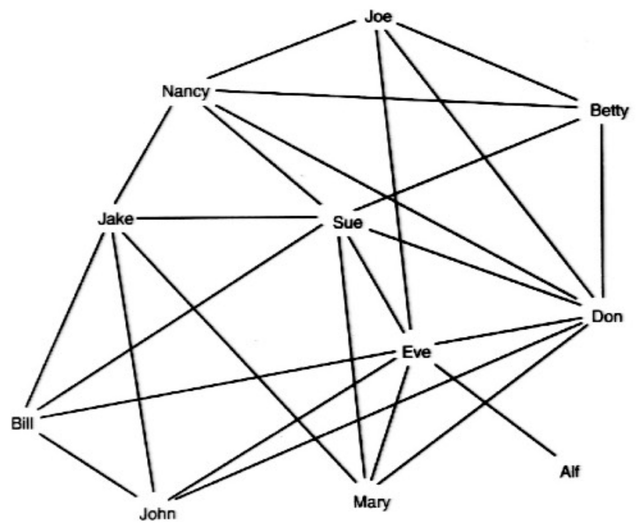


Pál Erdös
(1913-1996)

I grafi casuali posseggono la proprietà di *piccolo mondo*…

…ma manca loro un'altra essenziale proprietà delle reti sociali…

In una vera rete sociale i nostri amici sono spesso amici tra di loro!



Rete sociale che mostra i legami di conoscenza tra undici amici.

Quello che manca alle reti casuali è:

l'aggregazione!

Reti "small world"

Nel 1998 Watts e Strogatz (USA) scoprono le reti "small world" ("piccolo mondo") tra ordine e caos!

Duncan Watts

Steven Strogatz

rete ordinata

rete casuale

Ha una forte aggregazione,
…ma non è un 'piccolo mondo'

E' un 'piccolo mondo'.
…ma non ha aggregazione

Modello di Watts-Strogatz

Le reti che stanno tra quelle casuali e quelle ordinate pur essendo 'piccoli mondi' mostrano una forte aggregazione!

Per passare da una rete ordinata a quella di un piccolo mondo, basta far diventare solo alcuni legami a breve raggio a lungo raggio

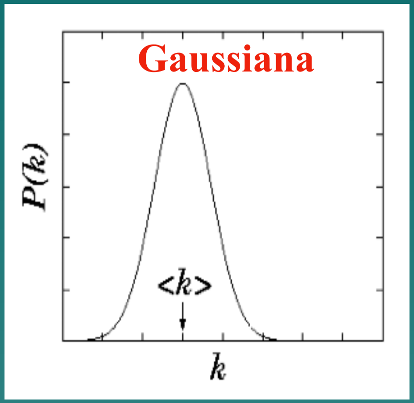
Reti scale-free

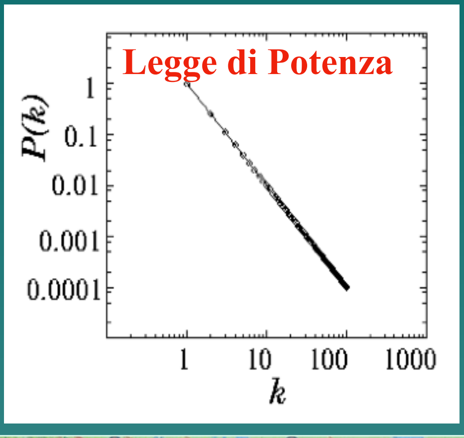
Rete random

Distribuzioni

dei links

Rete scale-free

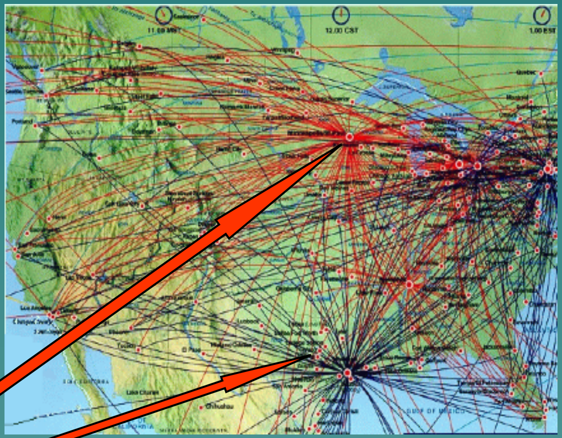




L.Barabàsi

(USA)

Reti Egualitarie: hanno una scala caratteristica

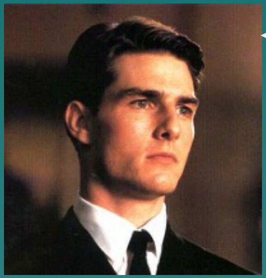


"hub", nodi iperconnessi

Reti Aristocratiche: sono prive di scala (scale free)

NETWORK DEGLI ATTORI

Nodi: attori
Links: film comuni

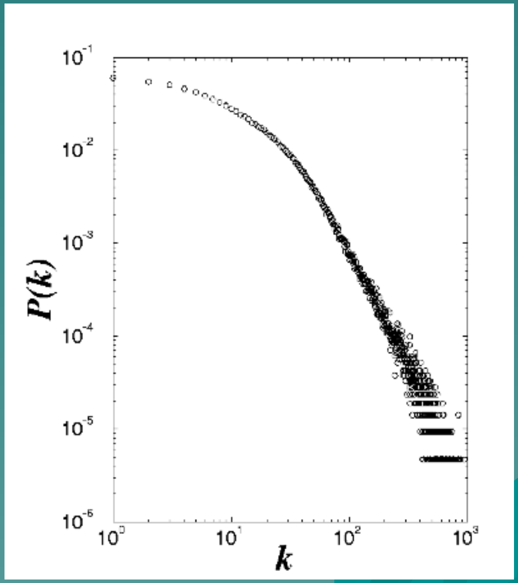


Days of Thunder (1990)
Far and Away (1992)
Eyes Wide Shut (1999)

N = 212,250 actors
$\langle k \rangle = 28.78$

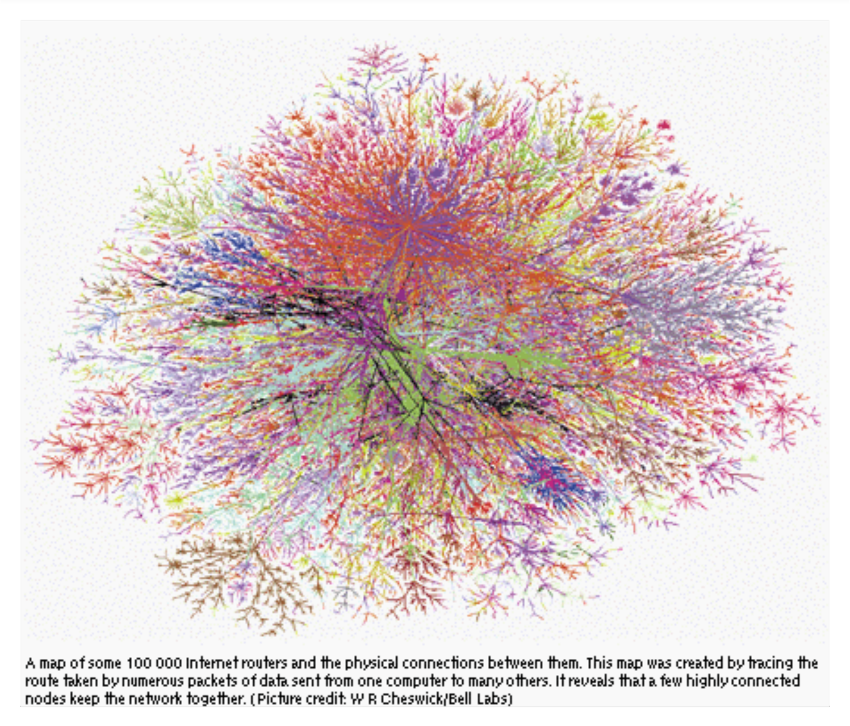
$P(k) \sim k^{-c}$

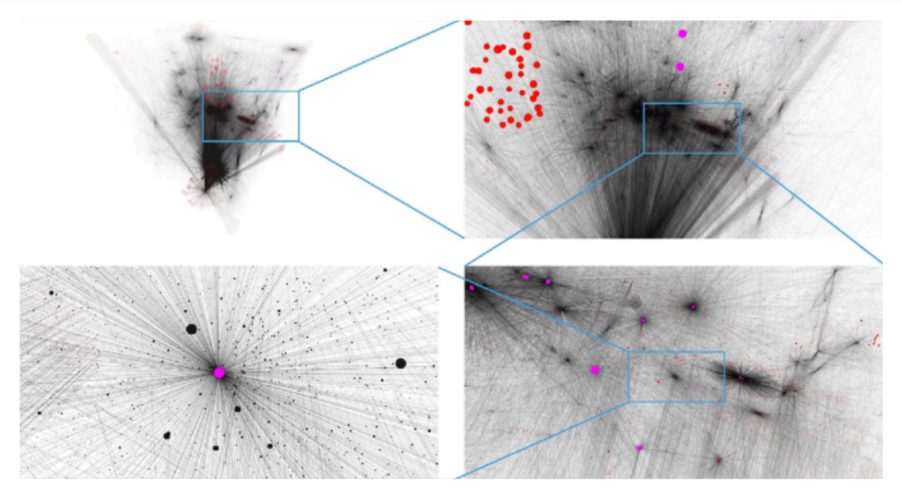
c=2.3



Reti di computers e di documenti virtuali

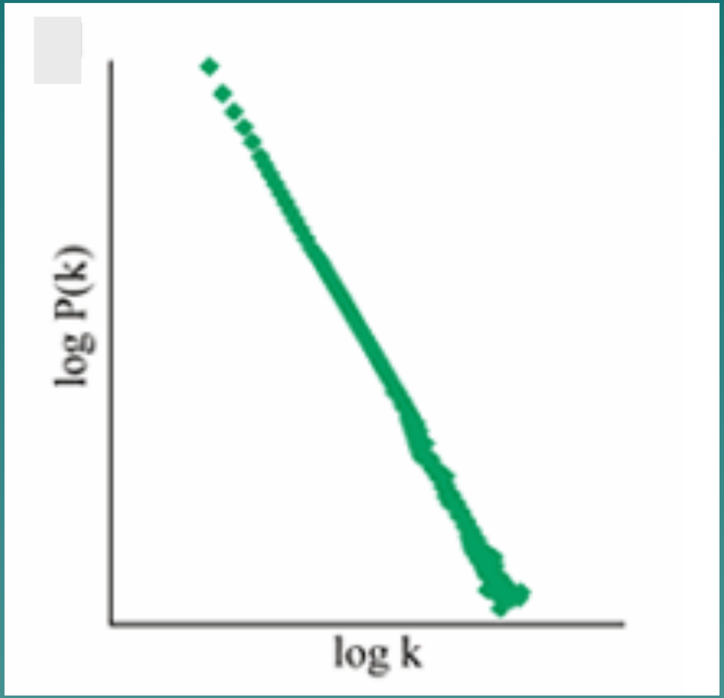
Anche internet o il world-wide-web sono reti scale-free, ovvero con invarianza di scala

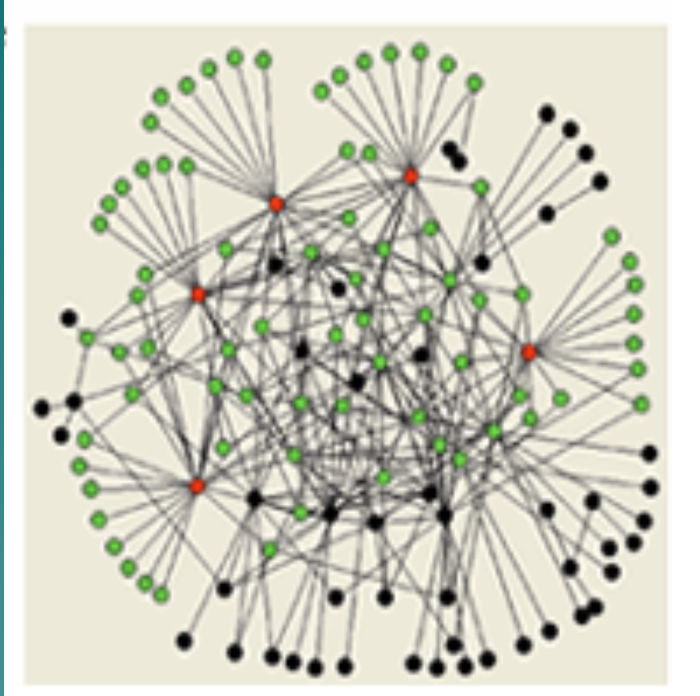




Snapshots of the World Wide Web sample mapped out by Hawoong Jeong in 1998 [1]. The sequence of images show an increasing- ly magnified local region of the network. The first panel displays all 325,729 nodes, offer- ing a global view of the full dataset. Nodes with more than 50 links are shown in red and nodes with more than 500 links in purple.

Moltissime reti reali in diversi contesti presentano la stessa struttura: ovvero sono reti prive di scala!





Ma come si formano queste reti?

Aggregazione preferenziale

Una regola semplice è quella dell'aggregazione preferenziale, trovata da Barabasi

"I ricchi diventano sempre più ricchi"
oppure
"I famosi sempre più famosi"

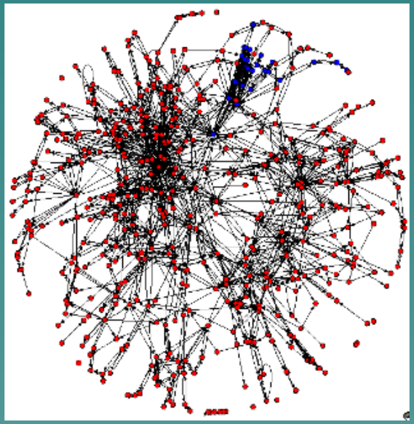
Con questa semplice regola si generano spontaneamente sia l'autosomiglianza che la legge di potenza!

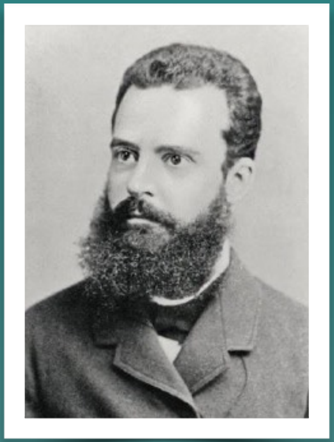
Un esempio in campo economico

LA LEGGE DI PARETO E LA SPEREQUAZIONE DELLA RICCHEZZA

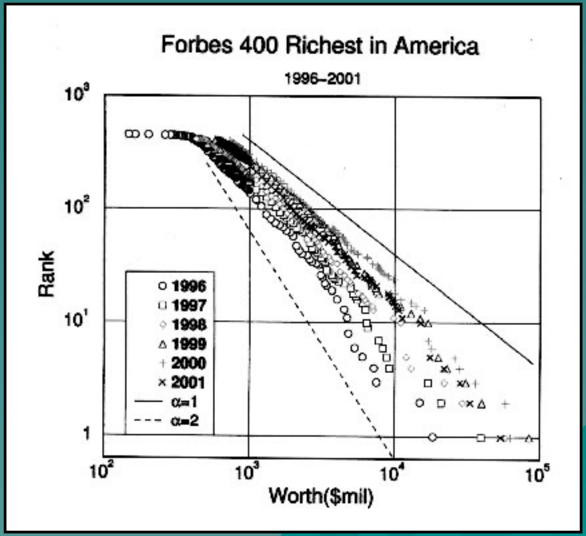
Il ricco diventa sempre più ricco! La sperequazione non dipende dalle capacità o dal talento nel "far soldi" dei singoli individui ma emerge spontaneamente come caratteristica organizzativa della rete

Rete della ricchezza





Vilfredo Pareto (1848-1923)

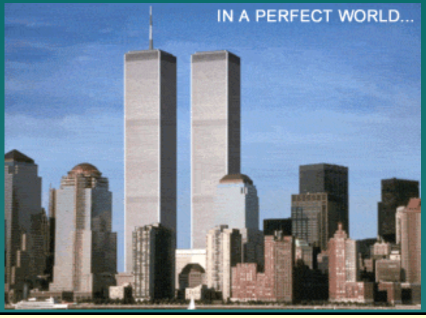


ATTACCHI, GUASTI E CONTAGIO

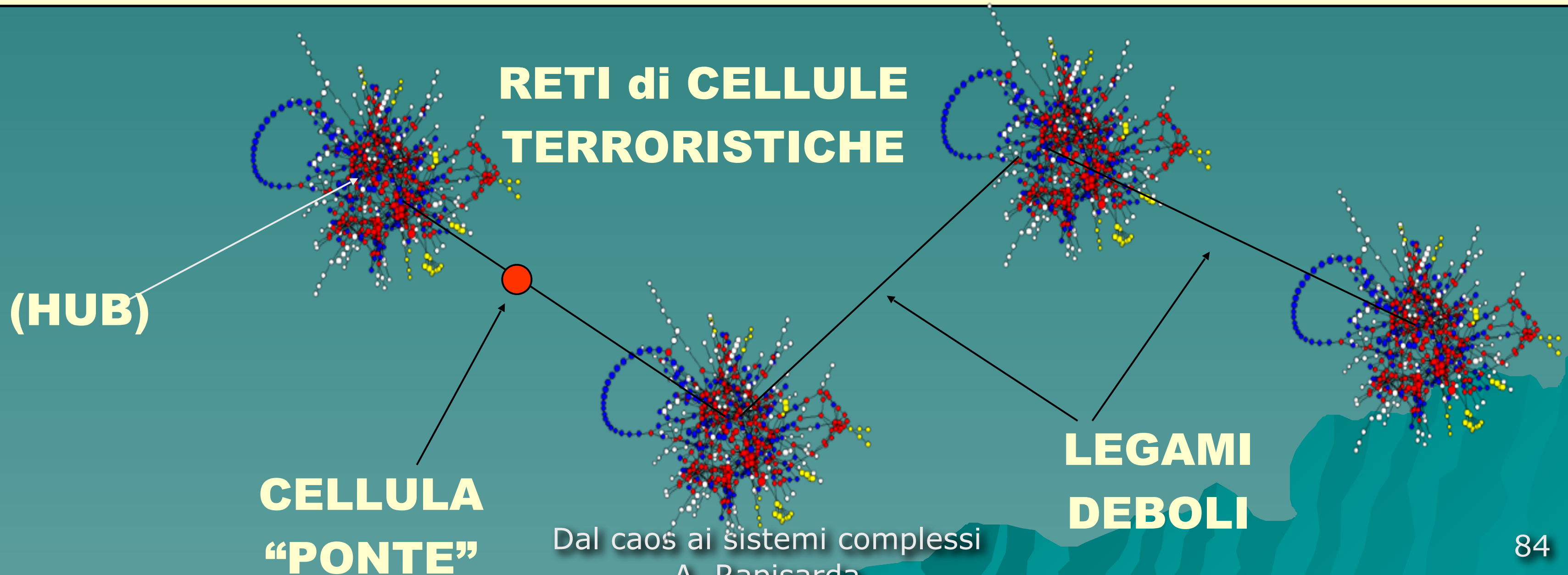
- La struttura topologica dei *networks* è molto importante ai fini della risposta della rete ad errori o guasti casuali e ad attacchi mirati.
- Le reti scale-free sono molto robuste rispetto ai guasti casuali in confronto a quelli con struttura casuale, ma sono molto fragili per attacchi mirati (hakers, ecc.)
- Anche la diffusione di virus e malattie dipende in maniera molto sensibile dalla struttura topologica delle reti.
- Per reti scale-free come il Web o internet non esiste una soglia critica per la diffusione.
- Questo spiega perché è molto difficile eliminare del tutto un virus dalla rete.
- Questi studi sono fondamentali per capire e contenere la diffusione di malattie contagiose, ad esempio per cercare di arrestare la diffusione dell'Aids in Africa o anche per combattere reti terroristiche o per capire come funzionano i mercati finanziari

Attacchi terroristici

Come purtroppo sappiamo bene, attacchi terroristici mirati agli hub della nostre reti sociali, economiche di trasporto ed informatiche possono produrre gravissime conseguenze



D’altra parte la conoscenza delle proprietà strutturali delle reti potrebbe aiutarci nel tentativo di neutralizzare le reti di cellule terroristiche decentrate. In questa prospettiva eliminare il capo della rete potrebbe essere inutile, mentre per disgregare il sistema potrebbe essere molto più efficace agire sulle cellule ponte.



Diffusione dell'epidemia suina H1N1 del 2009

La predizione della diffusione dell'epidemia suina H1N1 del 2009, è la prima predizione in tempo reale di una pandemia (1). Il progetto, basandosi su dati che descrivono la struttura e la dinamica di una rete di trasporto mondiale, è riuscito a predire il picco della H1N1 per Ottobre 2009, rispetto al picco dell'influenza che si aspettava per Gennaio - Febbraio. Questo implicava che i vaccini predisposti per Novembre 2009 sarebbero stati troppo tardivi ed avrebbero avuto poco impatto sulla epidemia. Il successo di questo progetto mostra la potenza della scienza delle reti complesse in area di grande importanza per il genere umano.

(1) **A. Vespignani et al.**, *Seasonal transmission potential and activity peaks of the new influenza A(H1N1): a Monte Carlo likelihood analysis based on human mobility,* **BMC Medicine, 7: 45, 2009**.

Predire e contenere le epidemie ed altri eventi sociali

Seminario di Alessandro Vespignani alla SSC di Catania

Link

Meccanica Statistica generalizzata

Journal of Statistical Physics, Vol. 52, Nos. 1/2, 1988

Possible Generalization of Boltzmann–Gibbs Statistics

Constantino Tsallis[1]

Received November 12, 1987; revision received March 8, 1988

With the use of a quantity normally scaled in multifractals, a generalized form is postulated for entropy, namely $S_q \equiv k[1-\sum_{i=1}^{W} p_i^q]/(q-1)$, where $q \in \mathbb{R}$ characterizes the generalization and $\{p_i\}$ are the probabilities associated with W (microscopic) configurations ($W \in \mathbb{N}$). The main properties associated with this entropy are established, particularly those corresponding to the microcanonical and canonical ensembles. The Boltzmann–Gibbs statistics is recovered as the $q \to 1$ limit.

KEY WORDS: Generalized statistics; entropy; multifractals; statistical ensembles.

Entropia generalizzata

$$S_q = \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q-1}$$

si riduce a quella di Boltzmann per q->1

Ma è nonestensiva e non-additiva

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B)$$

é massimizzata dalla generalizzazione del peso di Boltzmann (q-esponenziale)

$$e_q(-E/kT) = \left[1-(1-q)\frac{E}{kT}\right]^{\frac{1}{1-q}} \to e^{-\frac{E}{kT}} \quad \text{per} \quad q \to 1$$

Constantino Tsallis is a Professor of Physics, Head of the National Institute of Science and Technology for Complex Systems of Brazil, Emeritus Researcher at the Brazilian Center for Research in Physics, and External Faculty at the Santa Fe Institute, New Mexico. He obtained in 1974 his Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques at the University of Paris-Orsay, and has been honoured with Doctor Honoris Causa in several countries, among other Brazilian and international prizes and distinctions. He has published over 300 articles and books, and proposed in 1988 a generalisation of Boltzmann–Gibbs entropy and statistical mechanics.

Meccanica Statistica generalizzata

Questo formalismo generalizzato trova applicazioni in tantissimi esempi di sistemi complessi

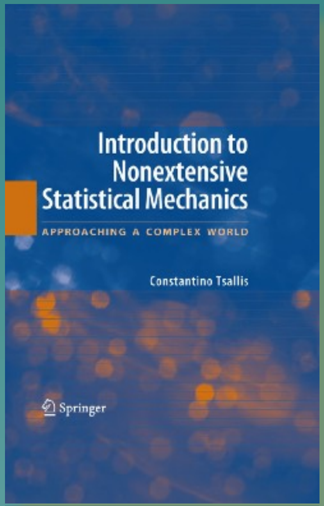
Atomi a bassa temperatura — P. Douglas, S. Bergamini and F. Renzoni, Phys Rev Lett 96, 110601 (2006)

Collisioni di alta energia — Wilk et al PRL 84 (2000) 2770, Beck Physica A 286 (2000) 164; Bediaga, Curado, De Miranda , Physica A 286 (2000) 156

Raggi Cosmici — C. Tsallis, J.C. Anjos and E.P. Borges, Phys. Lett. A 310 (2003) 372.

Sistemi biologici — Upaddhyaya et al Physica A 293 (2001) 549

Sistemi alla soglia del caos — V.Latora, M.Baranger, A. Rapisarda and C.Tsallis, Phys. Lett. A 273 (2000) 97; U. Tirnakli, Phys. Rev. E 66;(2002) 066212; E.P. Borges, C. Tsallis,G.F.J. Ananos, P.M.C. de Oliveira, Phys. Rev. Lett. 25 (2002) 254103.



Meccanica Statistica generalizzata

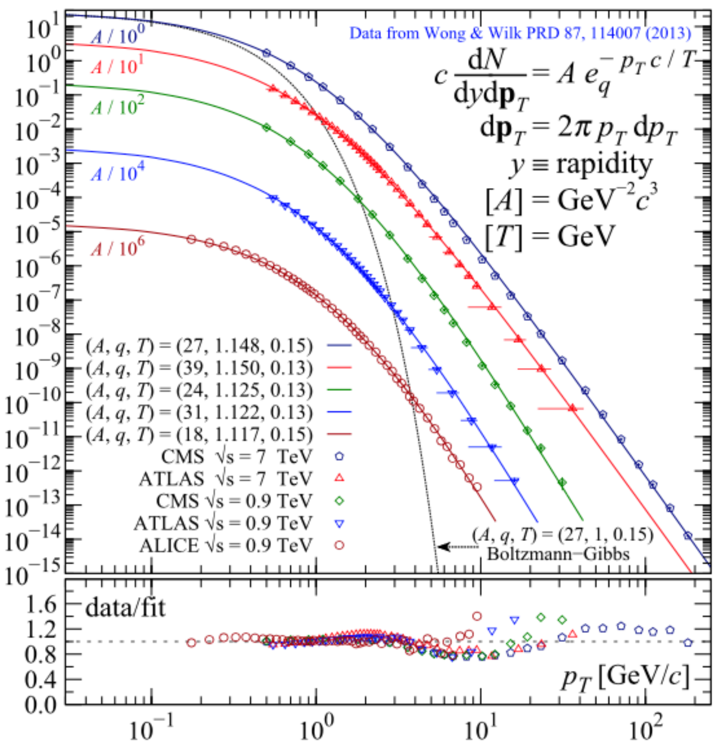
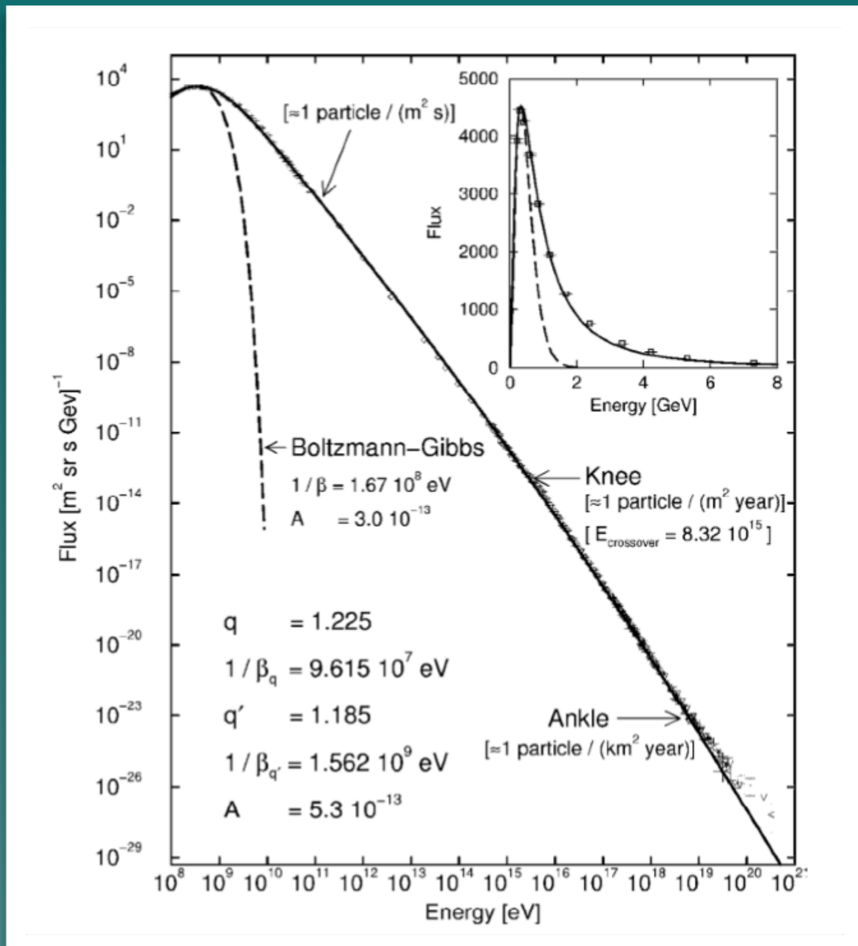


Figure 14. The distribution of hadronic transverse momenta in various experiments of proton–proton collisions. The data are taken from [97]. The continuous curves are simple q-exponentials. From the region with probability close to one on, the present $q \simeq 1.1$ curves depart from the BG ($q = 1$) ones. If we start counting from that point on, the remarkable agreement continues along 14 decades. Reproduced by permission of C. Tsallis. From [98].

Distribuzioni di velocità per reazioni fra protoni di alta energia misurati al CERN di Ginevra

[97] C.Y. Wong and G. Wilk, *Tsallis fits to p_T spectra and multiple hard scattering in pp collisions at the LHC*, Phys. Rev. D 87 (2013), p. 114007.
[98] L.J.L. Cirto, C. Tsallis, C.Y. Wong and G. Wilk, *The transverse-momenta distributions in high-energy pp collisions – A statistical-mechanical approach* (2014).

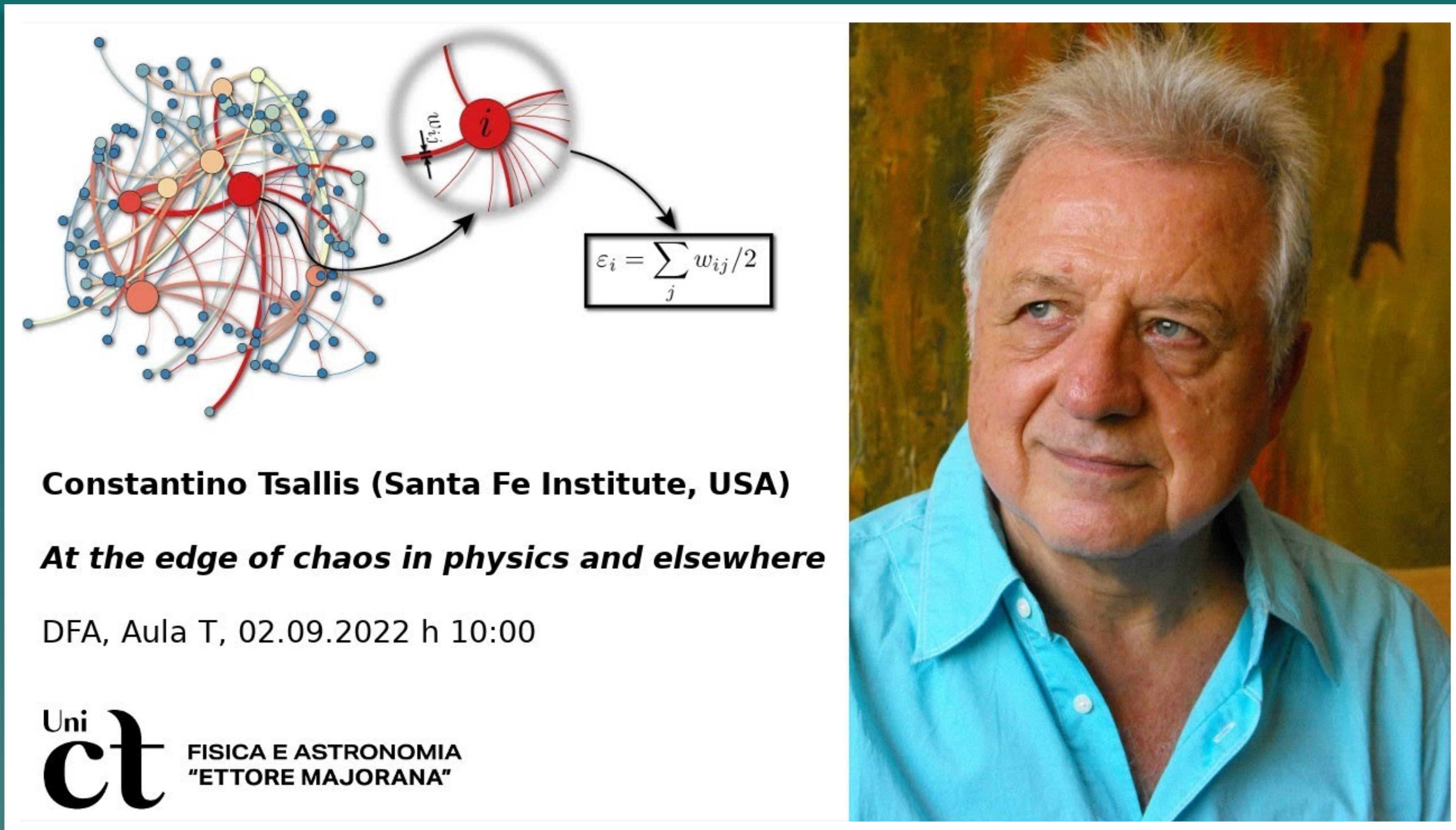
Meccanica Statistica generalizzata



Flusso di raggi cosmici in funzione dell'energia

Tsallis Anjos Borges, PLA 310,372 (2003)

Meccanica Statistica generalizzata



Link al seminario

Conclusioni

- I fenomeni che abbiamo visto non si limitano solo ai sistemi fisici, ma in maniera interdisciplinare interessano pure altri campi quali la Biologia, L'Economia, La Geologia, L'Informatica, L'Ingegneria, Le Scienze sociali, La Psicologia.

- I fisici oggi trovano lavoro un pò ovunque per la flessibilità della loro forma mentis e per il rigore del metodo scientifico. L'uso dei moderni calcolatori elettronici ha poi reso fattibile quello che solo pochi decenni fa sembrava fantascienza.

- Tecniche statistico-matematiche rendono oggi possibile lo studio di enormi database o serie temporali (DNA, sequenze di terremoti, sequenze di dati finanziari) alla scoperta di ordine dove a prima vista regna solo un rumore di fondo. Capire queste strutture elusive e complesse, sfruttarle per carpire la semplicità nascosta dentro la complessità apparente è la sfida della fisica contemporanea che sta portando oggi ad un nuovo modo di fare scienza, in maniera sempre più interdisciplinare e consapevole ed allo stesso tempo con importanti ricadute applicative.

-

Conclusioni

- Mentre Galileo studiava il pendolo considerandolo come un sistema isolato, oggi ci si rende sempre più conto che non è sempre possibile trascurare piccoli dettagli del problema.
- Piccole perturbazioni possono avere un ruolo cruciale se il nostro sistema è prossimo al valore critico. Basta poco per far mutare radicalmente il comportamento e portare il sistema verso un altro regime inaspettato e imprevedibile.
- Questo è tanto più vero quanto più il nostro sistema è composto da parti interconnesse che interagiscono con forze non linerari.
- Il mondo in cui viviamo è un universo dinamico composto da molti elementi, fortemente interconnessi e regolati da leggi non lineari.
- Al di là degli interessi scientifici di ciascuno, sarebbe bene che ogni singolo cittadino fosse profondamente consapevole di tutto questo.

Dove si studia la Complessità

Il Santa Fe Institute for complex systems fondato nel 1984 a Santa Fe da un gruppo Di fisici dei Laboratori di Los Alamos nel New Mexico e diretto un comitato scientifico in cui figurano diversi premi Nobel da Murray Gell-Mann a Phil Anderson

SANTA FE INSTITUTE
Celebrating 20 years of Complexity Science
www.santafe.edu

In Europa vi sono diversi centri in Austria, Francia, Germania, Ungheria

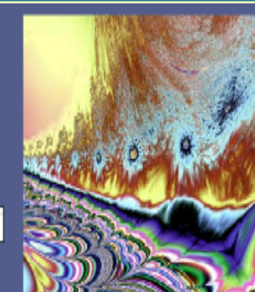
COMPLEXITY SCIENCE HUB VIENNA

https://www.csh.ac.at/

In Italia vi sono diversi gruppi

A Roma c'è l'Istituto dei Sistemi Complessi del CNR

ISC
Istituto dei Sistemi Complessi
http://www.isc.cnr.it



Qui a Catania dal 1991 ci occupiamo di queste tematiche in collaborazione con i più importanti centri di ricerca internazionali

Bibliografia per approfondimenti

- J. Gleick, *CAOS, La nascita di una nuova scienza*, Rizzoli, (2000)
- A. Vulpiani, *Determinismo e Caos* La nuova Italia Scientifica (1994)
- S. Strogatz, Sincronia I ritmi della natura I nostri ritmi, Mondadori (2003)
- M. Buchanan Ubiquità. *Dai terremoti al crollo dei mercati: la nuova legge universale dei cambiamenti* , Mondadori (2003)
- M. Buchanan, *Nexus. Perché la natura, la società, l'economia, la comunicazione funzionano allo stesso modo* Mondadori 2004
- T.A. Bass, *Sbancare Wall Street. Ovvero in che modo una banda di fisici indipendenti è riuscita a far fortuna in Borsa applicando la teoria del caos* , Feltrinelli (2001)
- R Devaney, *Caos e frattali. Matematica dei sistemi dinamici e applicazioni calcolatore* Pearson Education Italia (2001)
- B.B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali. Forma, caso e dimensione* , Einaudi (2000)