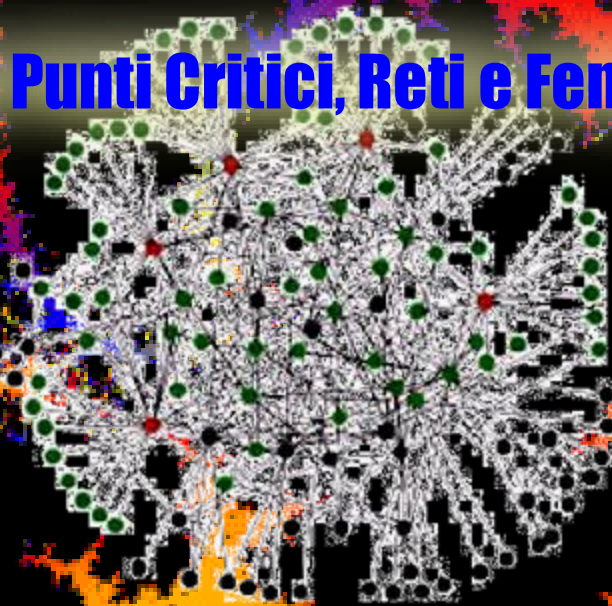


# **Introduzione alla Nuova Scienza della Complessità**

**Simulazioni, Punti Critici, Reti e Fenomeni Emergenti**

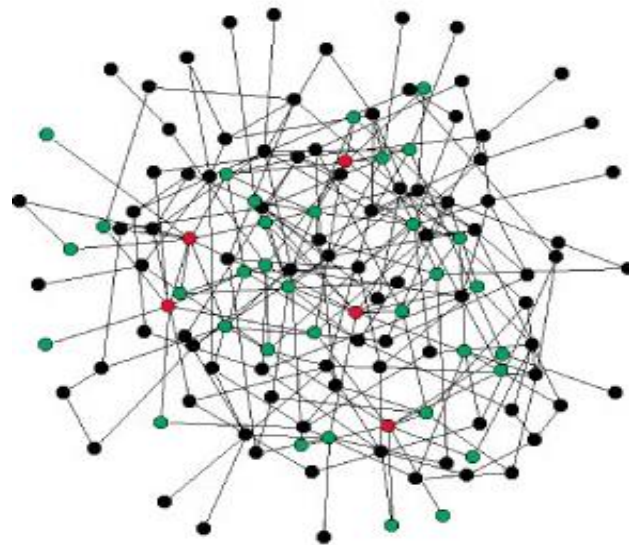


# Due possibili descrizioni di un sistema complesso

Da un punto di vista dinamico è possibile descrivere un sistema complesso come un insieme costituito da numerosi elementi, detti anche “**agenti**” (particelle, cellule, piante, animali, individui, opinioni, automobili, etc...), che **interagiscono** tra loro di solito in maniera **non lineare** spostandosi all’interno di un certo **spazio** (reale o virtuale) e secondo certe regole:



Da un punto di vista topologico (cioè se ci interessa invece sapere “chi interagisce con chi”) è anche possibile descrivere un sistema complesso come una **rete** (network) costituita da un certo numero di **nodi** (particelle, cellule, piante, animali, individui, opinioni, automobili, etc...) collegati tra loro per mezzo di **links** che esprimono delle relazioni tra i nodi:

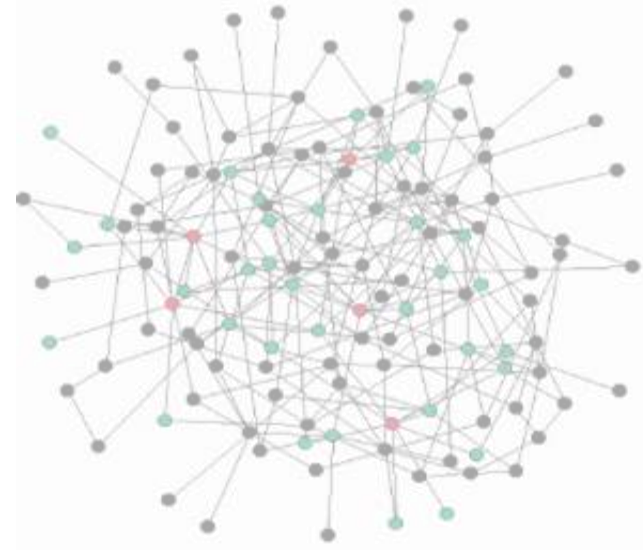


# Due possibili descrizioni di un sistema complesso

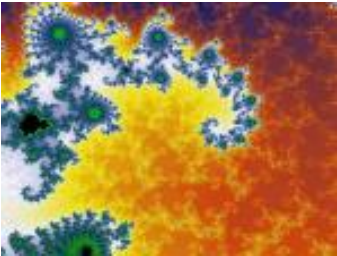
Da un punto di vista dinamico è possibile descrivere un sistema complesso come un insieme costituito da numerosi elementi, detti anche “agenti” (particelle, cellule, piante, animali, individui, opinioni, automobili, etc...), che interagiscono tra loro di solito in maniera non lineare spostandosi all’interno di un certo spazio (reale o virtuale) e secondo certe regole:



Da un punto di vista topologico (cioè se ci interessa invece sapere “chi interagisce con chi”) è anche possibile descrivere un sistema complesso come una rete (network) costituita da un certo numero di nodi (particelle, cellule, piante, animali, individui, opinioni, automobili, etc...) collegati tra loro per mezzo di links che esprimono delle relazioni tra i nodi:



## **Autosimilarità e Invarianza di Scala**



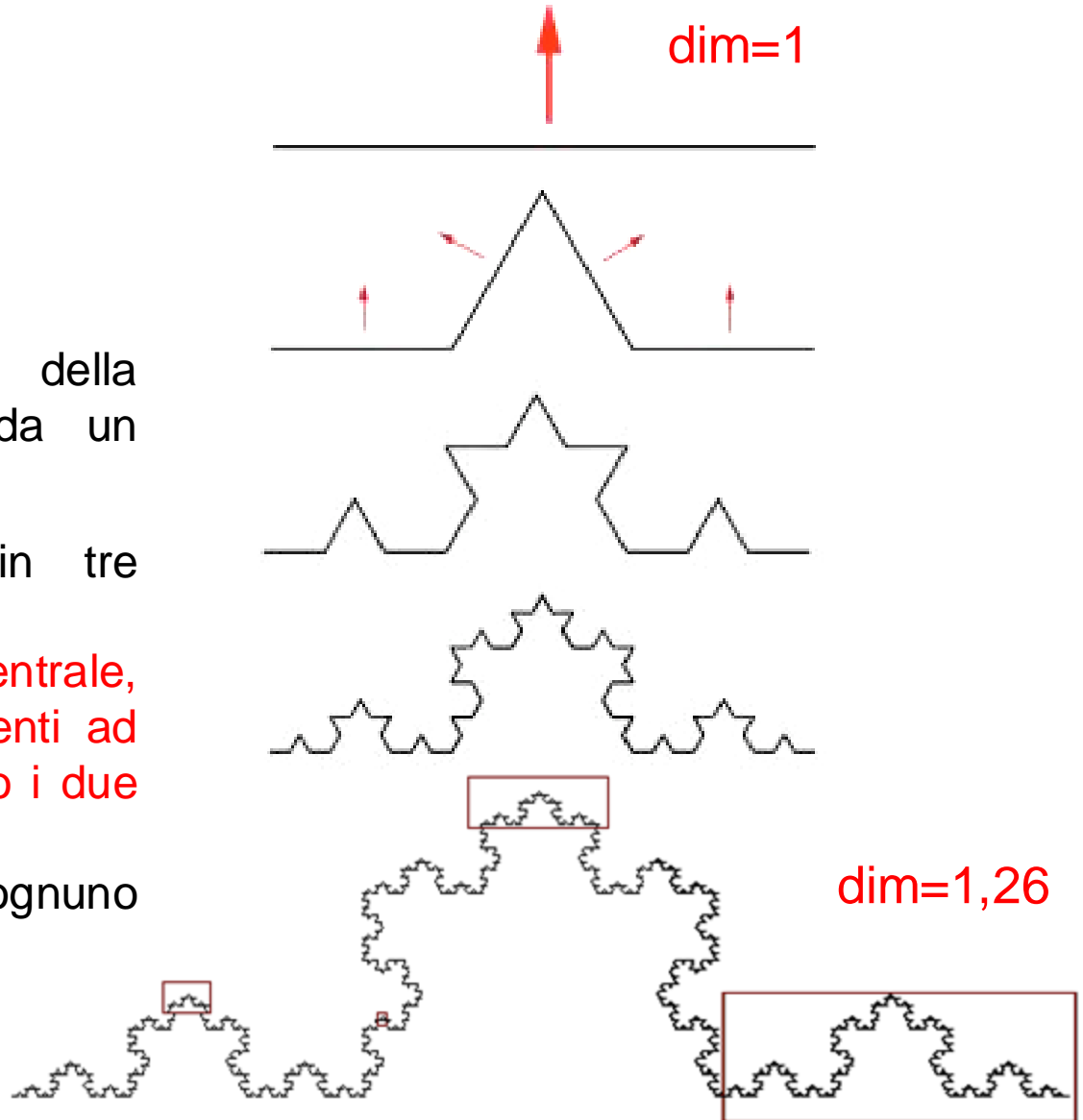
**Proprietà tipiche  
dei sistemi complessi**

# Autosimilarità negli oggetti frattali

## La curva di Koch

Procedura di generazione della curva di Koch a partire da un segmento:

1. dividere il segmento in tre segmenti uguali;
2. cancellare il segmentino centrale, sostituendolo con due segmenti ad esso identici che costituiranno i due lati di un triangolo equilatero;
3. tornare al punto 1 per ognuno degli attuali segmenti.



# L'insieme di Mandelbrot

.  $P_0 \rightarrow$  successione  
divergente

$$P_0 = x + i y$$

$$Z_0 = 0$$

$$Z_1 = Z_0^2 + P_0$$

$$Z_2 = Z_1^2 + P_0$$

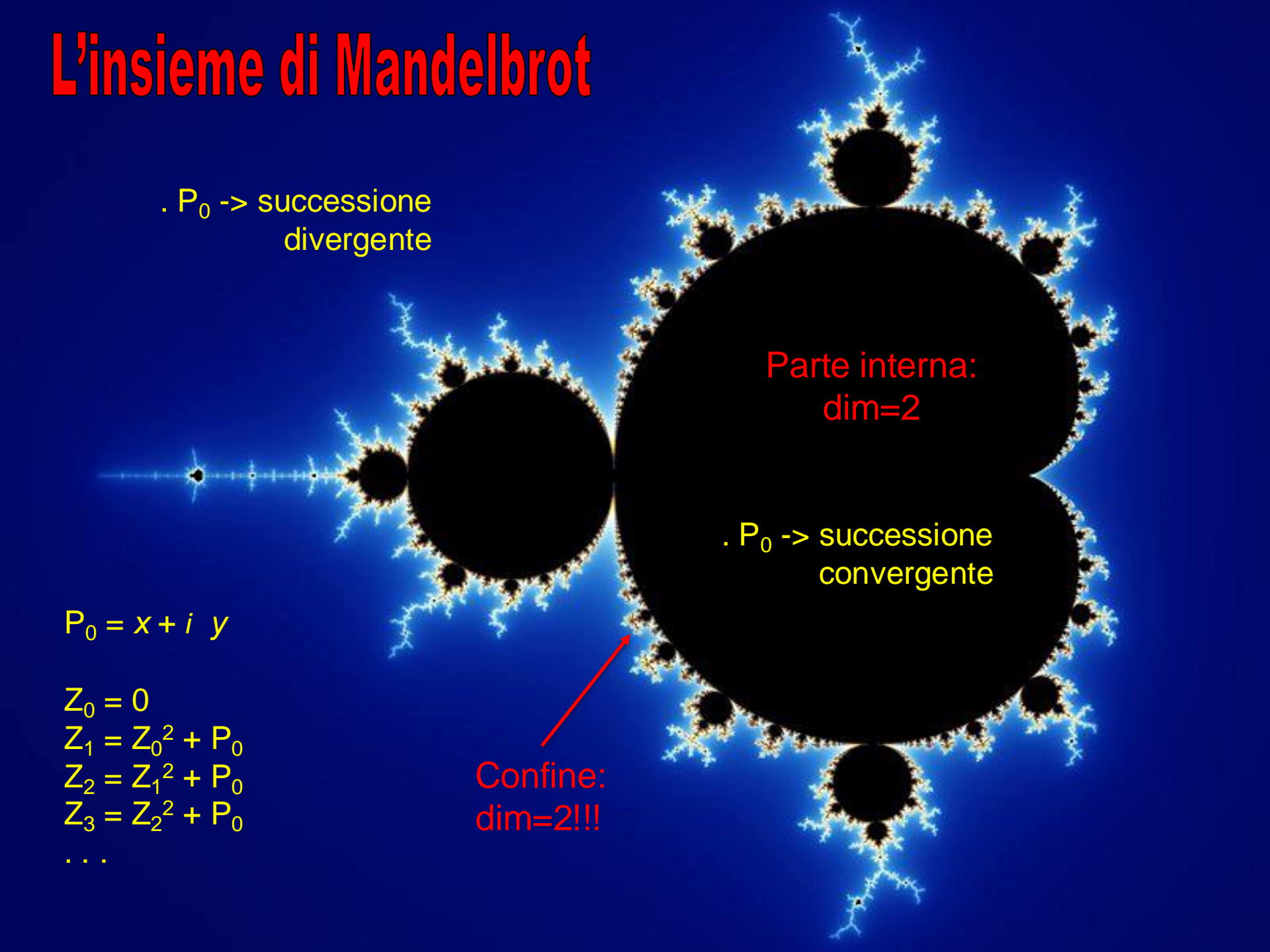
$$Z_3 = Z_2^2 + P_0$$

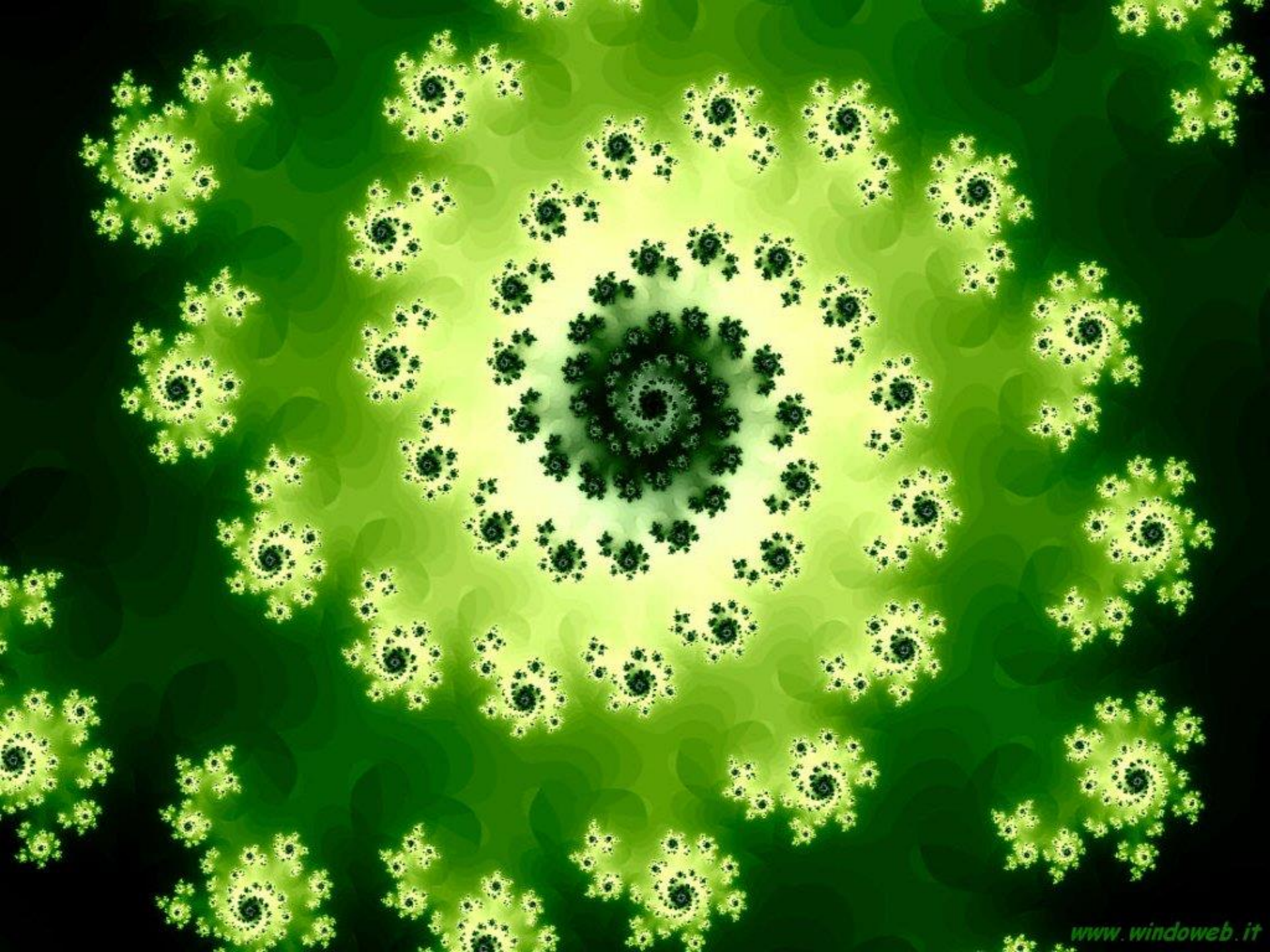
...

Parte interna:  
dim=2

.  $P_0 \rightarrow$  successione  
convergente

Confine:  
dim=2!!!

The image shows the Mandelbrot set, a fractal boundary in the complex plane. It consists of a large central black region with a complex, self-similar, fractal boundary. The interior of this boundary is black, representing the set of complex numbers for which the iterated function  $Z_{n+1} = Z_n^2 + P_0$  converges to a finite limit. The boundary itself is highly detailed and fractal, with a Hausdorff dimension of 2. The exterior of the boundary is white, representing the set of complex numbers for which the iteration diverges to infinity. The fractal is centered at the origin of the complex plane. A red arrow points from the text 'Confine: dim=2!!!' to the fractal boundary.



# Autosimilarità e caos in una dimensione: la Mappa Logistica

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$

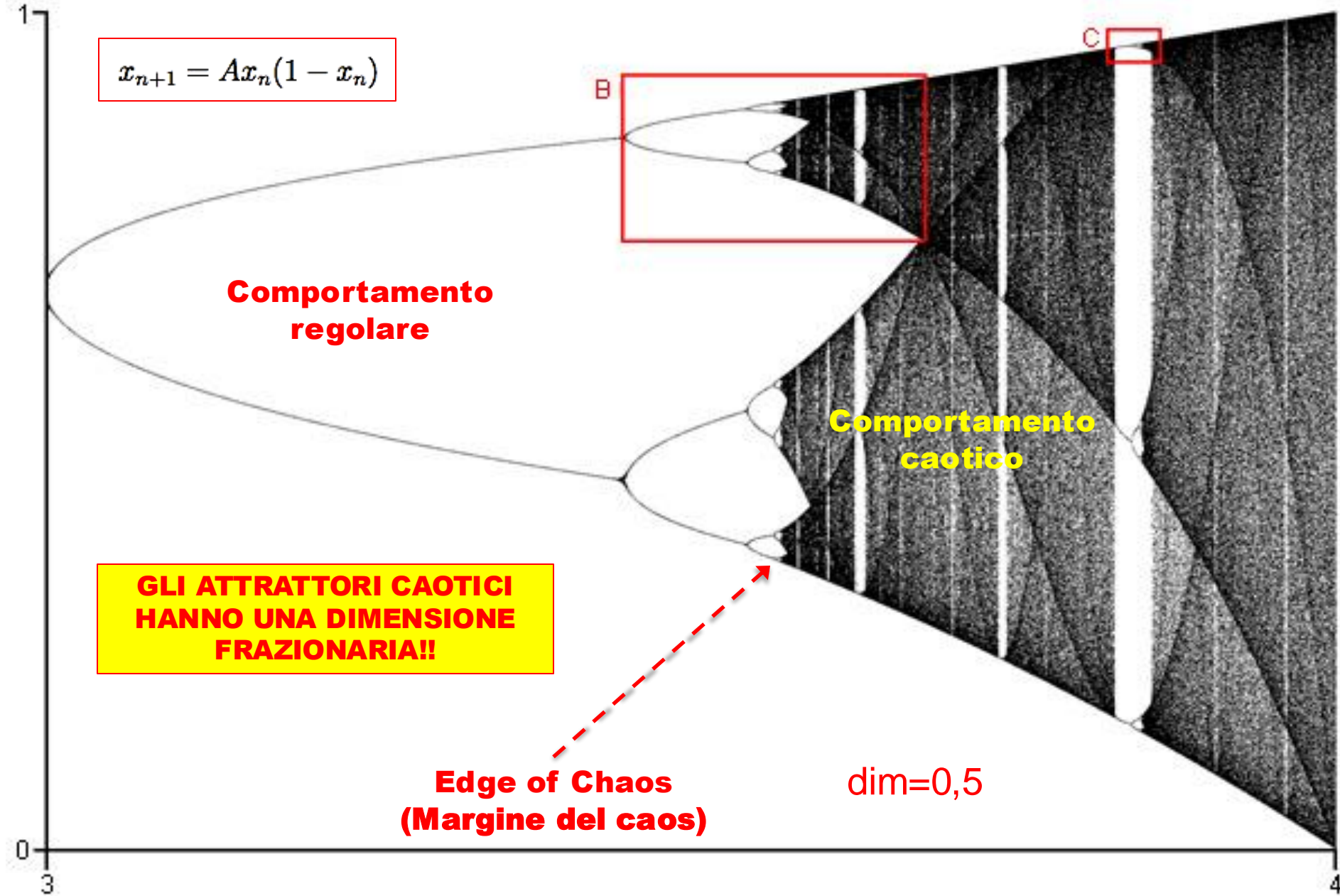
**Comportamento regolare**

**Comportamento caotico**

**GLI ATTRATTORI CAOTICI HANNO UNA DIMENSIONE FRAZIONARIA!!**

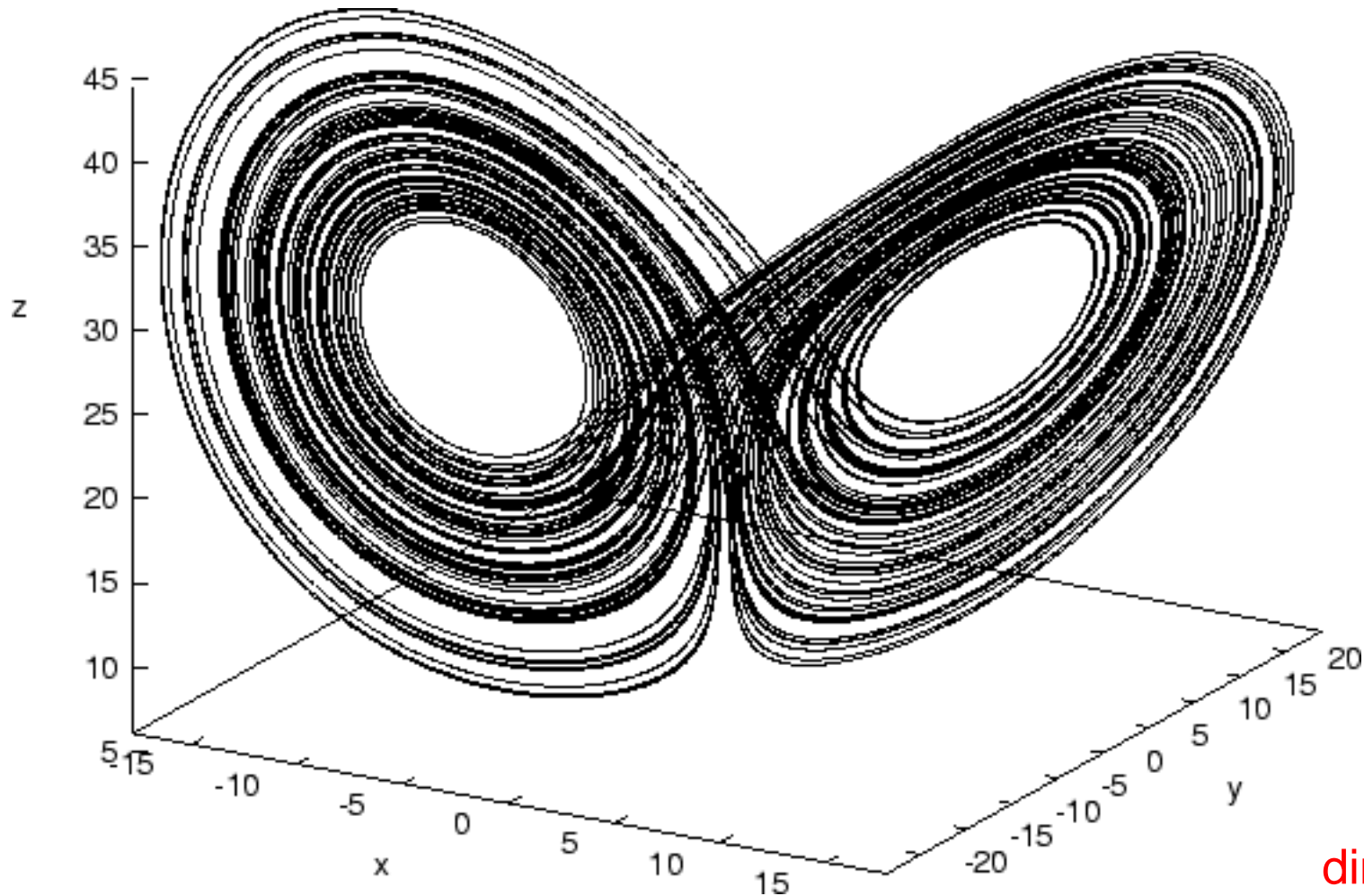
**Edge of Chaos  
(Margine del caos)**

**dim=0,5**





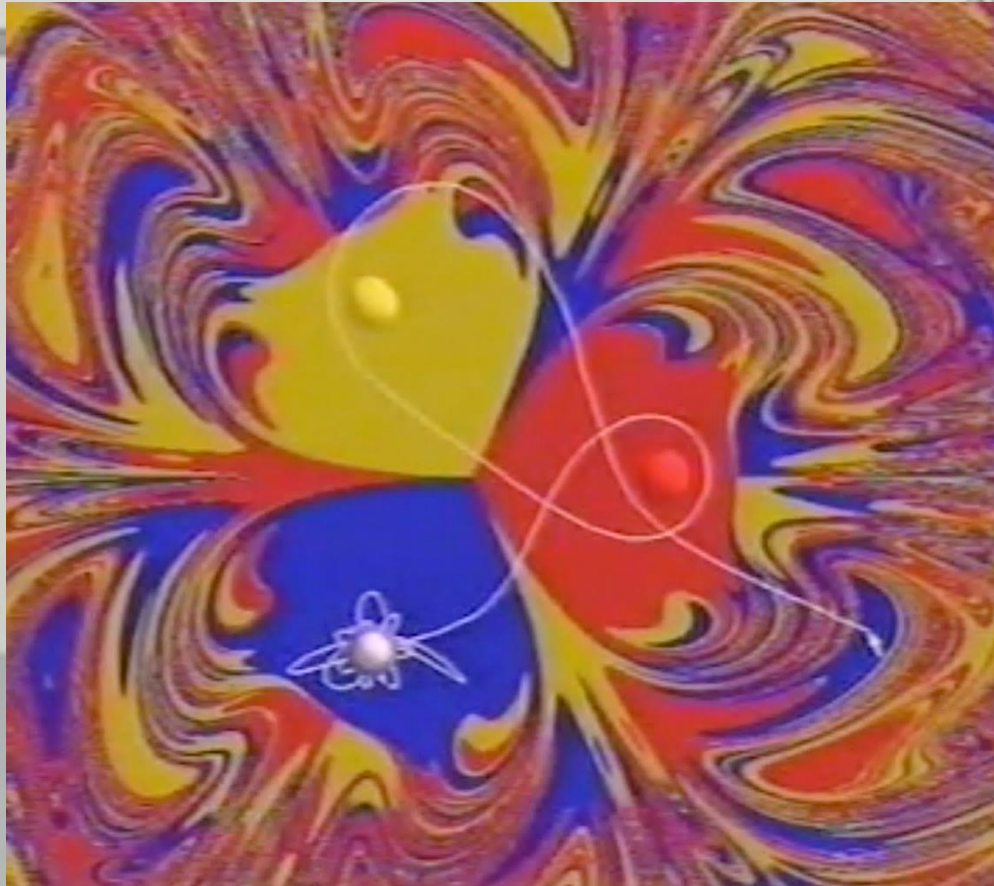
# Autosimilarità e caos in 3 dimensioni: l'Attrattore di Lorenz



$$\begin{aligned}x' &= 10(y - x) \\y' &= -xz + 13x - y \\z' &= xy - (8/3)z\end{aligned}$$

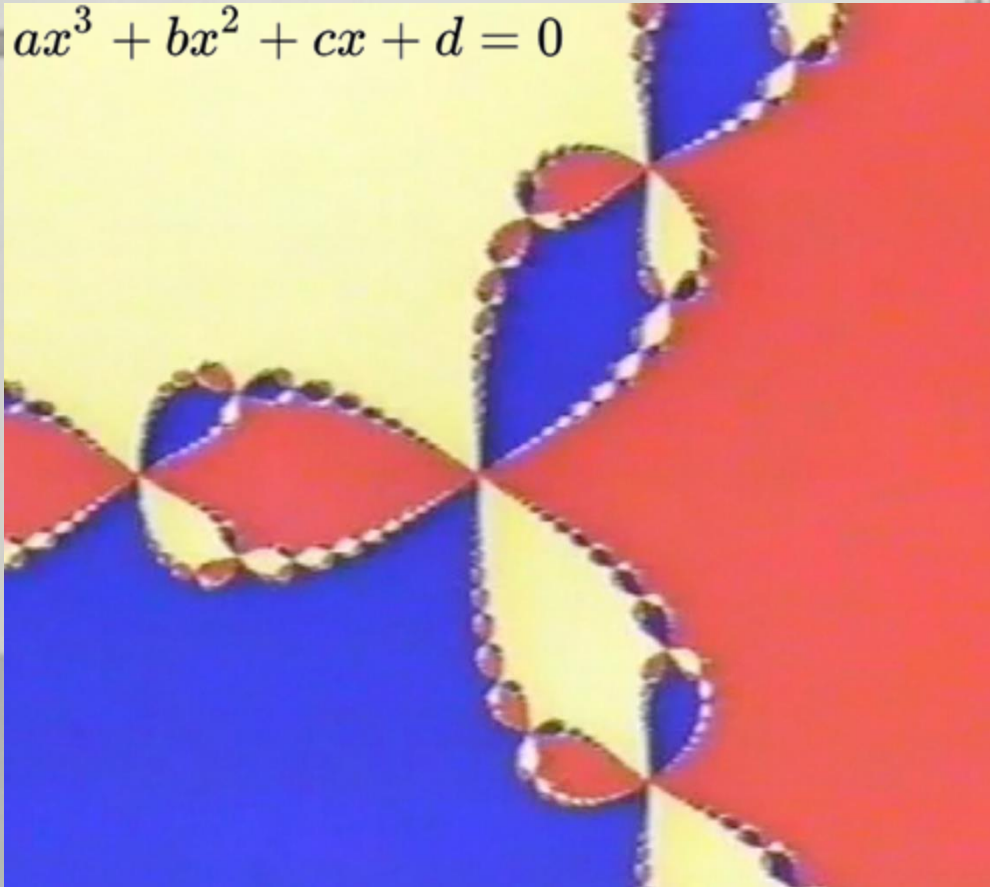
dim=2,06

# Autosimilarità e Attrattori : il Pendolo Caotico

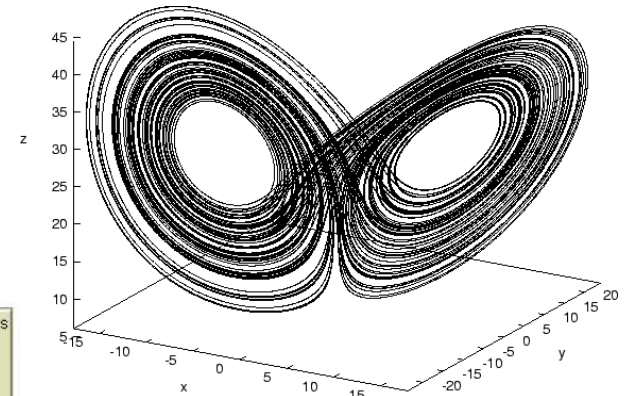
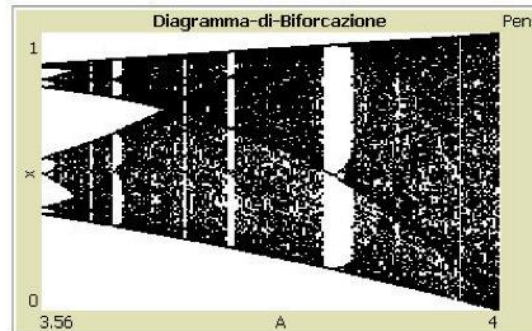
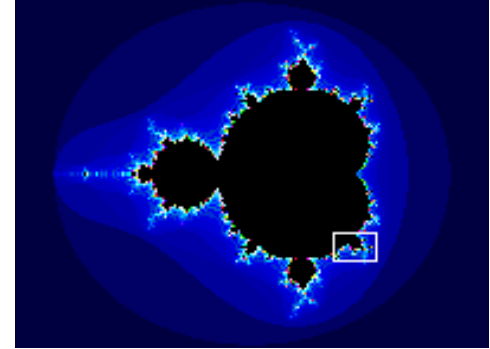
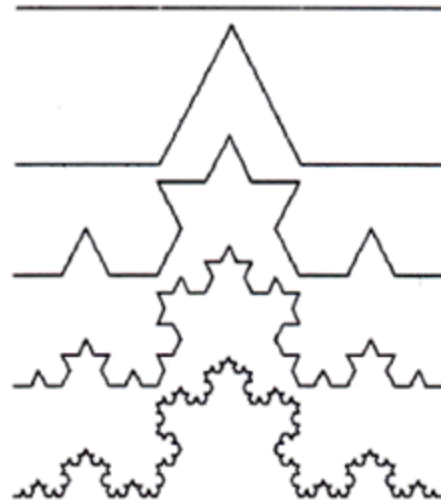


# Autosimilarità e Attrattori : il Pendolo Caotico

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$



**Ma esiste  
una 'firma'  
matematica  
dell'autosimilarità  
e dell'invarianza  
di scala?**



# PICCOLA DIGRESSIONE STATISTICA...

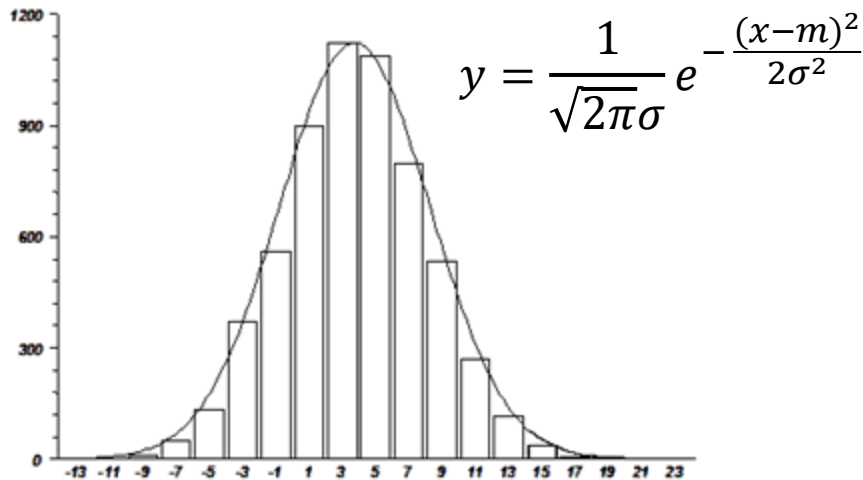
Qual'è la forma della distribuzione dell'altezza o del peso in una popolazione?



Qual'è la forma della distribuzione della ricchezza in una popolazione?

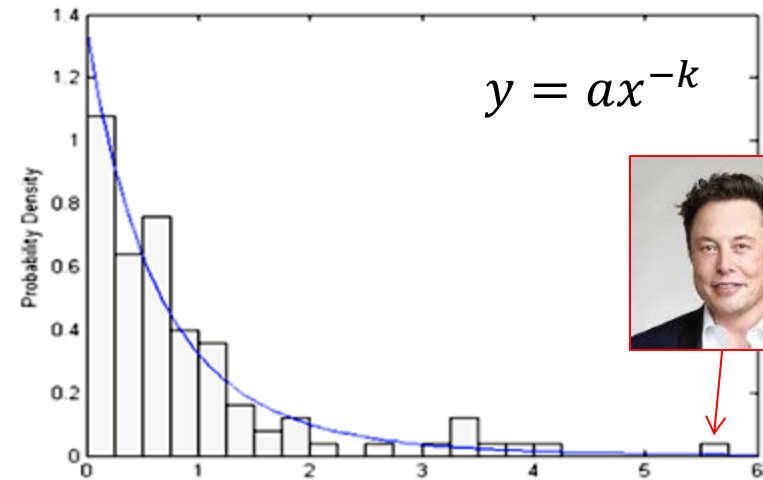


## La curva Gaussiana



**Esiste una dimensione tipica**  
(la «media» m)

## La legge di potenza



**NON esiste una dimensione tipica**  
(invarianza di scala)

# PICCOLA DIGRESSIONE STATISTICA...

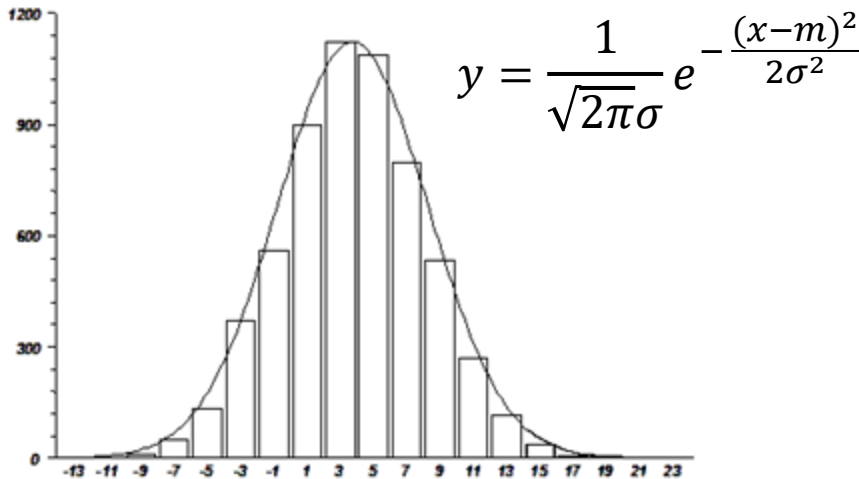
Qual'è la forma della distribuzione dell'altezza o del peso in una popolazione?



Qual'è la forma della distribuzione della ricchezza in una popolazione?

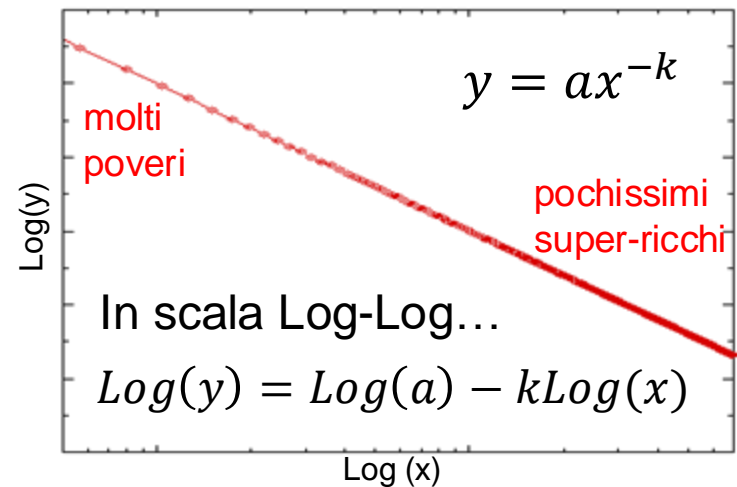


## La curva Gaussiana



**Esiste una dimensione tipica**  
**(la «media» m)**

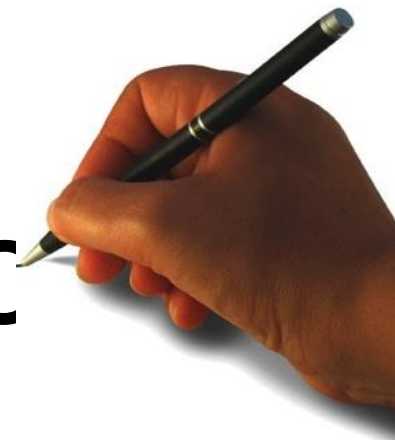
## La legge di potenza



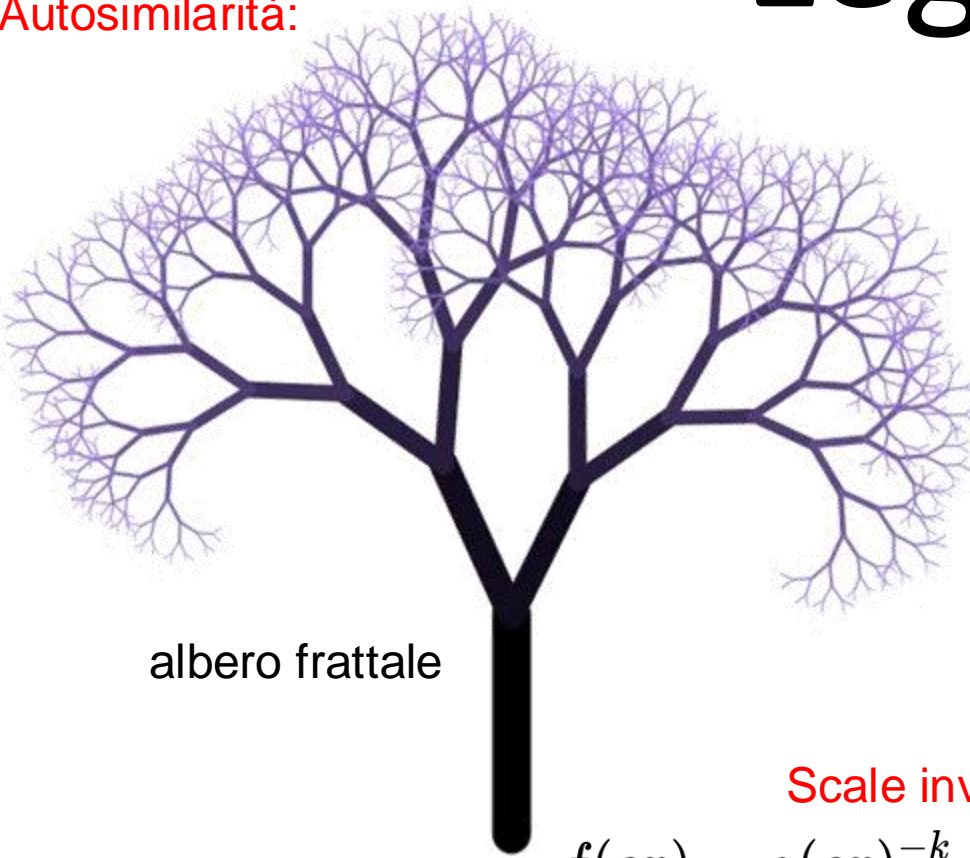
**NON esiste una dimensione tipica**  
**(invarianza di scala)**

# La 'firma' matematica dell'autosimilarità e della invarianza di scala è la:

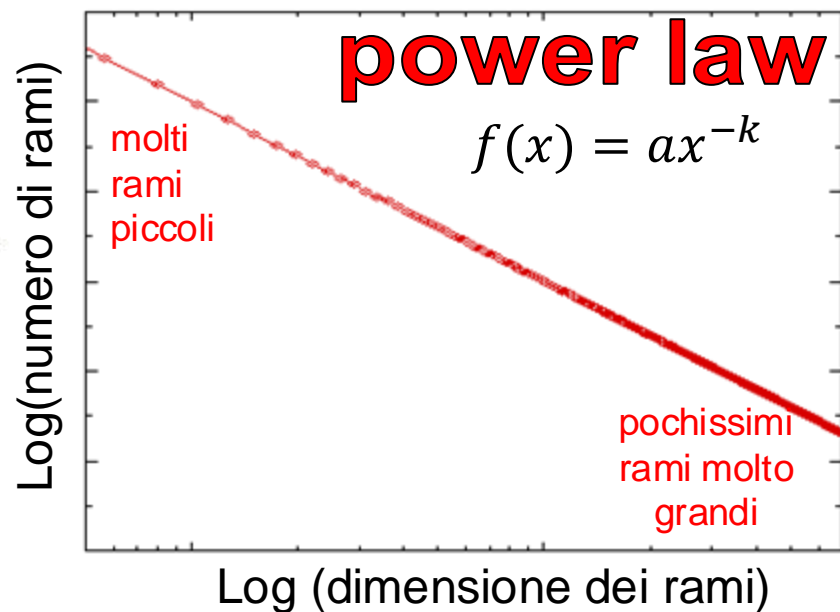
## Legge di Pc



Autosimilarità:



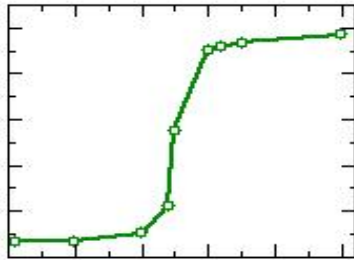
albero frattale



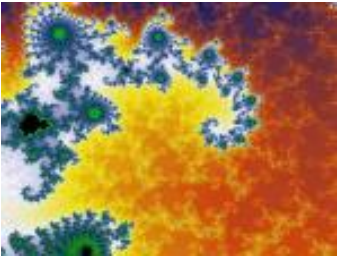
Scale invariance:

$$f(cx) = a(cx)^{-k} = c^{-k} f(x) \propto f(x)$$

## Non linearità e Soglie Critiche



## Autosimilarità e Invarianza di Scala

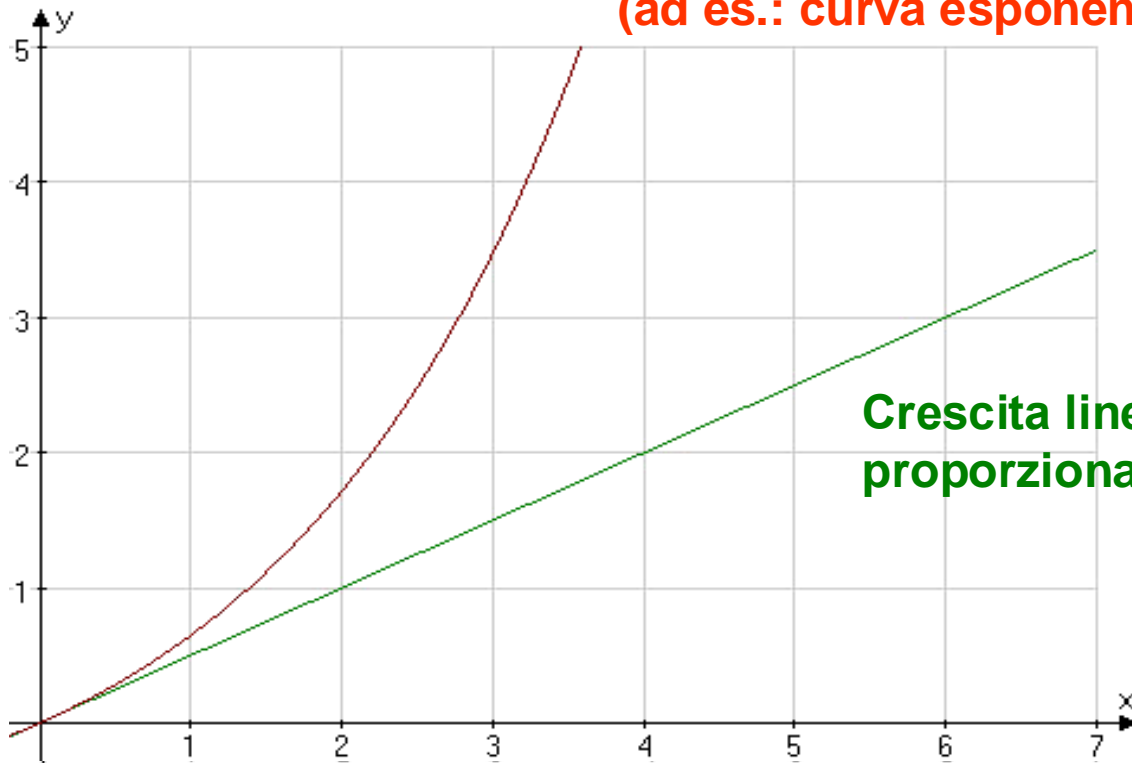


**Proprietà tipiche  
dei sistemi complessi**



# Crescita lineare e non lineare

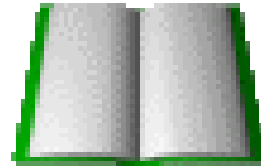
Crescita non-lineare: l'effetto  $y$  non è più proporzionale alla causa  $x$  (ad es.: curva esponenziale)



Crescita lineare: l'effetto  $y$  è proporzionale alla causa  $x$

# Crescita Esponenziale: esempio 1

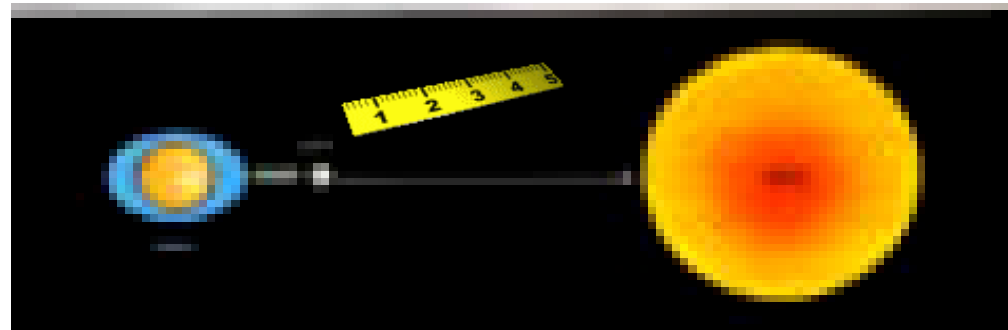
**Domanda1:** se si potesse piegare un **normale foglio di carta** (spesso circa 0.15mm) in due, poi di nuovo in due, e così via per **50 volte**, quale sarebbe lo **spessore finale** del foglio?



**Risposta lineare:** lo spessore di un elenco telefonico o al massimo l'altezza di un frigorifero

**Risposta non-lineare:** più della distanza tra la Terra e il Sole!!!

Infatti:  $(0.15\text{mm}) \times 2 \times 2 \times 2 \dots \times 2$  (50 volte)  
 $= 0.15\text{mm} \times 2^{50} = 169.000.000 \text{ Km}$



# Crescita Esponenziale: esempio 2

$t = 0$



$t = 1 \text{ ora}$



**Domanda2:** al tempo  $t=0$  in un barattolo ci sono solo **due pulci** che però **raddoppiano** di numero ogni secondo; se le pulci impiegano 1 ora esatta per riempire completamente il barattolo, quanto tempo impiegheranno a **riempirlo per metà**?



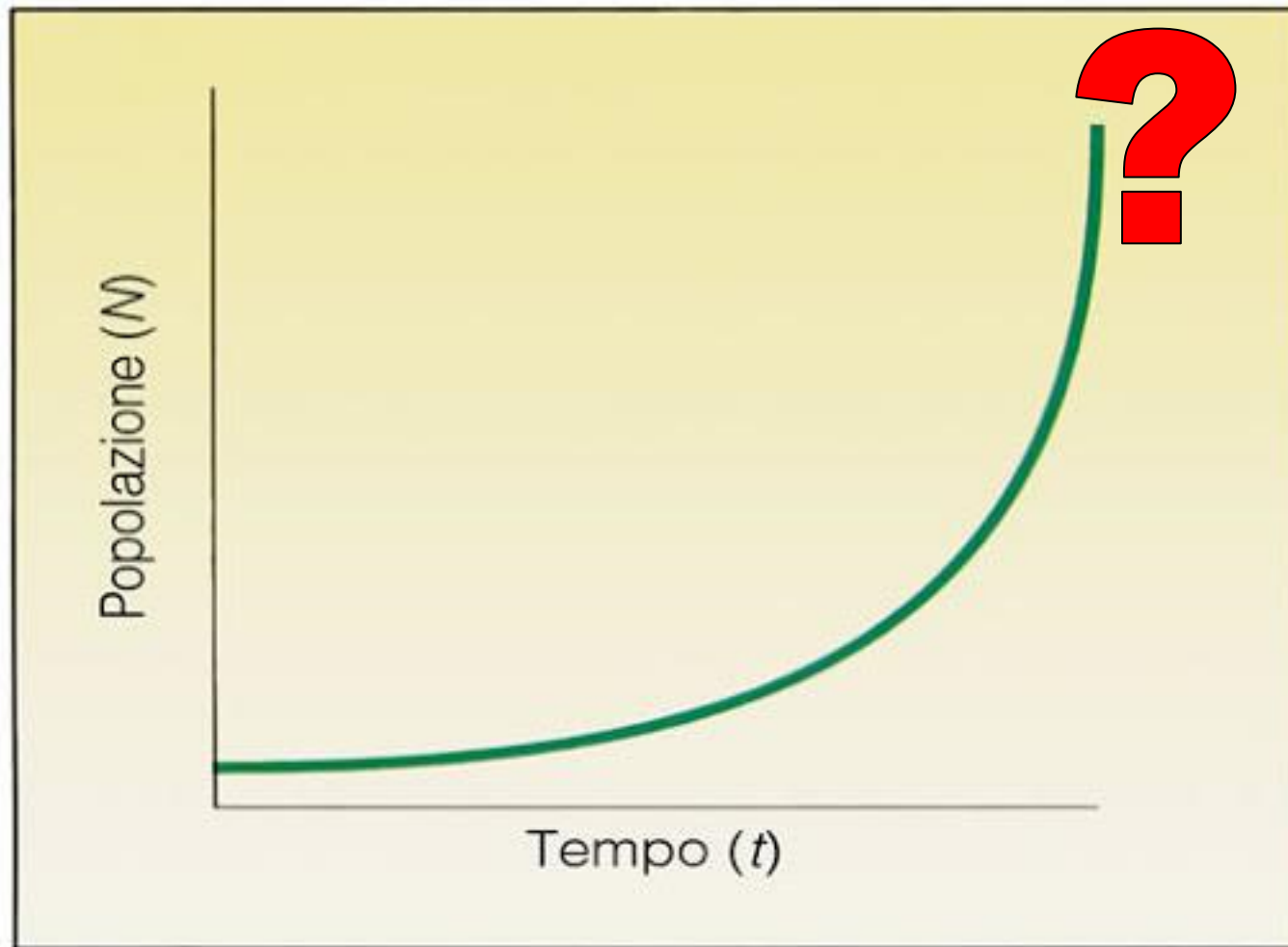
Risposta lineare:

**mezz'ora**

Risposta non-lineare:

**59 minuti e 59 secondi!**

# Ma... una Crescita Esponenziale può proseguire illimitatamente?



# Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [\[modifica\]](#)

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo  $N(t)$  che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di  $N(t)$ , che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

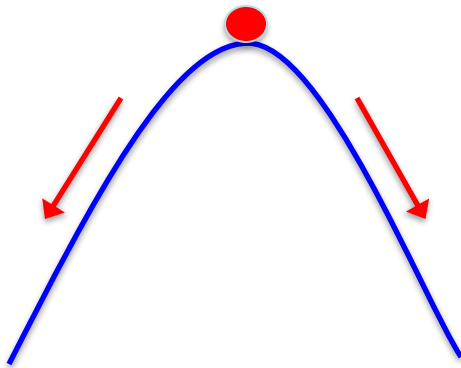
Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con  $r$ : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se  $r$  è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da  $r$ .

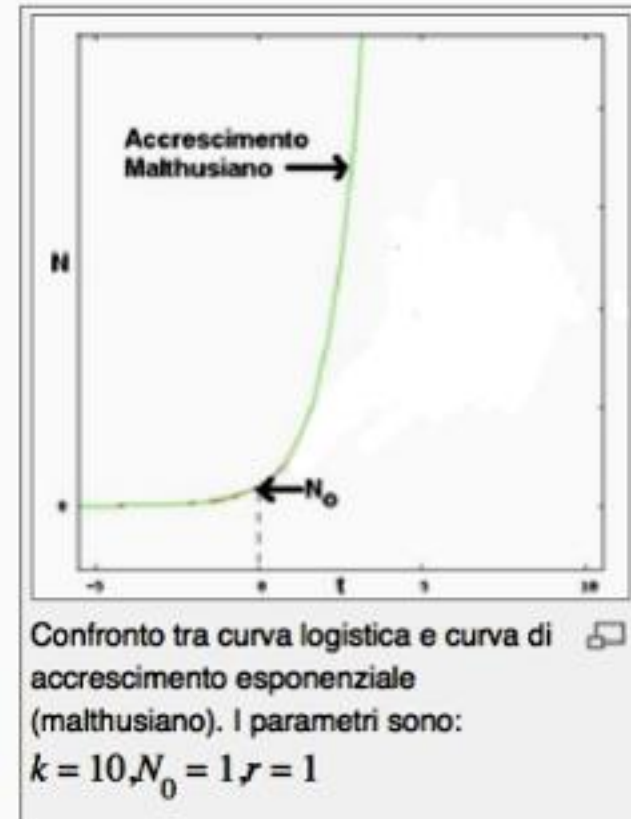
**instabilità**



T.R. Malthus  
(1766-1834)

**I sistemi dinamici «dissipativi» lineari possono avere solo un unico punto fisso:**

**- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)**



# Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [\[modifica\]](#)

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo  $N(t)$  che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di  $N(t)$ , che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

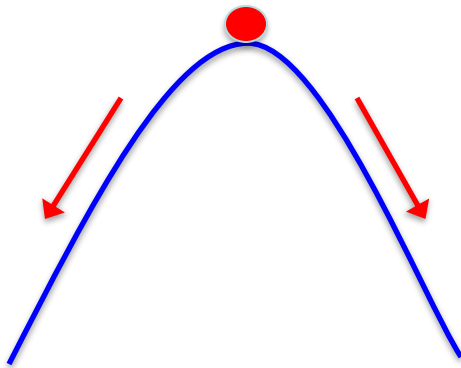
Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

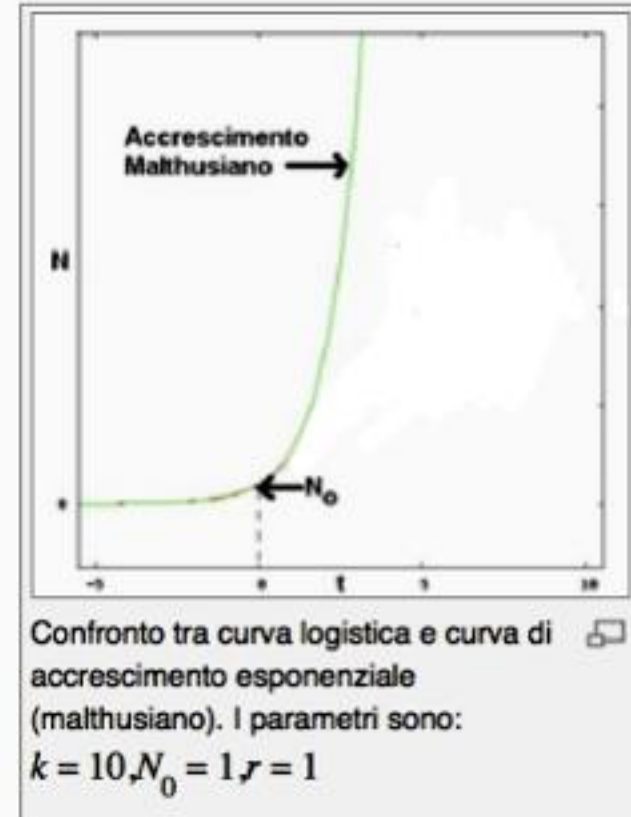
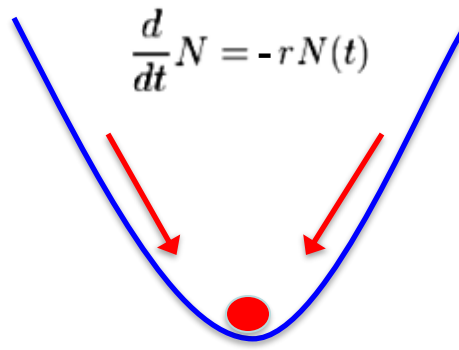
con  $r$ : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se  $r$  è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da  $r$ .

**instabilità**



**stabilità**



**I sistemi dinamici «dissipativi» lineari possono avere solo un unico punto fisso:**

- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)
- attrattivo (feedback negativo → autobilanciamento, omeostasi)

# Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [\[modifica\]](#)

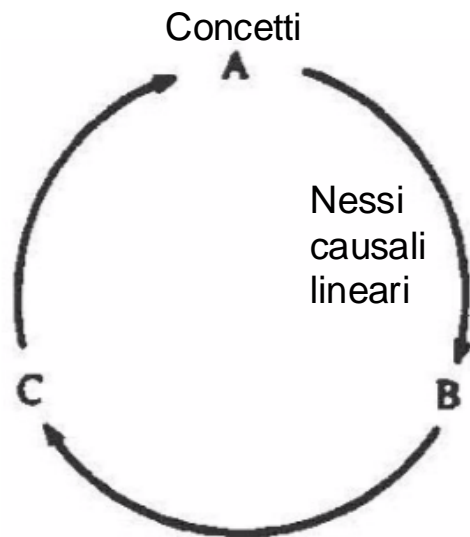
Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo  $N(t)$  che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di  $N(t)$ , che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

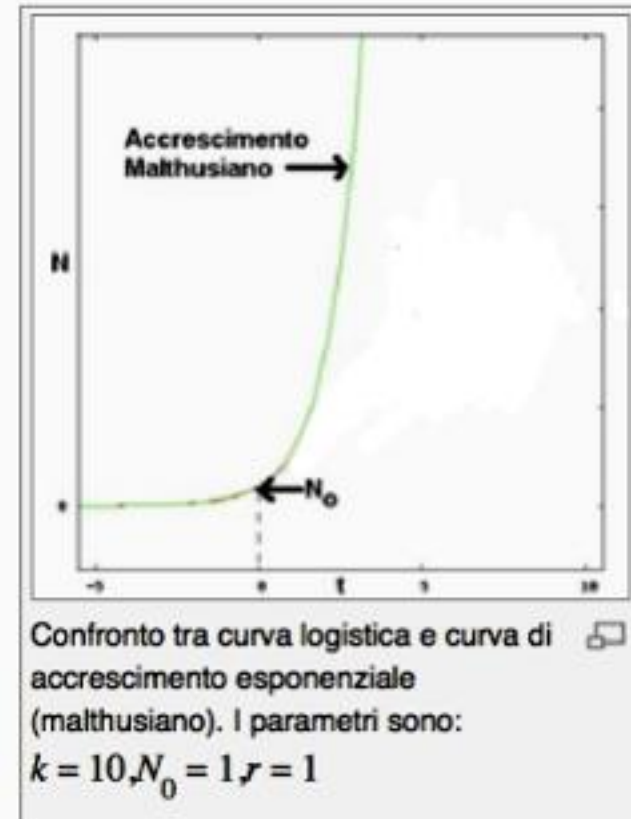
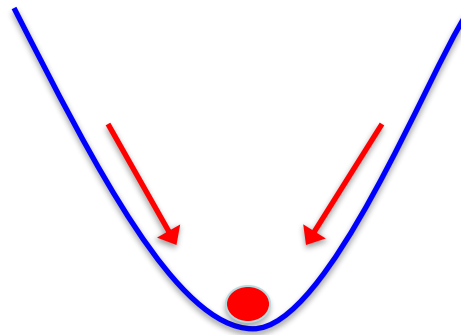
$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con  $r$ : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se  $r$  è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da  $r$ .



stabilità



- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)
- attrattivo (feedback negativo → autobilanciamento, omeostasi)

**CIBERNETICA:** anelli di retroazione e causalità circolare

(dal greco: κυβερνήτης, *kybernētēs*, 'pilota di navi')



N.Wiener  
(1894-1964)

# Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [modifica]

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo  $N(t)$  che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di  $N(t)$ , che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

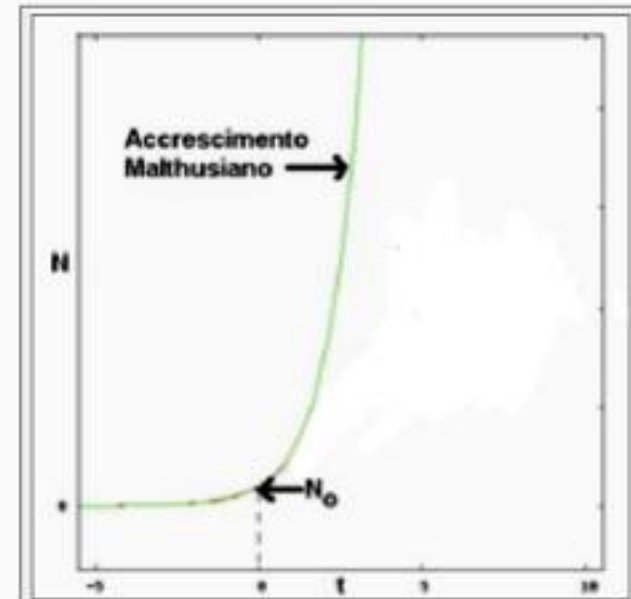
$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con  $r$ : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se  $r$  è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da  $r$ .



Per esempio, nell'anello di retroazione che illustra il governo di una barca, riportato nella [figura 4-3](#), il nesso fra «valutazione della deviazione» e «correzione della direzione» è positivo: maggiore è la deviazione dalla rotta prestabilita, maggiore sarà la correzione. Il nesso successivo, tuttavia, è negativo: tanto più aumenta la correzione della direzione, quanto più rapidamente diminuirà la deviazione. Infine, l'ultimo nesso è ancora positivo: poiché la deviazione diminuisce, la nuova valutazione darà un risultato minore di quella precedente.



Confronto tra curva logistica e curva di accrescimento esponenziale (malthusiano). I parametri sono:  $k = 10, N_0 = 1, r = 1$

- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)
- attrattivo (feedback negativo → autobilanciamento, omeostasi)

**CIBERNETICA:** anelli di retroazione e causalità circolare

(dal greco: κυβερνήτης, *kybernētēs*, 'pilota di navi')



N.Wiener  
(1894-1964)



# Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [\[modifica\]](#)

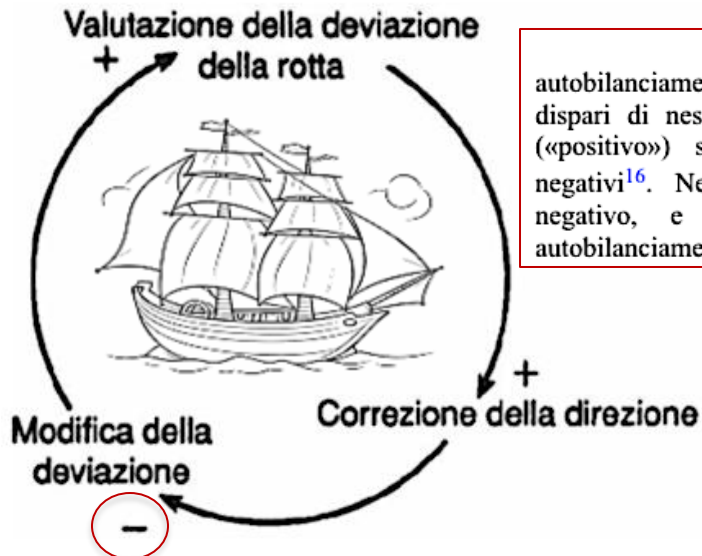
Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo  $N(t)$  che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di  $N(t)$ , che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

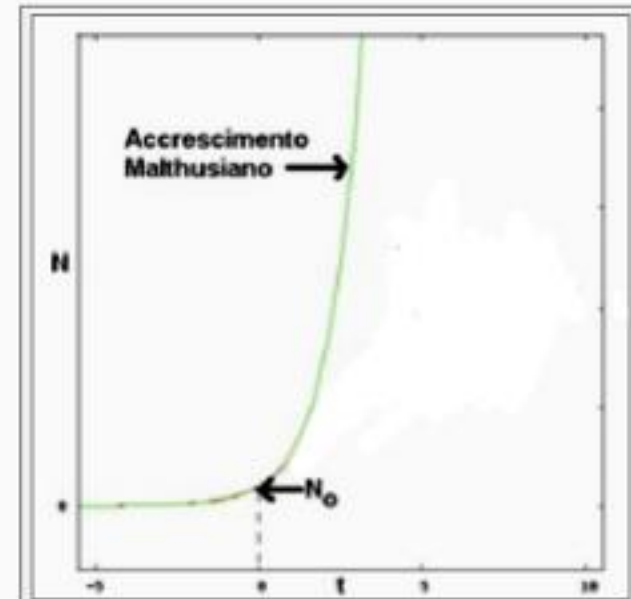
$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con  $r$ : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se  $r$  è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da  $r$ .



L'anello sarà di autobilanciamento («negativo») se contiene un numero dispari di nessi negativi, e sarà di autorafforzamento («positivo») se contiene un numero pari di nessi negativi<sup>16</sup>. Nel nostro esempio, c'è un solo nesso negativo, e quindi l'anello è negativo, o di autobilanciamento.



Confronto tra curva logistica e curva di accrescimento esponenziale (malthusiano). I parametri sono:  $k = 10, N_0 = 1, r = 1$

- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)
- attrattivo (feedback negativo → autobilanciamento, omeostasi)

**CIBERNETICA:** anelli di retroazione e causalità circolare

(dal greco: κυβερνήτης, *kybernētēs*, 'pilota di navi')



N. Wiener  
(1894-1964)

# Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [modifica]

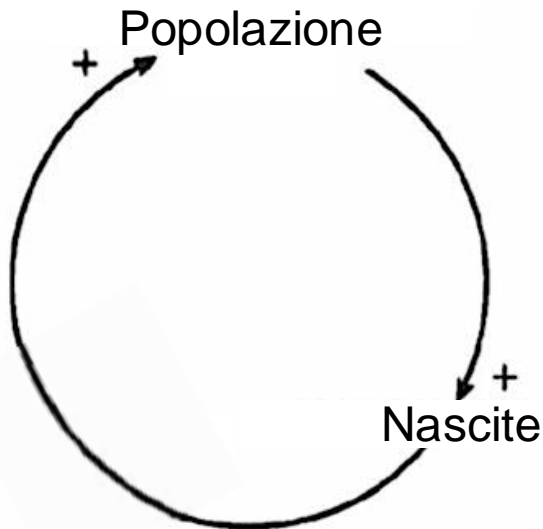
Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo  $N(t)$  che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di  $N(t)$ , che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

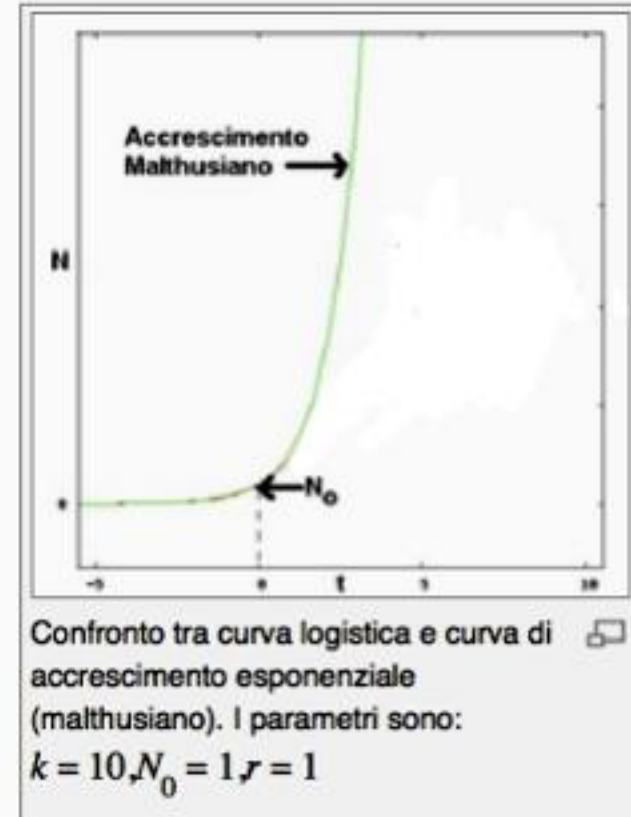
$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con  $r$ : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se  $r$  è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da  $r$ .



La crescita malthusiana è prodotta da un anello di retroazione con **due soli nessi entrambi positivi** (zero nessi negativi, numero pari), dunque corrisponde ad un **autorafforzamento** (feedback positivo)



- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)
- attrattivo (feedback negativo → autobilanciamento, omeostasi)

**CIBERNETICA:** anelli di retroazione e causalità circolare

(dal greco: κυβερνήτης, *kybernētēs*, 'pilota di navi')



N. Wiener  
(1894-1964)

# Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [\[modifica\]](#)

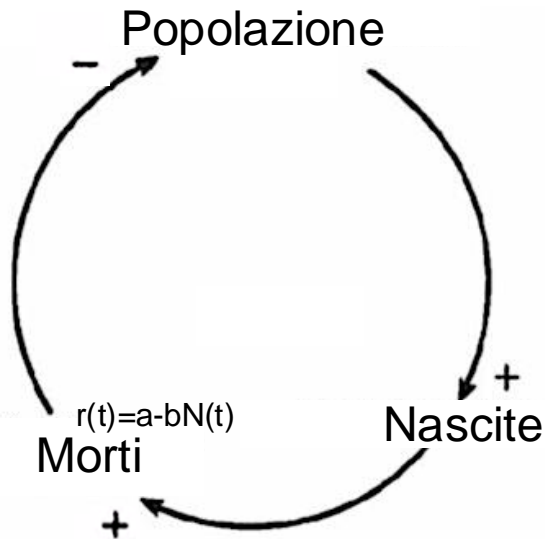
Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo  $N(t)$  che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di  $N(t)$ , che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

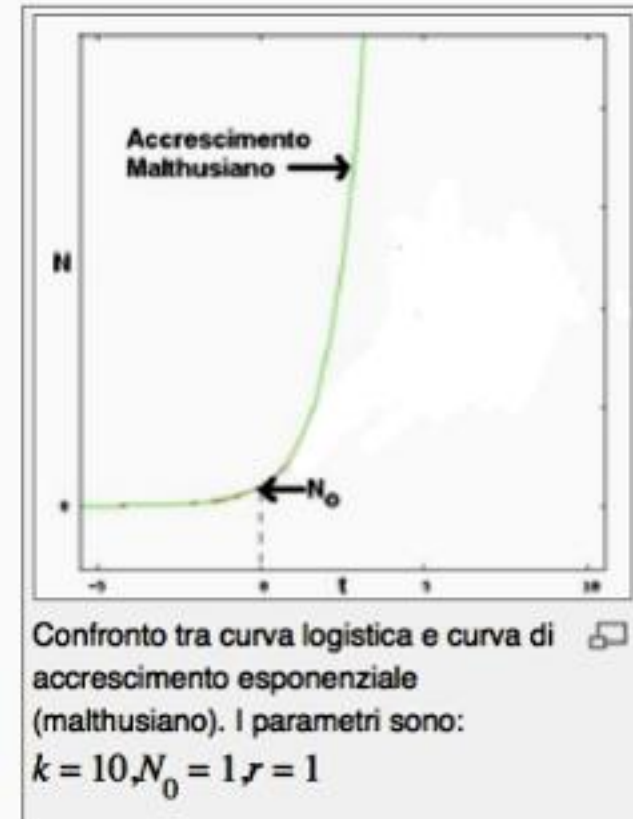
$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con  $r$ : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se  $r$  è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da  $r$ .



Per stabilizzare il sistema occorre aggiungere un **nesso negativo** all'anello di retroazione (mortalità), che così si trasformerà in un anello di **autobilanciamento**



- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)
- attrattivo (feedback negativo → autobilanciamento, omeostasi)

**CIBERNETICA:** anelli di retroazione e causalità circolare

(dal greco: κυβερνήτης, *kybernētēs*, 'pilota di navi')



N. Wiener  
(1894-1964)

# Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [\[modifica\]](#)

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo  $N(t)$  che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di  $N(t)$ , che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con  $r$ : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se  $r$  è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da  $r$ .

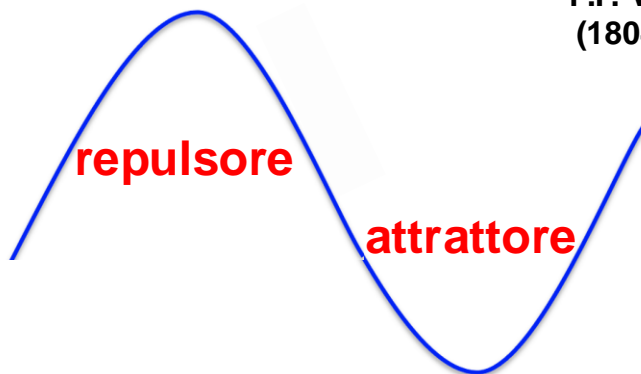
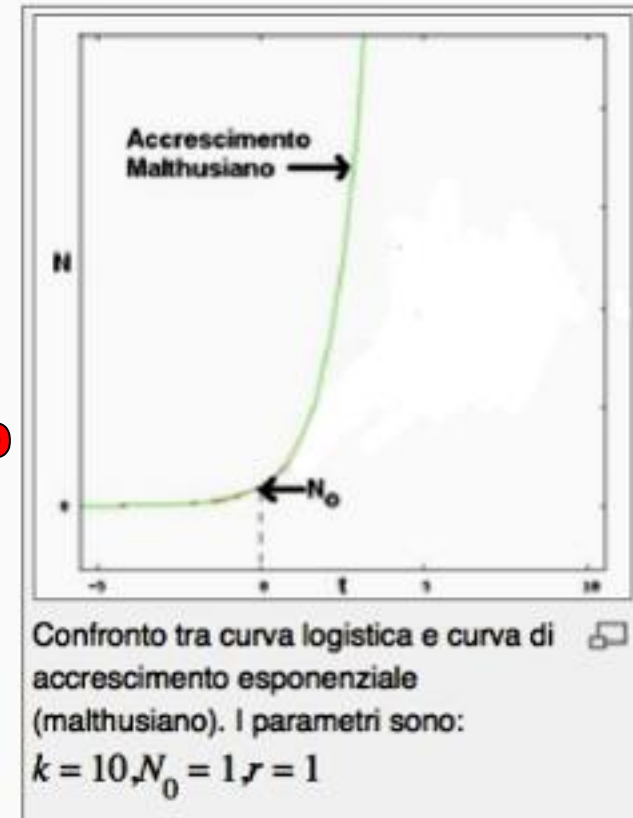
Invece in un ambiente la cui disponibilità di risorse è limitata si può descrivere l'evoluzione della popolazione utilizzando un coefficiente  $r$  che decresce all'aumentare della popolazione: il modello più semplice è  $r(t) = a - bN(t)$  con  $a$  e  $b$  costanti. Sostituendo tale funzione nella precedente equazione differenziale si ottiene:

$$\frac{dN}{dt} = aN(t) - bN^2(t) \quad \text{Flusso dissipativo non lineare 1D}$$

## EQUAZIONE LOGISTICA



P.F. Verhulst  
(1804-1849)



I sistemi dinamici «dissipativi» non lineari possono avere più di un punto fisso, ad esempio una coppia repulsore-attrattore: dalla crescita esponenziale si passa alla curva logistica (sigmoide).

# Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [\[modifica\]](#)

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo  $N(t)$  che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di  $N(t)$ , che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con  $r$ : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se  $r$  è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da  $r$ .

Invece in un ambiente la cui disponibilità di risorse è limitata si può descrivere l'evoluzione della popolazione utilizzando un coefficiente  $r$  che decresce all'aumentare della popolazione: il modello più semplice è  $r(t) = a - bN(t)$  con  $a$  e  $b$  costanti. Sostituendo tale funzione nella precedente equazione differenziale si ottiene:

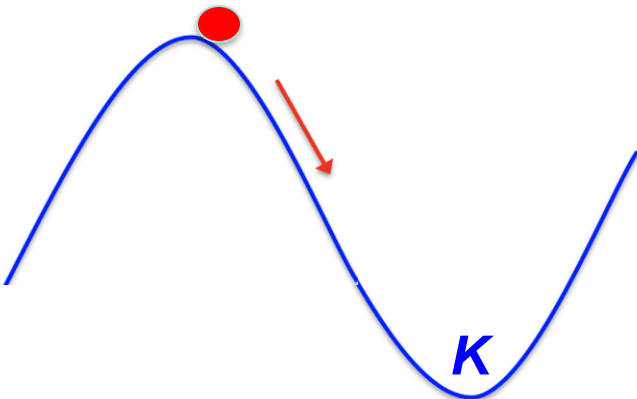
$$\frac{dN}{dt} = aN(t) - bN^2(t) \quad \text{Flusso dissipativo non lineare 1D}$$

che può essere posta nella forma:

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad K = \text{capacità di carico}$$

con  $K = \frac{a}{b}$  che è la cosiddetta popolazione massima sostenibile ed a uguale al parametro di crescita malthusiana.

Questa è l'equazione logistica di Verhulst.



I sistemi dinamici «dissipativi» non lineari possono avere più di un punto fisso, ad esempio una coppia repulsore-attrattore: dalla crescita esponenziale si passa alla curva logistica (sigmoide).



# Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [\[modifica\]](#)

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo  $N(t)$  che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di  $N(t)$ , che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con  $r$ : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se  $r$  è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da  $r$ .

Invece in un ambiente la cui disponibilità di risorse è limitata si può descrivere l'evoluzione della popolazione utilizzando un coefficiente  $r$  che decresce all'aumentare della popolazione: il modello più semplice è  $r(t) = a - bN(t)$  con  $a$  e  $b$  costanti. Sostituendo tale funzione nella precedente equazione differenziale si ottiene:

$$\frac{dN}{dt} = aN(t) - bN^2(t) \quad \text{Flusso dissipativo non lineare 1D}$$

che può essere posta nella forma:

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad K = \text{capacità di carico}$$

con  $K = \frac{a}{b}$  che è la cosiddetta popolazione massima sostenibile ed è uguale al parametro di crescita malthusiana.

Questa è l'equazione logistica di Verhulst.

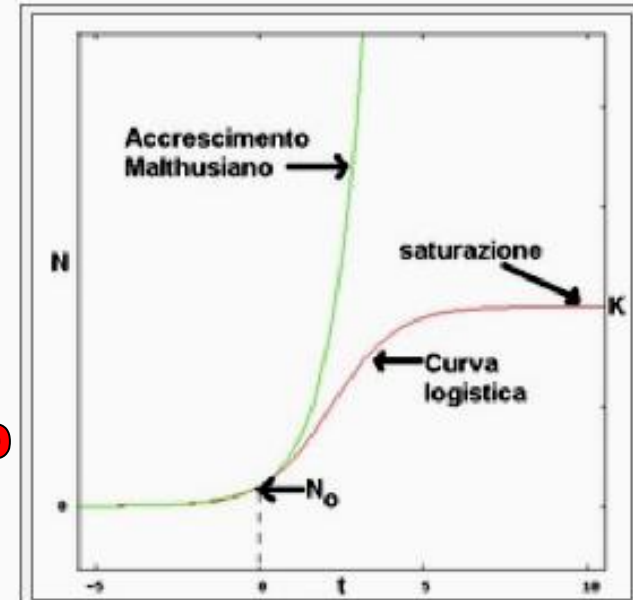
Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{1}{a} \int \left( \frac{1}{N} + \frac{b}{a - bN} \right) dN(t) = \int dt$$

risolvendo gli integrali, scegliendo come primitive quelle tali che  $N(t_0) = N_0$  e utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene la soluzione:

$$N(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{N_0} - 1\right)e^{-a(t-t_0)}} \quad \text{sigmoide}$$

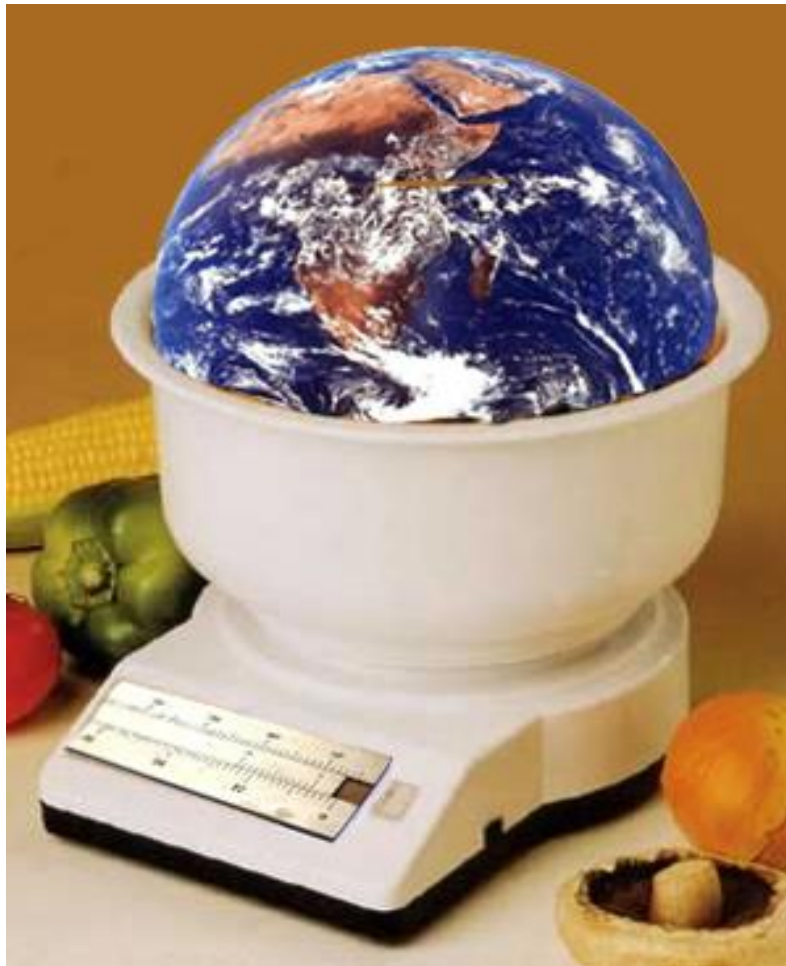
Si nota che a causa del sovraffollamento la popolazione non cresce più in maniera esponenziale ma converge al valore asintotico  $k$  indipendentemente da  $N_0$ .



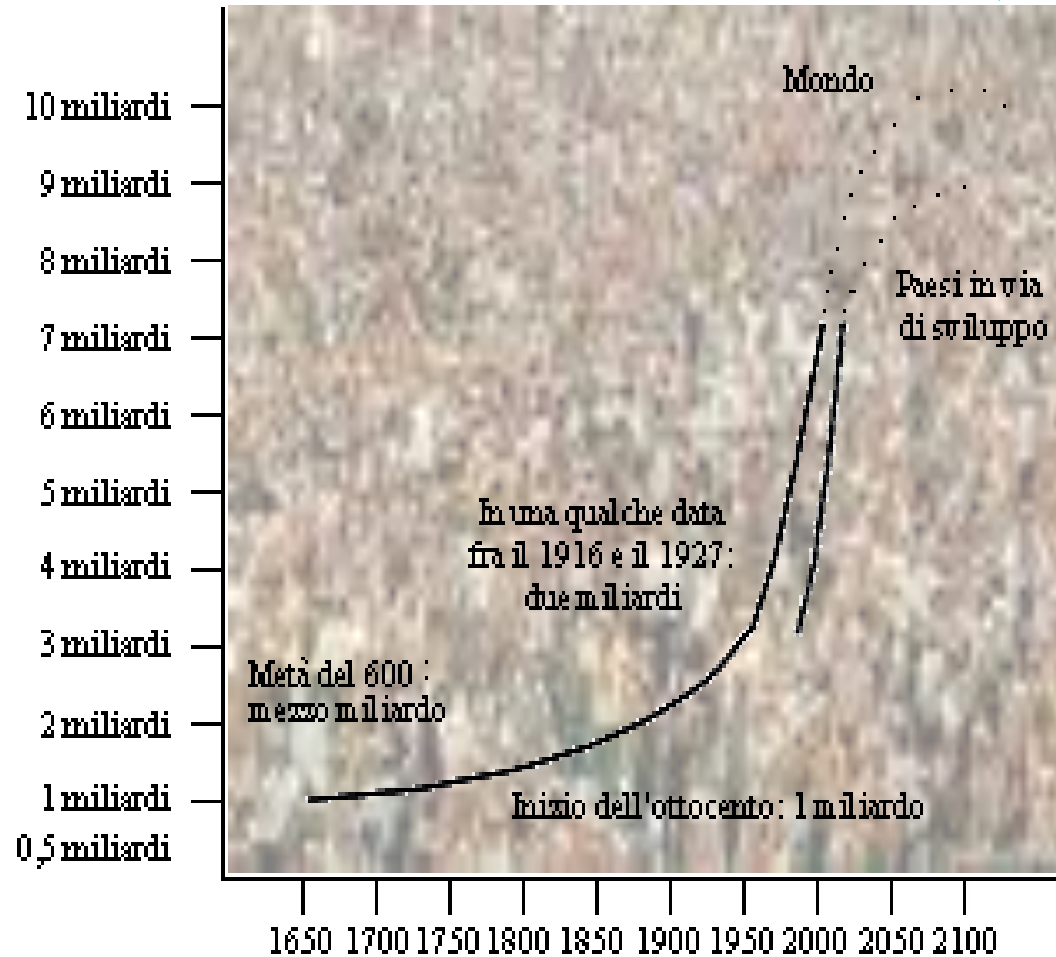
Confronto tra curva logistica e curva di accrescimento esponenziale (malthusiano). I parametri sono:  $k = 10, N_0 = 1, r = 1$

# Crescita esponenziale della popolazione terrestre

Se non l'abbiamo già superata, ci stiamo sicuramente avvicinando alla capacità di carico del nostro pianeta...



8.095.214.516 Popolazione mondiale attuale



<https://www.worldometers.info/it/>

# Oltre i limiti dello sviluppo: ci avviciniamo ad un punto critico?

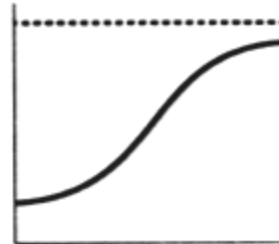
Quattro possibili modi di avvicinamento della popolazione mondiale alla capacità di carico del pianeta

(simulazioni "Mondo 3" - MIT e Club di Roma)



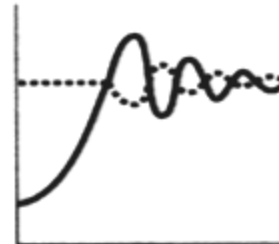
## MALTHUS

- Si ha crescita continua se*
- i limiti fisici sono molto lontani;
  - oppure*
  - i limiti fisici crescono anch'essi con andamento esponenziale.

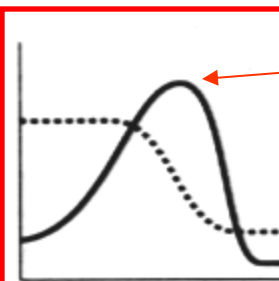


## VERHULST

- Si ha crescita sigmoide se*
- i segnali provenienti dai limiti fisici sono precisi, istantanei e hanno risposte immediate;
  - oppure*
  - la popolazione o l'economia si limitano senza bisogno di segnali dall'esterno.



- Si ha superamento e oscillazioni se*
- i segnali o le risposte sono ritardati;
  - oppure*
  - i limiti non possono essere erosi o sono in grado di recuperare presto gli effetti dell'erosione.



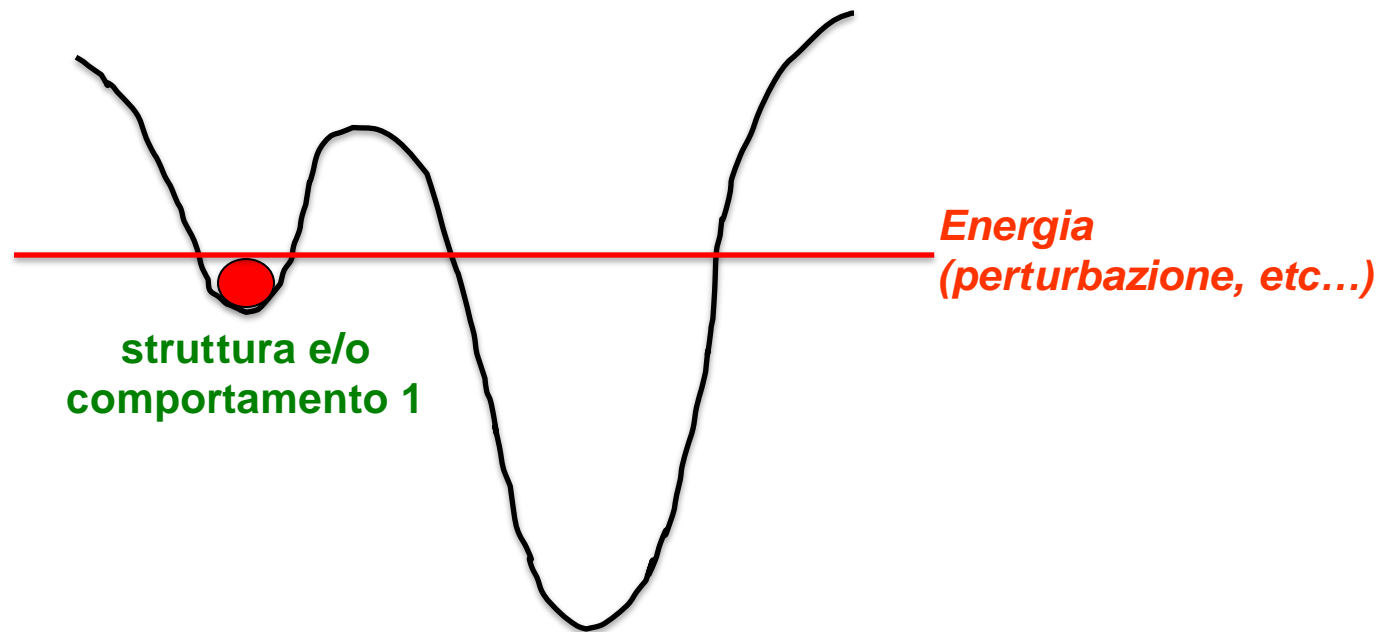
- Si ha superamento e collasso se*
- i segnali o le risposte sono ritardati;
  - oppure*
  - i limiti possono essere erosi (subire una degradazione irreversibile quando vengono superati)



# Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...

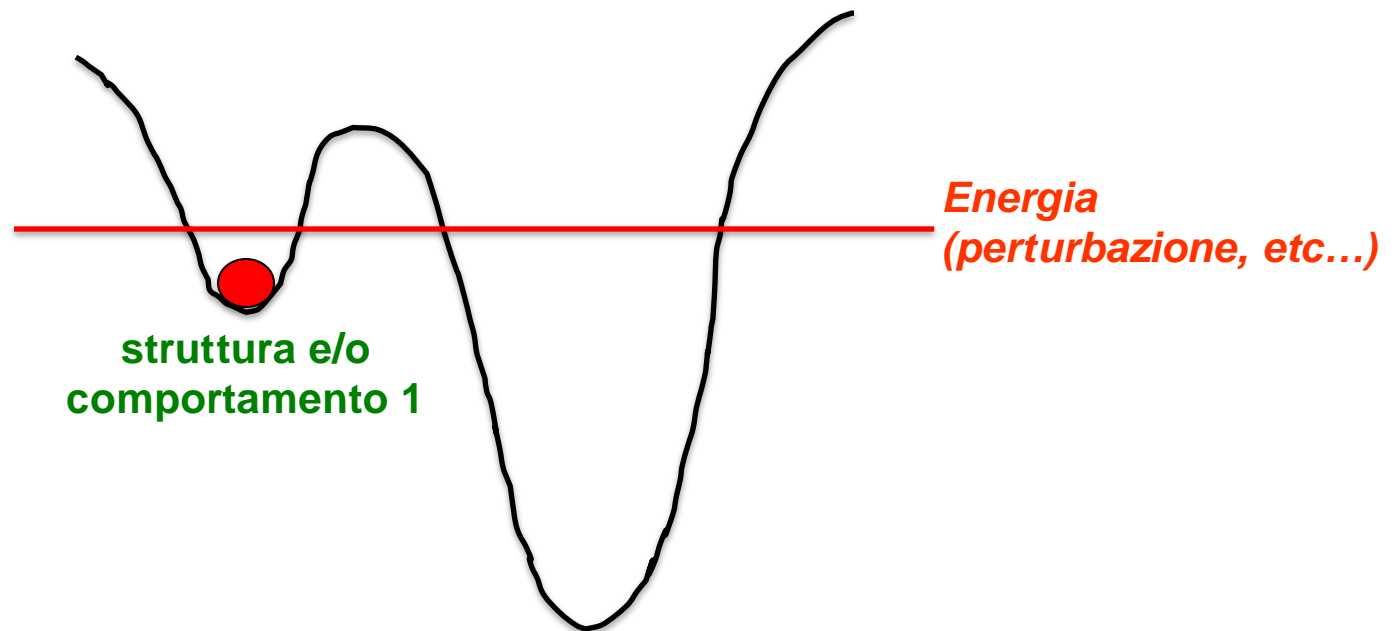
**Metastabilità**



# Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...

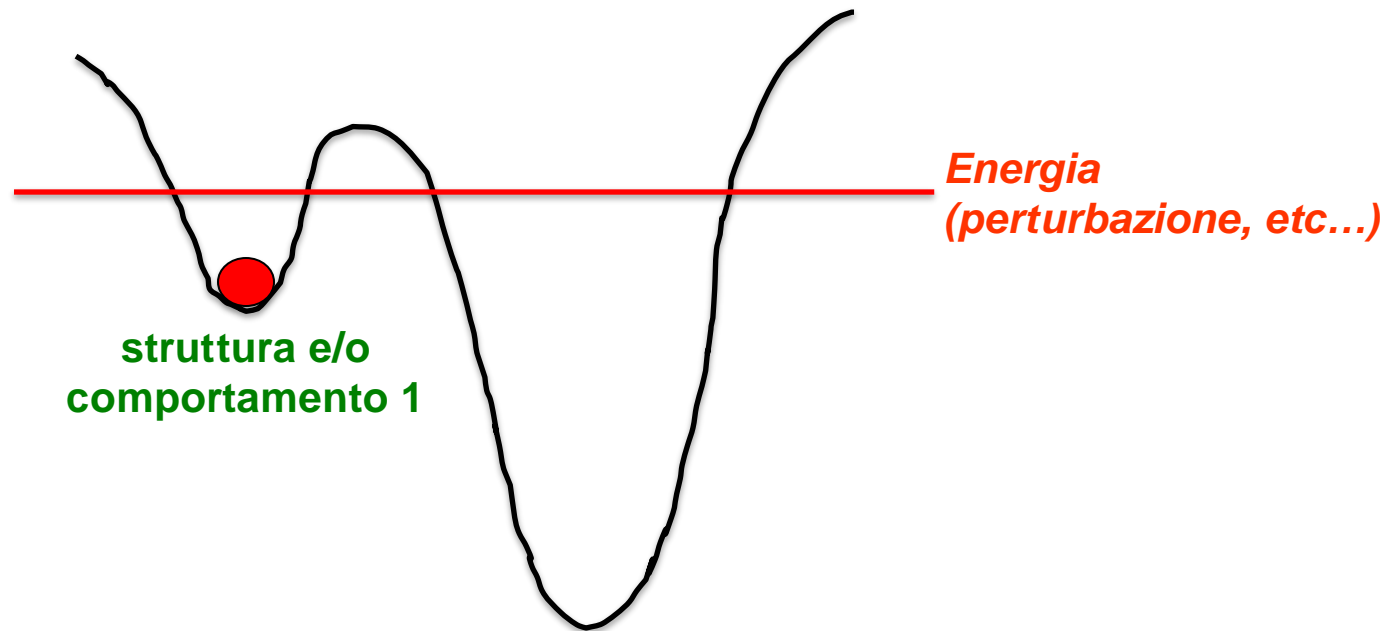
## Metastabilità



# Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...

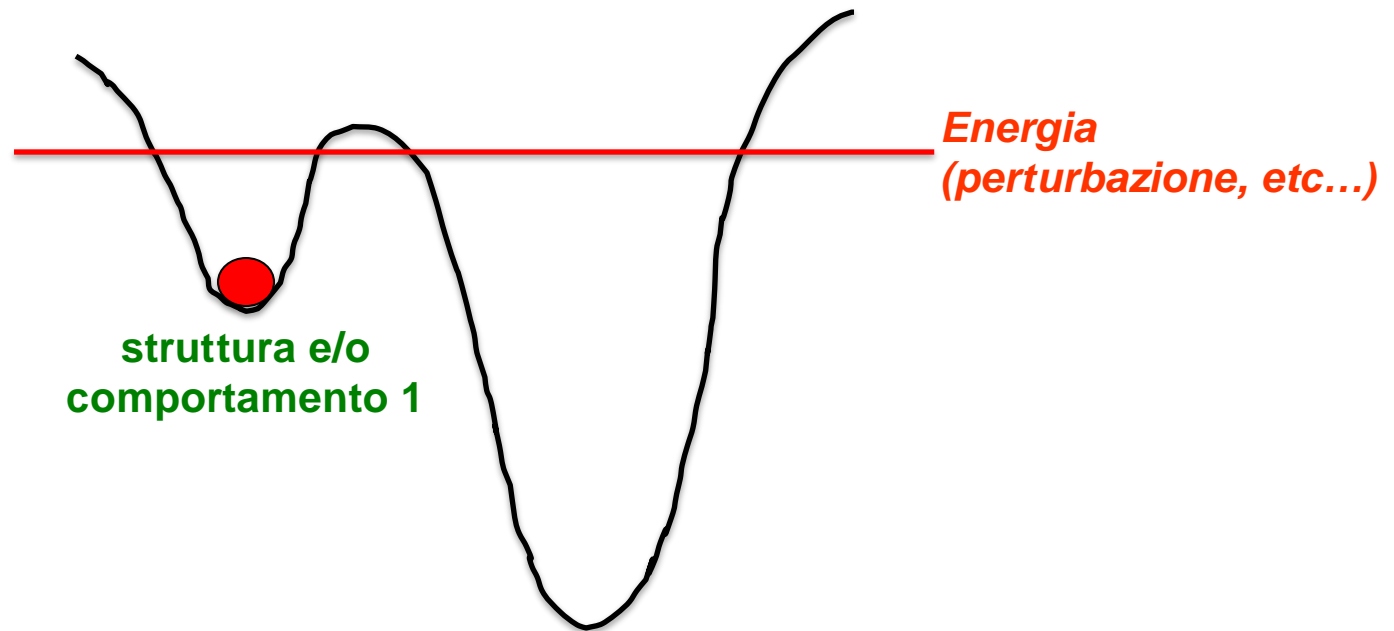
**Metastabilità**



# Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...

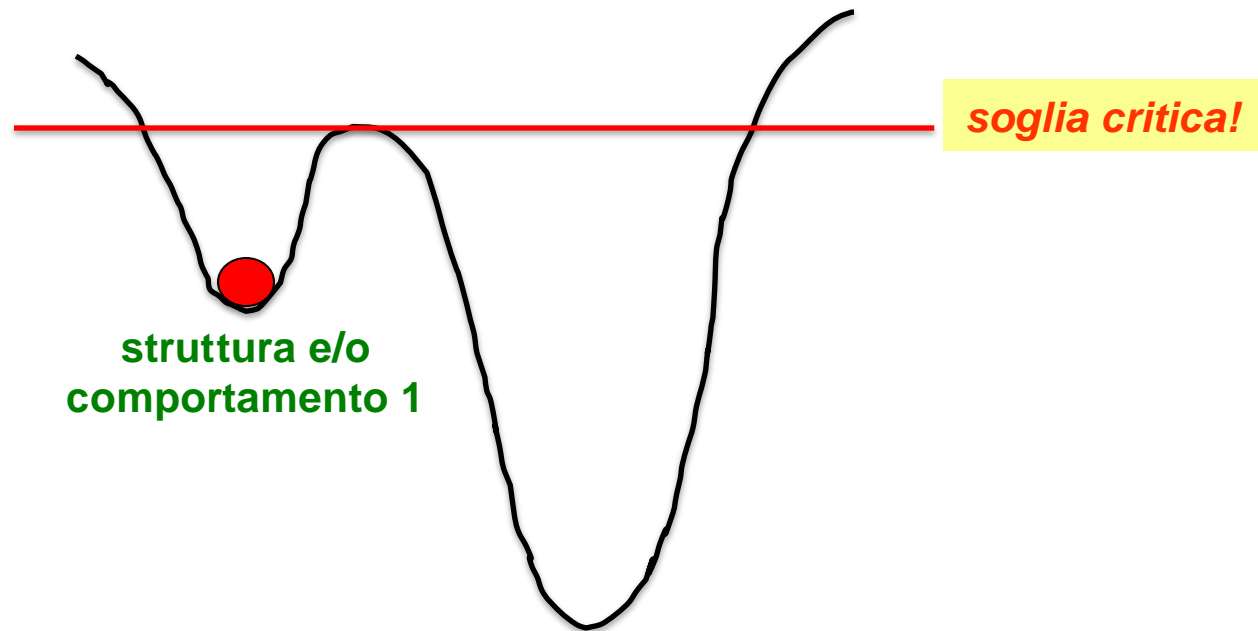
## Metastabilità



# Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...

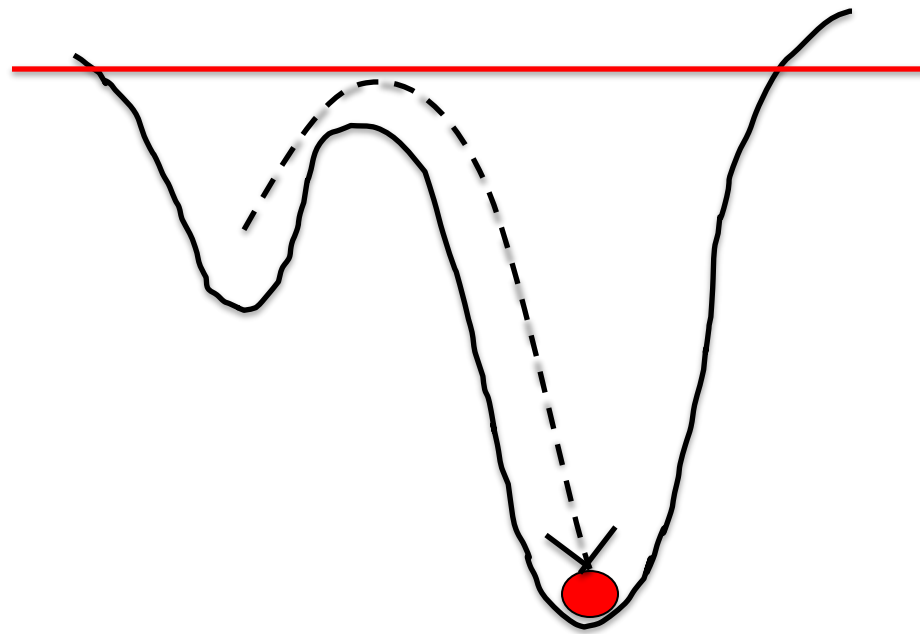
**Metastabilità**



# Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...

**Metastabilità**



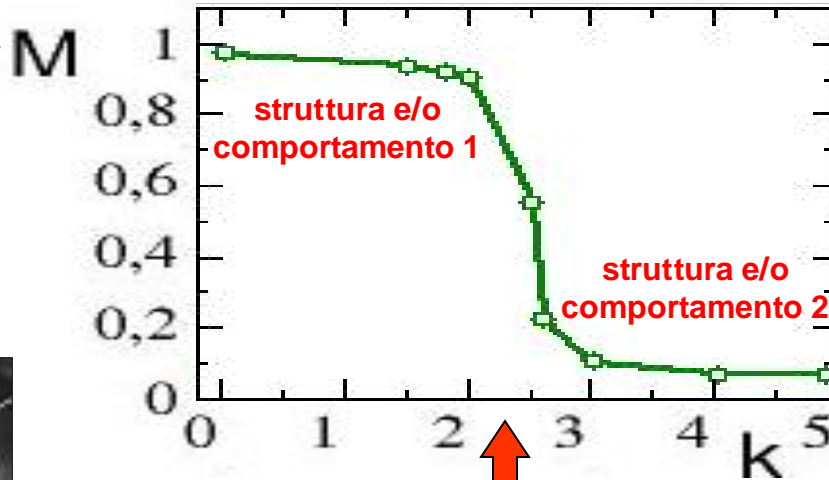
*superamento  
della soglia  
critica...*

**struttura e/o  
comportamento 2**

# Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...

**parametro d'ordine**



**parametro di controllo**

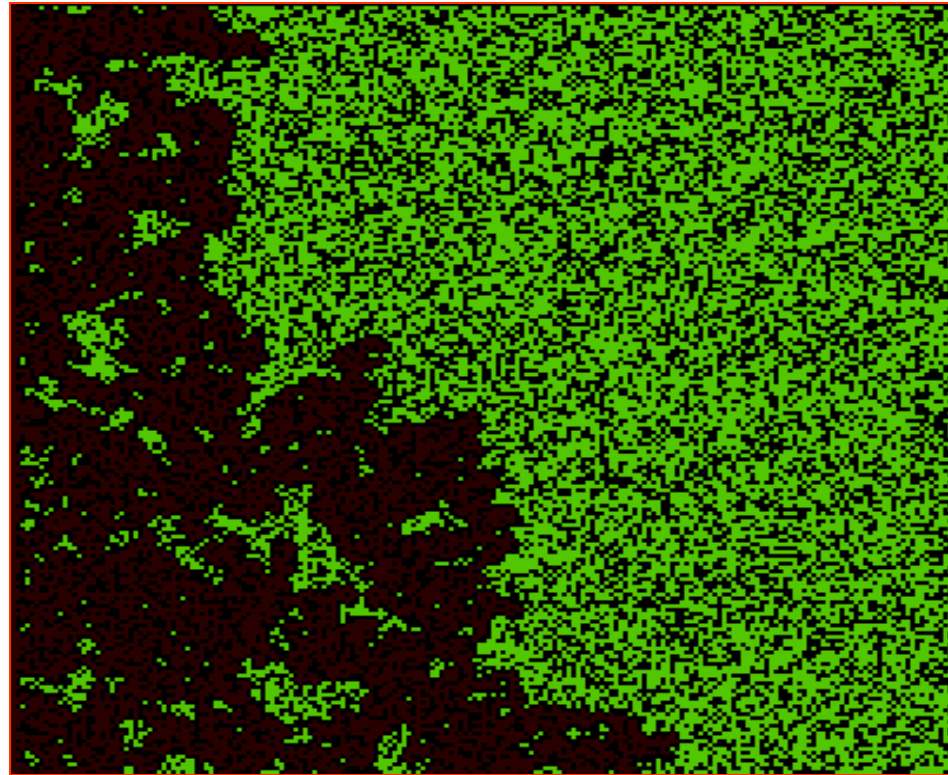


**La teoria delle Catastrofi**

**Punto Critico**

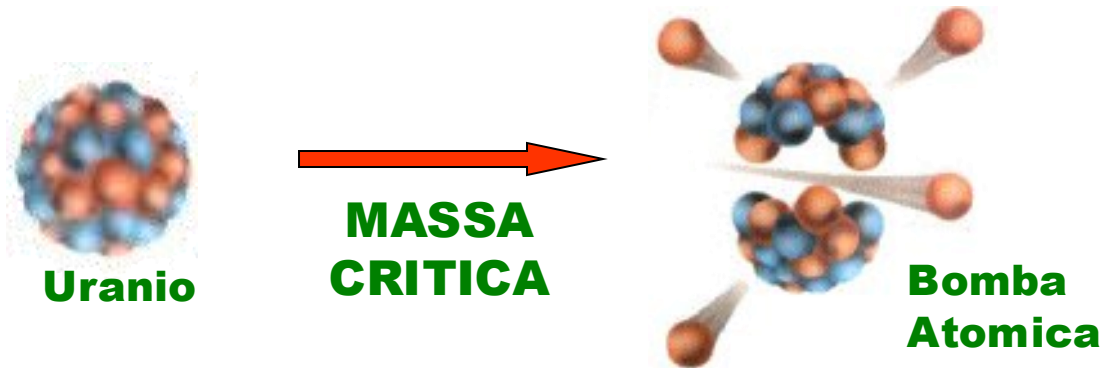
Numero fattori di controllo	Un asse di comportamento	Due assi di comportamento
1	piega	
2	cuspidi	
3	coda di rondine	ombelico iperbolico ombelico ellittico
4	farfalla	ombelico parabolico

# Soglie critiche nella propagazione degli incendi





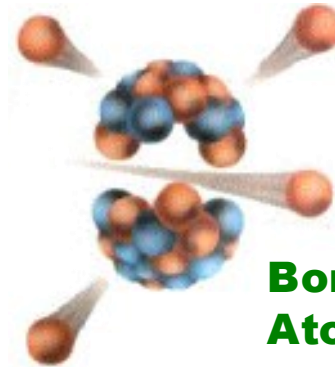
# Soglie critiche in Fisica



# Soglie critiche in Fisica



**MASSA  
CRITICA**



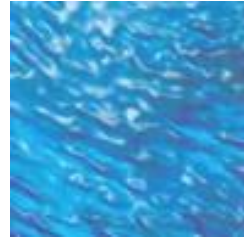
Il **2 dicembre 1942** gli Stati Uniti annunciavano: *"Il navigatore italiano è sbarcato nel nuovo mondo"*. Quell'espressione in codice indicava che **Enrico Fermi** e i suoi collaboratori dell'Università di Chicago erano riusciti ad accendere la **prima "pila" atomica**: si chiamava "Chicago Pile-1" e aveva prodotto la prima reazione nucleare a catena autoalimentata e controllata della storia. Era l'**alba dell'era atomica**.

Il **primo reattore nucleare della storia** era stato costruito in segreto sotto le tribune di un campo sportivo abbandonato dell'Università di Chicago. **Fermi** lo descrisse come *"una pila grezza di mattoni neri e travi in legno"*. La pila era formata da un nocciolo di uranio e blocchi di grafite, con barre di sicurezza in cadmio che servivano a controllare la reazione a catena, per evitare che divenisse esplosiva.

# Soglie critiche in Fisica

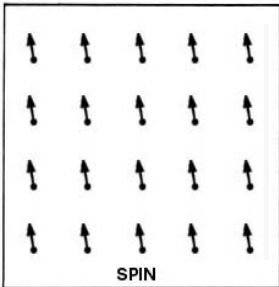


Ghiaccio

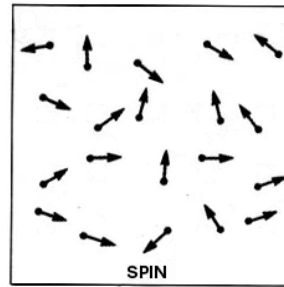


Acqua

TEMPERATURA  
CRITICA

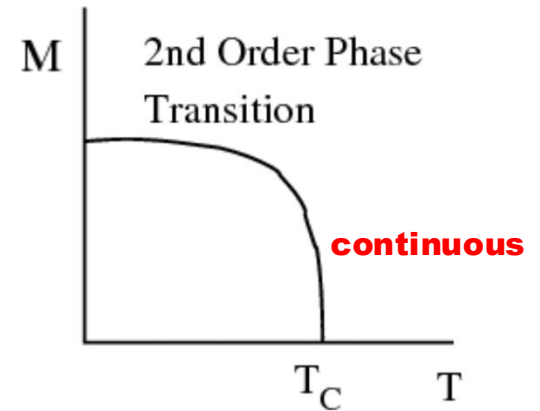
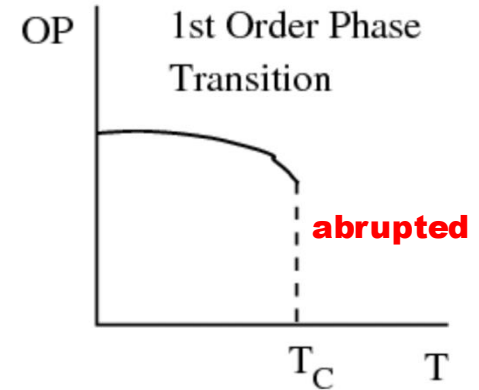
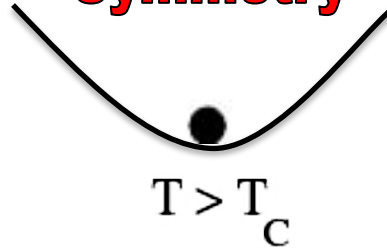


Magnete ordinato



Magnete disordinato

Symmetry



# Soglie critiche in Fisica

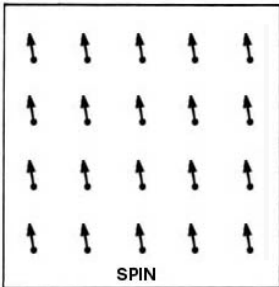


Ghiaccio

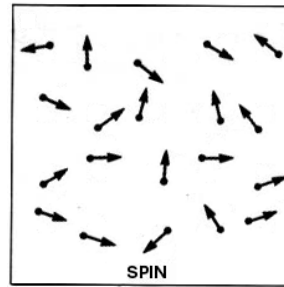


Acqua

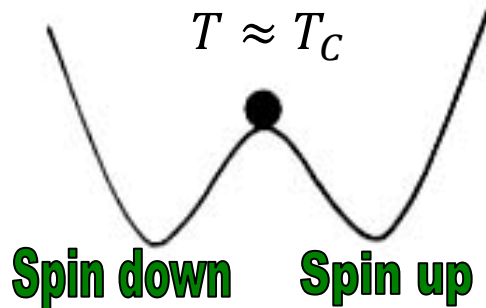
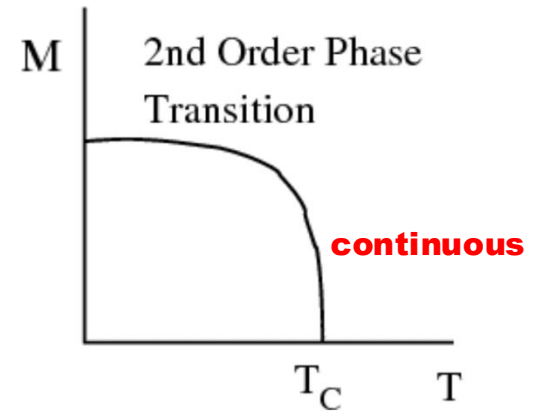
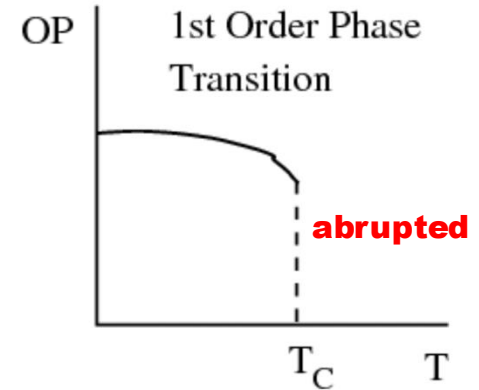
**TEMPERATURA  
CRITICA**



Magnete ordinato



Magnete disordinato



# Soglie critiche in Fisica

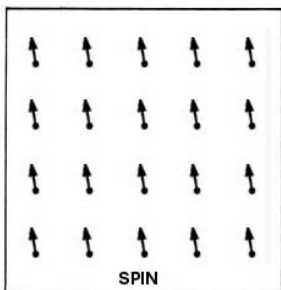


Ghiaccio

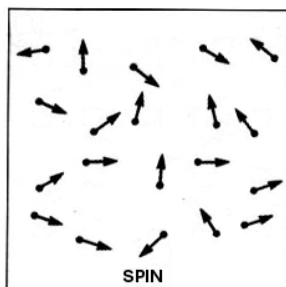


Acqua

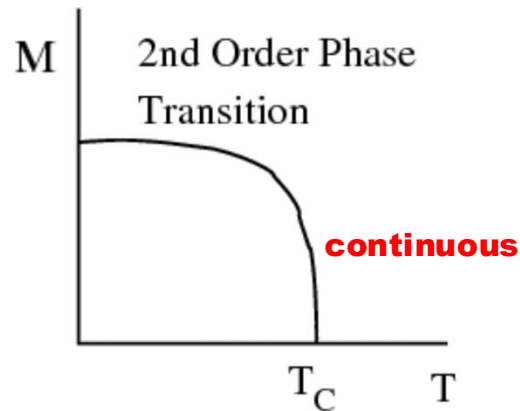
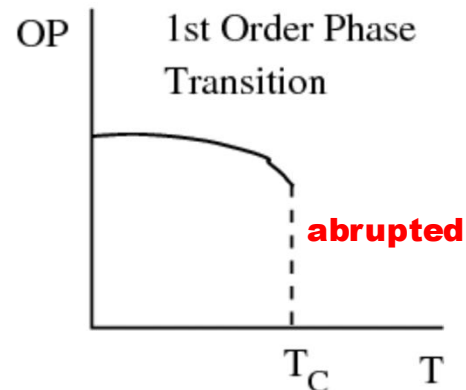
TEMPERATURA CRITICA



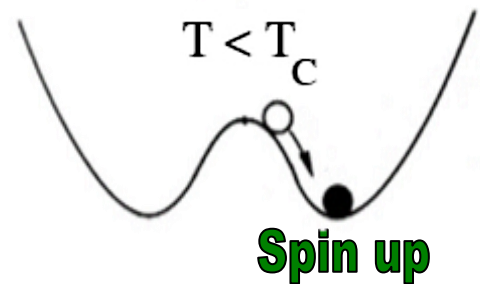
Magnete ordinato



Magnete disordinato



Symmetry breaking



Al punto critico →

La Legge di

Potenzi

Esponenti critici e invarianza di scala

$$C \sim |T - T_c|^{-\alpha}$$

$$\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma}$$

$$M \sim (T_c - T)^\beta$$

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$



# Soglie critiche nella Scienza delle Costruzioni

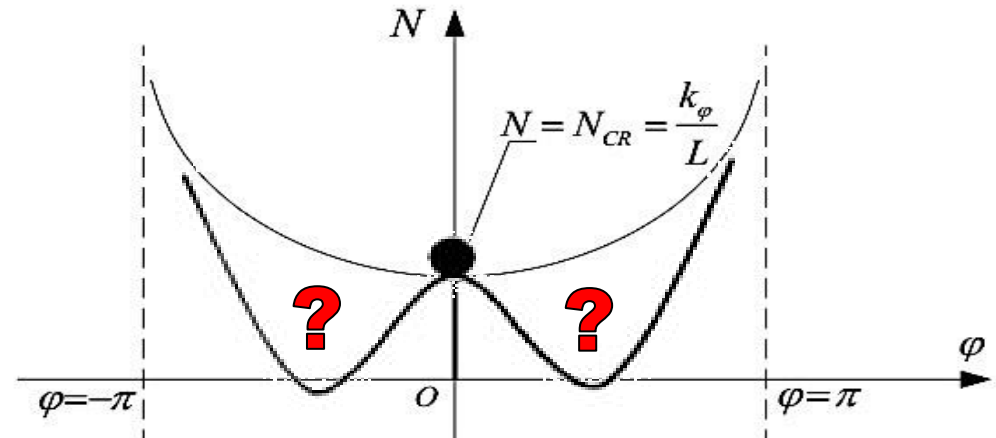
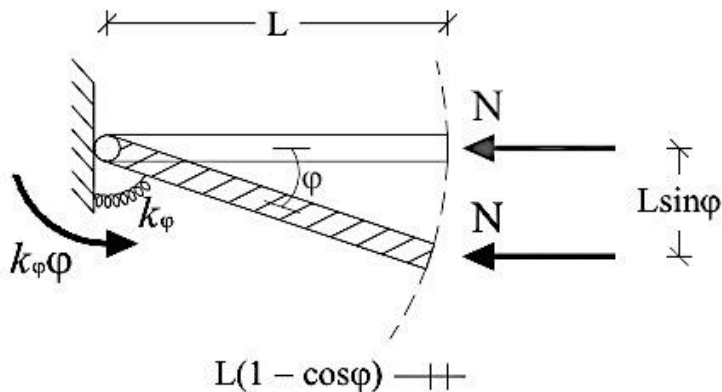


L'instabilità dell'equilibrio nelle strutture elastiche si verifica quando gli effetti instabilizzanti provocati dalle forze esterne prevalgono sulle reazioni elastiche stabilizzanti. Il carico che provoca il bilanciamento dei due suddetti effetti viene definito **CARICO CRITICO**. A partire da tale valore, si ha la perdita dell'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico:

**momento instabilizzante indotto dalla forza N**

$$NL \sin \varphi = k_{\varphi} \varphi$$

**reazione elastica della molla**



# Soglie critiche nella Scienza delle Costruzioni

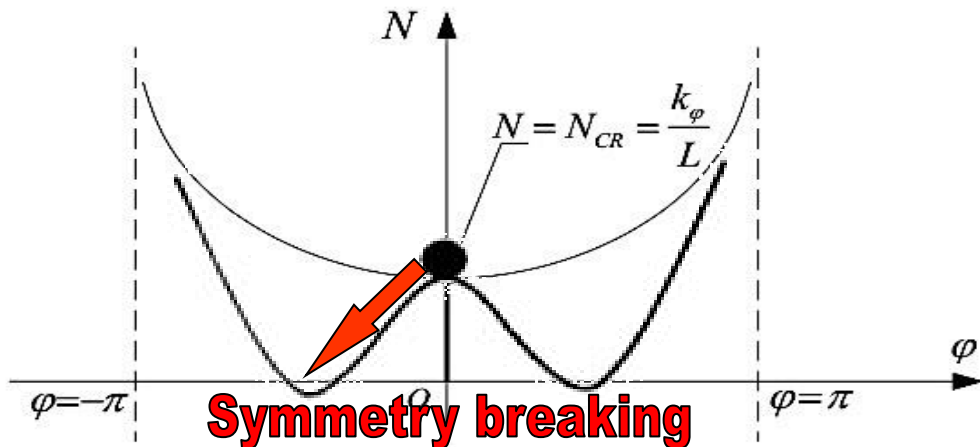
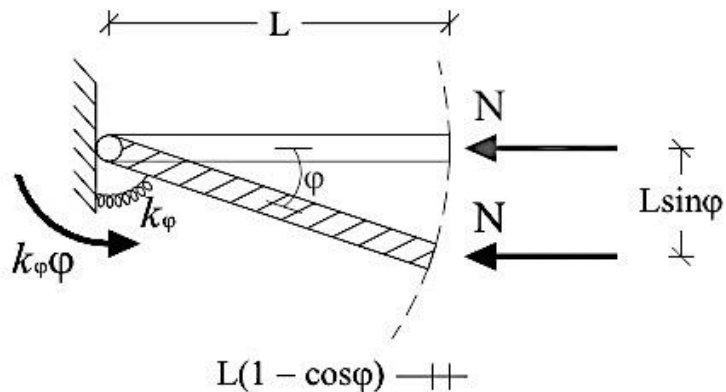


L'instabilità dell'equilibrio nelle strutture elastiche si verifica quando gli effetti instabilizzanti provocati dalle forze esterne prevalgono sulle reazioni elastiche stabilizzanti. Il carico che provoca il bilanciamento dei due suddetti effetti viene definito **CARICO CRITICO**. A partire da tale valore, si ha la perdita dell'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico:

**momento instabilizzante indotto dalla forza N**

$$NL \sin \varphi = k_{\varphi} \varphi$$

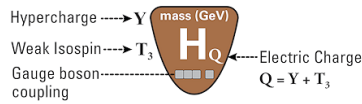
**reazione elastica della molla**



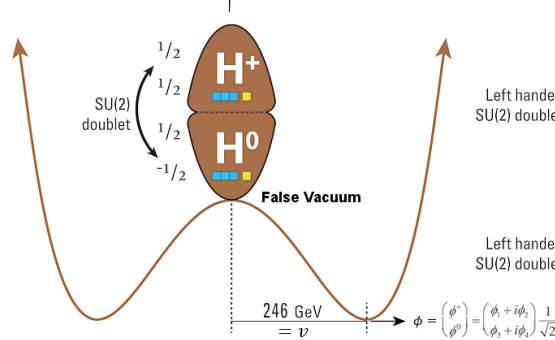
# Soglie critiche nella Fisica delle Alte Energie

## The Standard Model of Particle Physics

Spin 0  
(Higgs Boson)

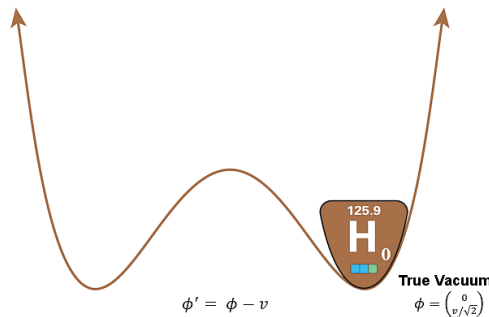


$$V(\phi) = -\frac{m^2|\phi|^2}{2} + \frac{\lambda\phi^4}{4!}$$

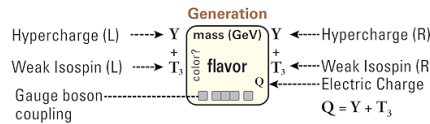


(a) Unbroken Symmetry (Symmetric phase)

(b) Broken Symmetry (Higgs phase/condensate)



Spin 1/2  
(Fermions)

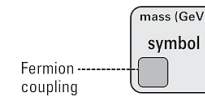


Generation	1st	2nd	3rd
Quarks (R)	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$

10<sup>-12</sup> sec after BB, ~ 100 GeV

Generation	1st	2nd	3rd
Quarks (L)	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$
	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$
Quarks (R)	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_R$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_R$
	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_R$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_R$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_R$

Spin 1  
(Gauge Bosons)



$$\cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$\sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

g : weak coupling constant  
g' : em coupling constant



$$W^\pm = (W^1 \pm iW^2)/\sqrt{2}$$

$$Z = \cos \theta_w W^3 - \sin \theta_w B$$

$$\gamma = \sin \theta_w W^3 + \cos \theta_w B$$



$L_{QCD} = -\frac{1}{4} G_{ab}^i G^{ab i} + \sum_{r,b} \bar{\psi}_i \gamma^\mu (\partial_\mu + ig' G_\mu^a T_a^r - m_i \psi_i) \psi_i$ , where  $\psi_i$  is the quark field, r, b, g the color charges, while the gluon field  $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + ig' (G_\mu^a G_\nu^b - G_\nu^a G_\mu^b)$ , the superscript "a" is the gluon index from 1 to 8,  $g'$  the coupling constant,  $m_i$  the mass of the quarks.

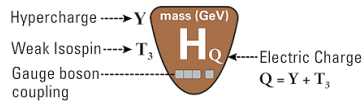
$\mathcal{L}_S = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - M^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 + G_{\mu\nu} (L\phi R + R\phi^\dagger L)$  where  $D_\mu \phi = [\partial_\mu - (i/2)g' B_\mu - (i/2)g\sigma_i W_\mu^i] \phi$ ,  $\mathcal{L}_2 = i\bar{R}\gamma^\mu D_\mu R + i\bar{L}\gamma^\mu D_\mu L$  where  $D_\mu R = (\partial_\mu + ig' B_\mu)R$ ,  $D_\mu L = [\partial_\mu + (i/2)g' B_\mu - (i/2)g\sigma_i W_\mu^i] L$ ,  $\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  where  $W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf^{abc}W_\mu^b W_\nu^c$ ,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$



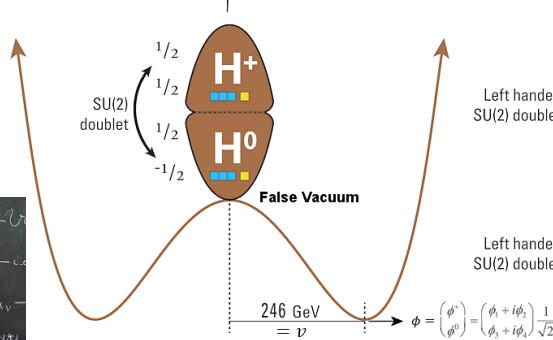
# Soglie critiche nella Fisica delle Alte Energie

## The Standard Model of Particle Physics

Spin 0  
(Higgs Boson)



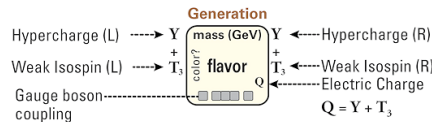
$$V(\phi) = -\frac{m^2|\phi|^2}{2} + \frac{\lambda\phi^4}{4!}$$



(a) Unbroken Symmetry (Symmetric phase)

(b) Broken Symmetry (Higgs phase/condensate)

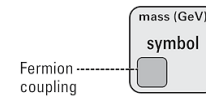
Spin 1/2  
(Fermions)



	1 <sup>st</sup>	2 <sup>nd</sup>	3 <sup>rd</sup>	
Quarks (R)	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
Leptons (R)	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$10^{-12}$  sec after BB,  $\sim 100$  GeV

Spin 1  
(Gauge Bosons)



$$\cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$\sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

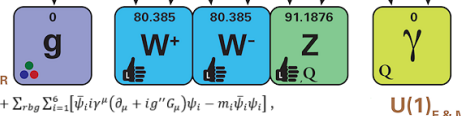
g : weak coupling constant  
g' : em coupling constant



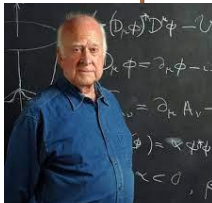
$$W^\pm = (W^1 \pm iW^2)/\sqrt{2}$$

$$Z = \cos \theta_w W^3 - \sin \theta_w B$$

$$\gamma = \sin \theta_w W^3 + \cos \theta_w B$$



$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \sum_{r,b} \bar{\psi}_r \gamma^\mu (\partial_\mu + ig' G_\mu + ig W_\mu) \psi_r - m_r \bar{\psi}_r \psi_r$ , where  $\psi_r$  is the quark field, r, b, g the color charges, while the gluon field  $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + ig' (G_\mu^a G_\nu^b - G_\nu^a G_\mu^b)$ , the superscript "a" is the gluon index from 1 to 8,  $g'$  the coupling constant,  $m_r$  the mass of the quarks.



Peter Higgs

	1 <sup>st</sup>	2 <sup>nd</sup>	3 <sup>rd</sup>
$L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	0.0023	1.275	173.07
$R \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R$	0.0048	0.095	4.18
$L \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$m_1$	$M_1$	$M_2$
$R \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_R$	0.000511	0.105658	1.77682

$\mathcal{S}_3 = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - M^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 + G_{\mu\nu} (L \phi R + R \phi^\dagger L)$  where  $D_\mu \phi = [\partial_\mu - (i/2)g' B_\mu - (i/2)g\sigma_i W_\mu^i] \phi$ ,  $\mathcal{S}_2 = i\bar{R} \gamma^\mu D_\mu R + i\bar{L} \gamma^\mu D_\mu L$  where  $D_\mu R = (\partial_\mu + ig' B_\mu) R$ ,  $D_\mu L = [\partial_\mu + (i/2)g' B_\mu - (i/2)g\sigma_i W_\mu^i] L$ ,  $\mathcal{S}_1 = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  where  $W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c$ ,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$

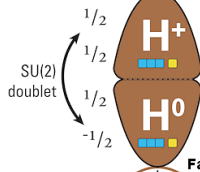
# Soglie critiche nella Fisica delle Alte Energie

## The Standard Model of Particle Physics

Spin 0  
(Higgs Boson)

Hypercharge  $\rightarrow Y$   
Weak Isospin  $\rightarrow T_3$   
Gauge boson-coupling  
mass (GeV)  
Electric Charge  
 $Q = Y + T_3$

$$V(\phi) = -\frac{m^2|\phi|^2}{2} + \frac{\lambda\phi^4}{4!}$$



(a) Unbroken Symmetry (Symmetric phase)  
(b) Broken Symmetry (Higgs phase/condensate)

$$\phi' = \phi - v$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Spin 1/2  
(Fermions)

Generation  
Hypercharge (L)  $\rightarrow Y$   
Weak Isospin (L)  $\rightarrow T_3$   
Gauge boson-coupling  
mass (GeV)  
flavor  
Hypercharge (R)  
Weak Isospin (R)  
Electric Charge  
 $Q = Y + T_3$

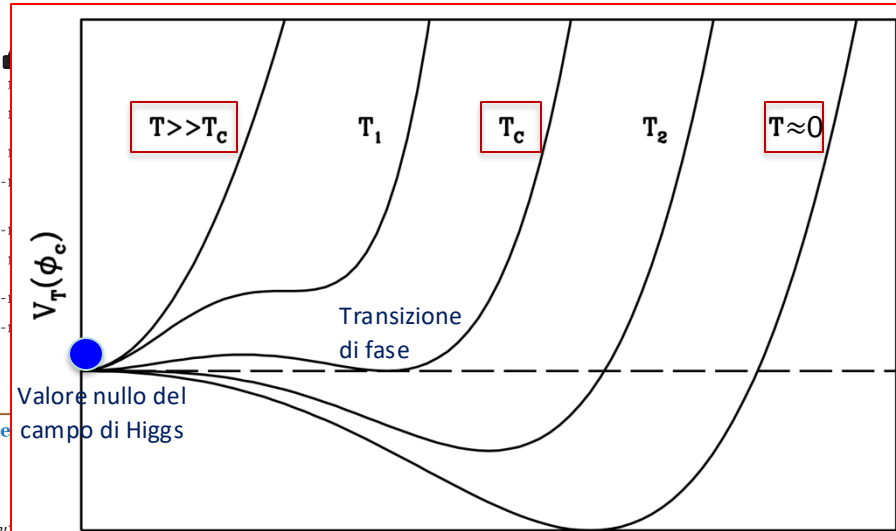
Spin 1  
(Gauge Bosons)

mass (GeV)  
symbol  
Fermion-coupling

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$g$  : weak coupling constant



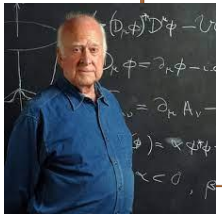
Variazione del **potenziale efficace** in funzione del **valor medio del campo di Higgs** per diversi valori della temperatura. La situazione di oggi dovrebbe corrispondere ad una temperatura appena superiore allo zero assoluto. **Ecco perché esiste qualcosa invece che il nulla!**

from 1 to 8,  $g''$  the coupling constant,  $m_t$  the mass of the quarks.

$$\mathcal{L}_S = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - M^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 + G_\mu (L \phi R + R \phi^\dagger L) \quad \text{where } D_\mu \phi = [\partial_\mu - (i/2)g' B_\mu - (i/2)g\sigma_i W_\mu^i] \phi, \mathcal{L}_F = i\bar{R} \gamma^\mu D_\mu R + i\bar{L} \gamma^\mu D_\mu L \quad \text{where } D_\mu R = [\partial_\mu + i g' B_\mu] R$$

$$D_\mu L = [\partial_\mu + (i/2)g' B_\mu - (i/2)g\sigma_i W_\mu^i] L, \mathcal{L}_V = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{where } W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$



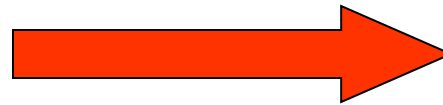
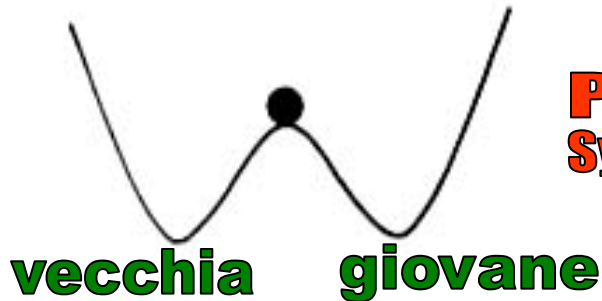
Peter Higgs

# Soglie critiche nella Percezione

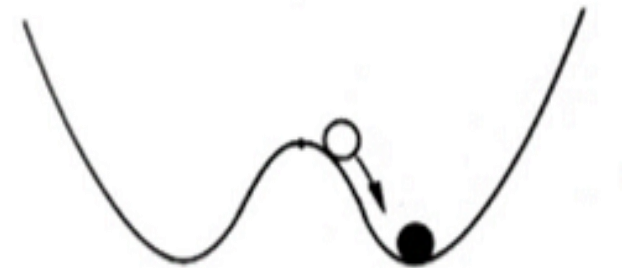


giovane o vecchia?

indecisione...



**Punto Critico  
Symmetry Breaking!**



giovane

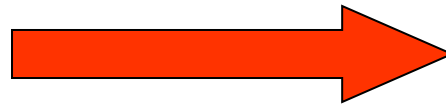
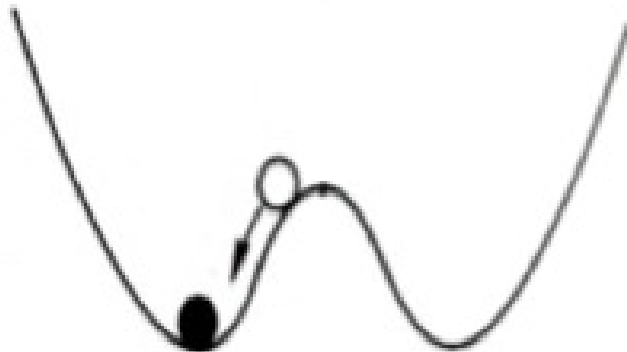


vecchia

# Soglie critiche nella risoluzione di problemi

Come prosegue questa sequenza?

**U, D, T, Q, C, S, S ... ?**  
**1 2 3 4 5 6 7**



**Punto Critico**

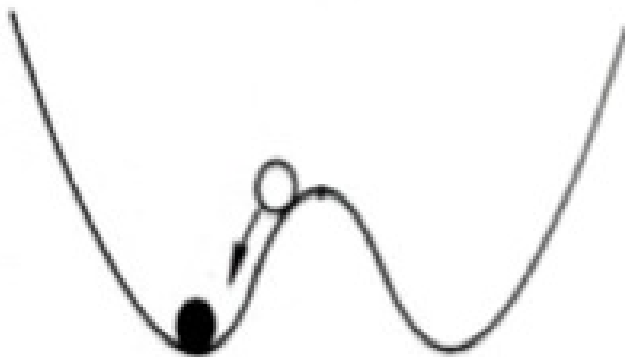
**LETTERE**

**PENSIERO VERTICALE**

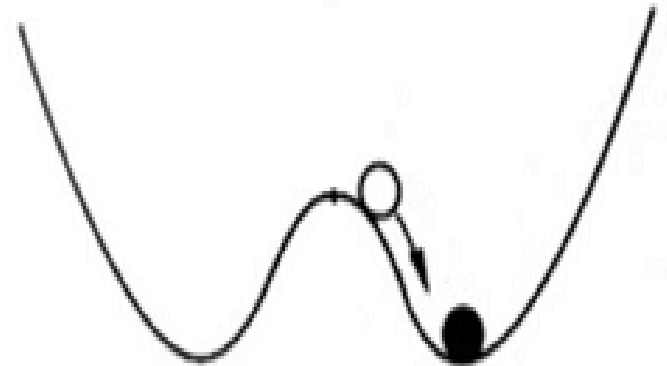
# Soglie critiche nella risoluzione di problemi

Come prosegue questa sequenza?

**U, D, T, Q, C, S, S, O**  
**1 2 3 4 5 6 7 8**



**Punto Critico**



**LETTERE**

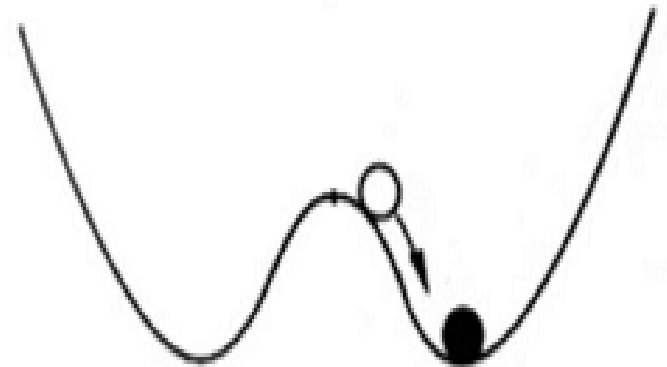
**NUMERI**

**PENSIERO VERTICALE**

# Soglie critiche nella risoluzione di problemi

Come prosegue questa sequenza?

**U , D , T , Q , C , S , S , O**  
**1 2 3 4 5 6 7 8**

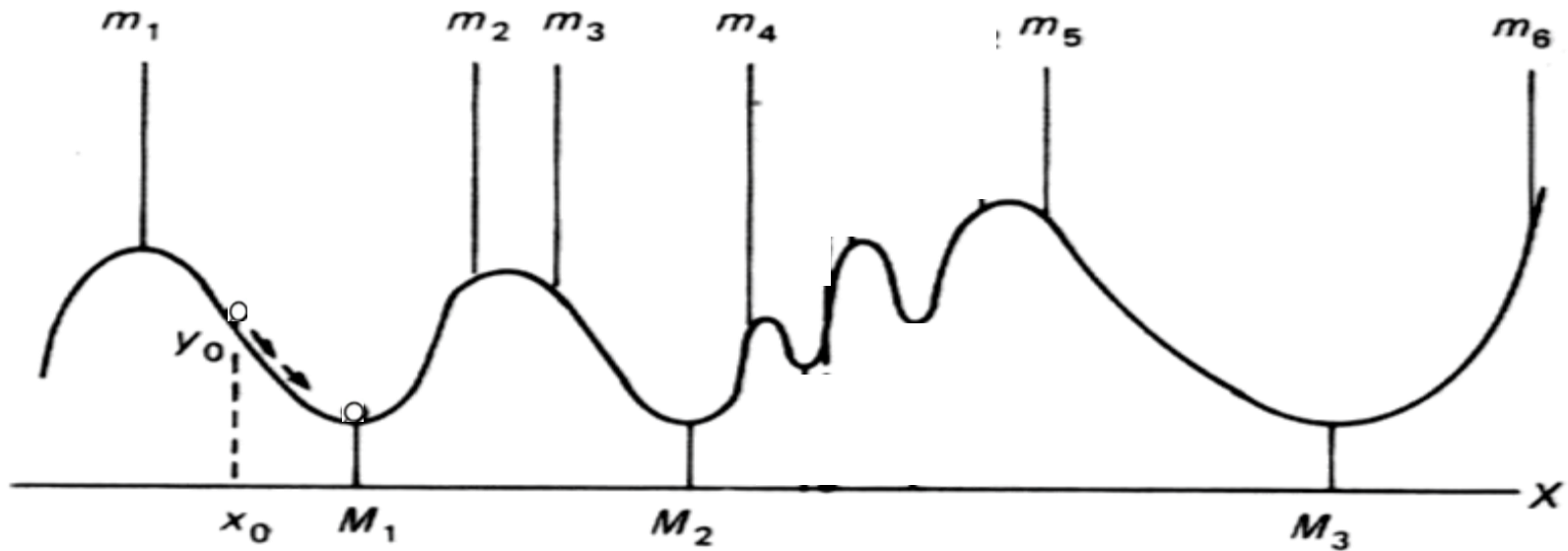


**NUMERI**

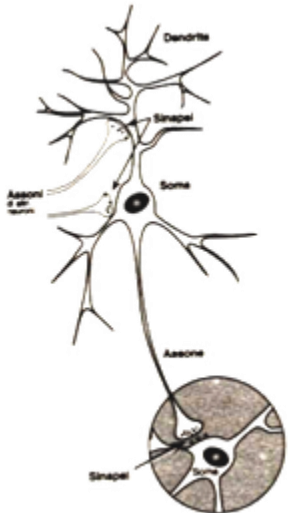
**PENSIERO LATERALE**

# Reti Neurali e Vetri di Spin

Landscape Energetico nei modelli di Memoria Associativa



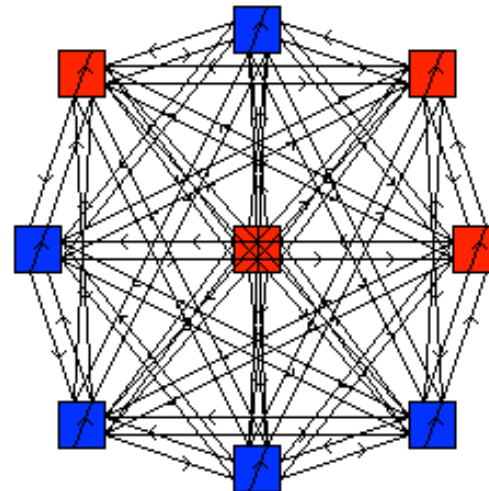
Neurone reale



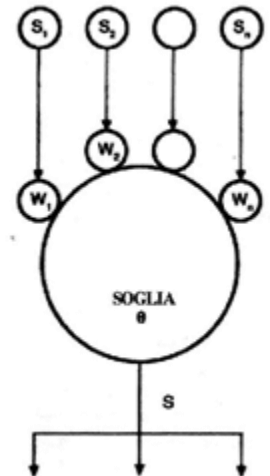
Cervello Umano



Rete Neurale (Hopfield)

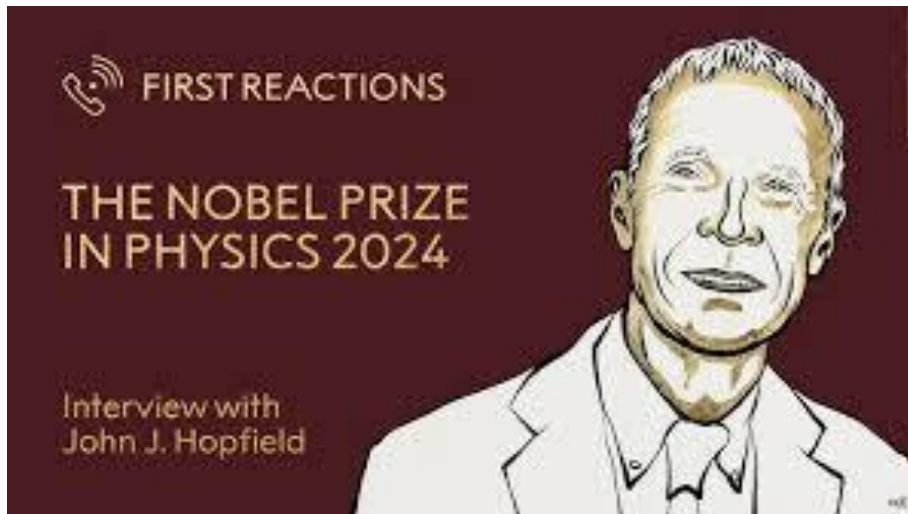
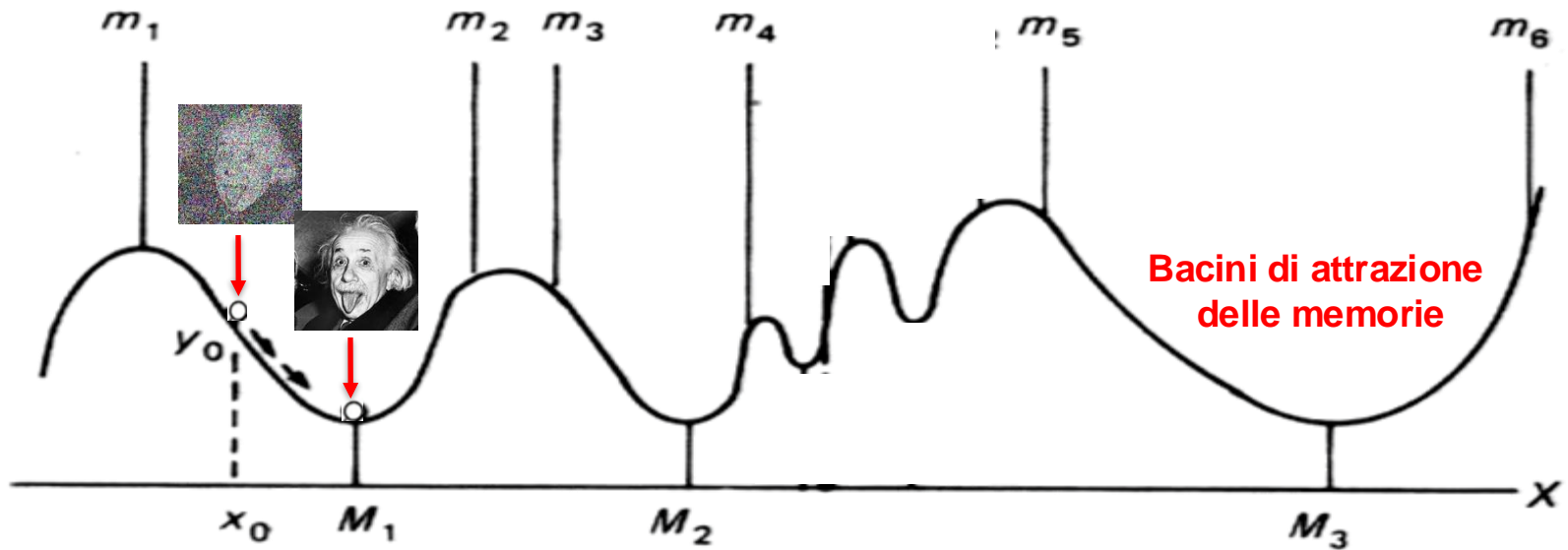


Neurone artificiale

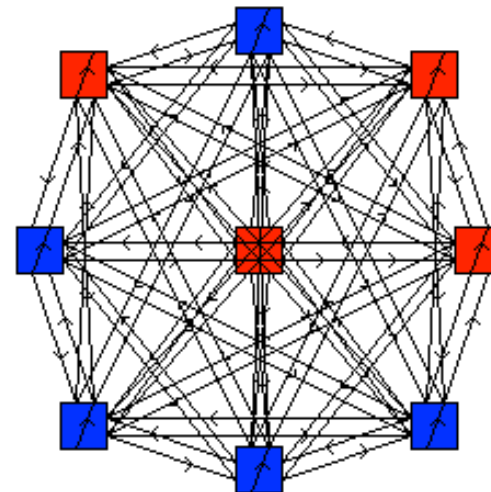


# Reti Neurali e Vetri di Spin

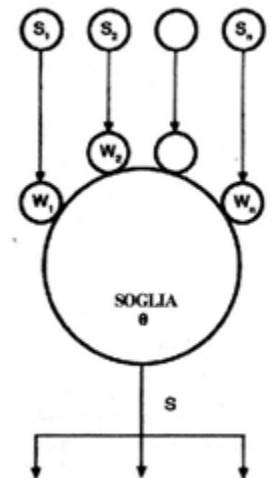
Landscape Energetico nei modelli di Memoria Associativa



Rete Neurale (Hopfield)



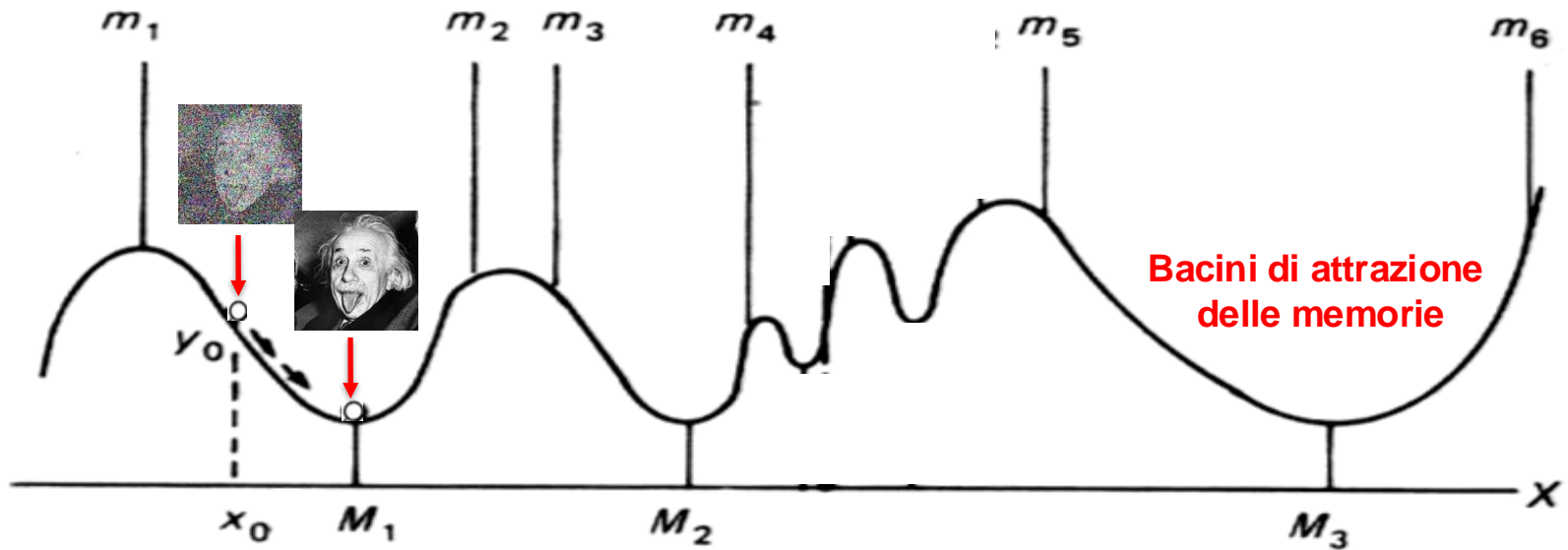
Neurone artificiale



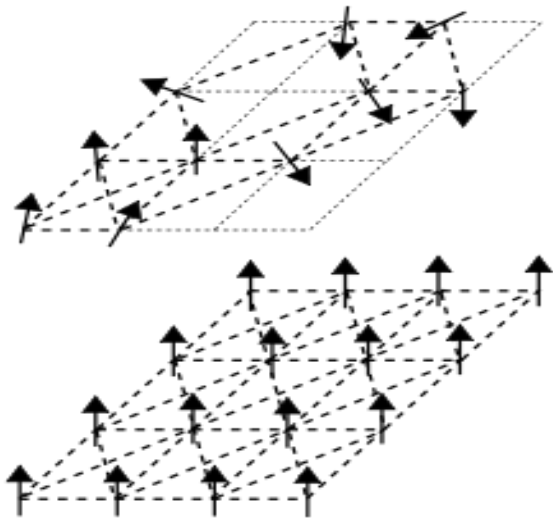


# Reti Neurali e Vetri di Spin

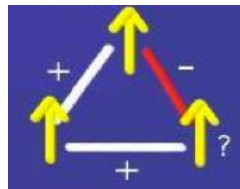
Landscape Energetico nei modelli di Memoria Associativa



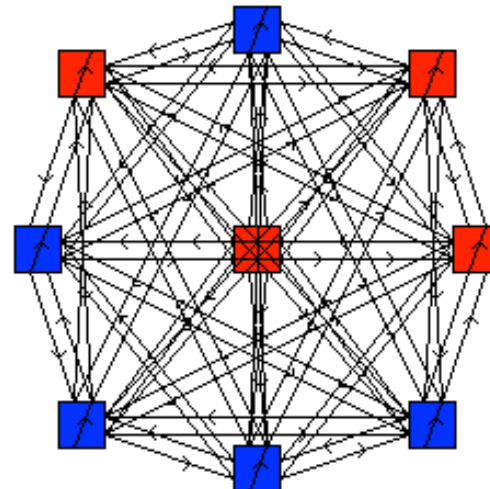
## Vetri di Spin (Spin Glasses)



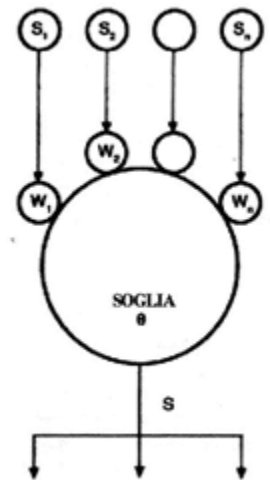
"frustrazione"



## Rete Neurale (Hopfield)

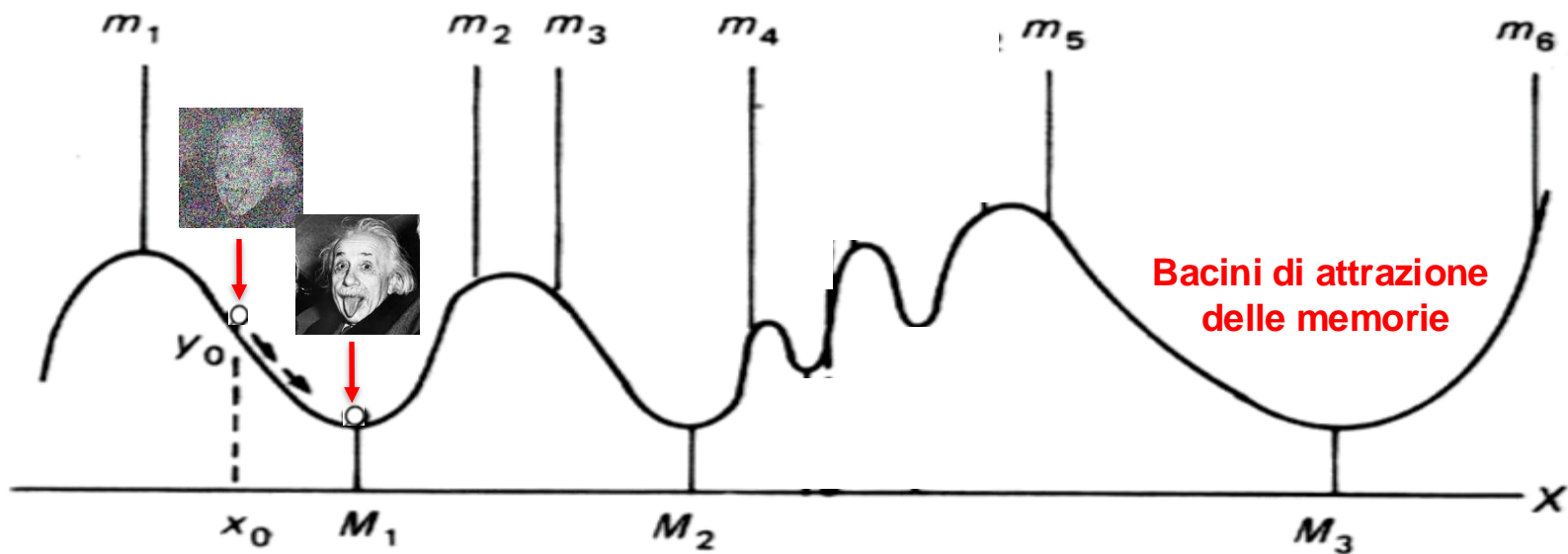


## Neurone artificiale

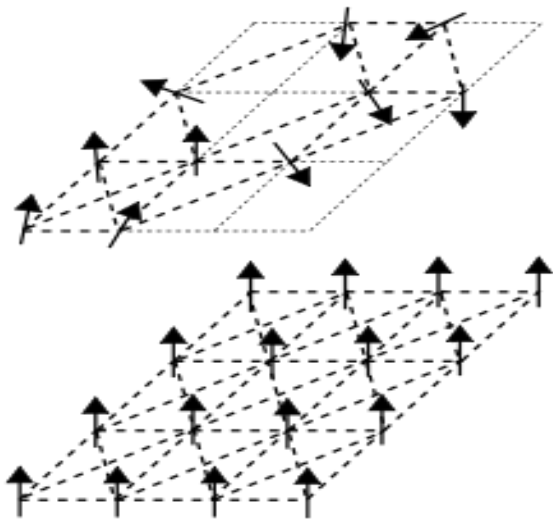


# Reti Neurali e Vetri di Spin

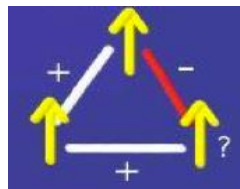
Landscape Energetico nei modelli di Memoria Associativa



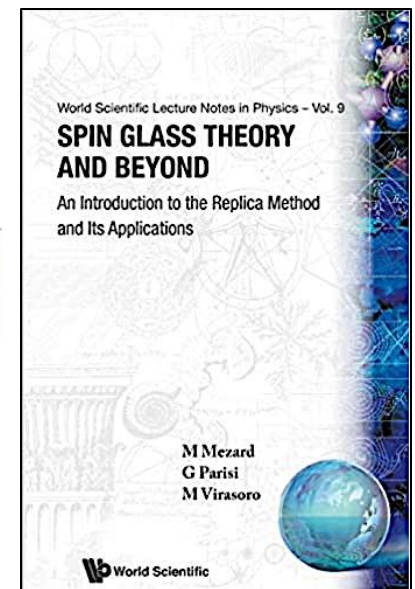
## Vetri di Spin (Spin Glasses)



"frustrazione"



Giorgio Parisi  
Nobel Fisica 2021





M. Granovetter

# Soglie Critiche ed Effetto domino

Soglie di attivazione delle «risse»



## Gruppo A



Soglia media di attivazione: 4,5

C'è l'elemento con soglia 0:  
la rissa inizia!

## Gruppo B



Soglia media di attivazione: 1

Nonostante vi sia una minore soglia di attivazione media rispetto al gruppo A, qui manca l'elemento con soglia 0, quindi la rissa non inizia!

## Gruppo A'



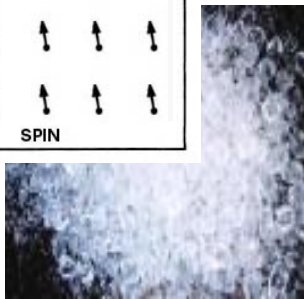
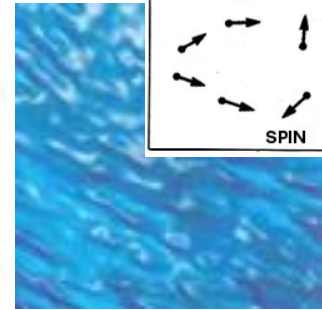
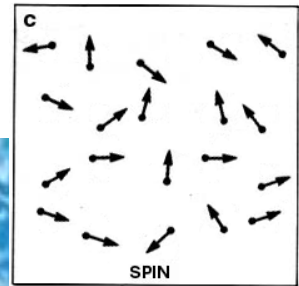
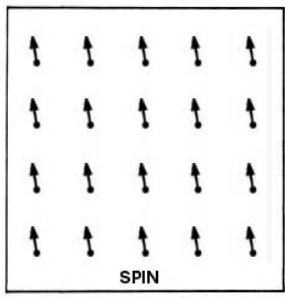
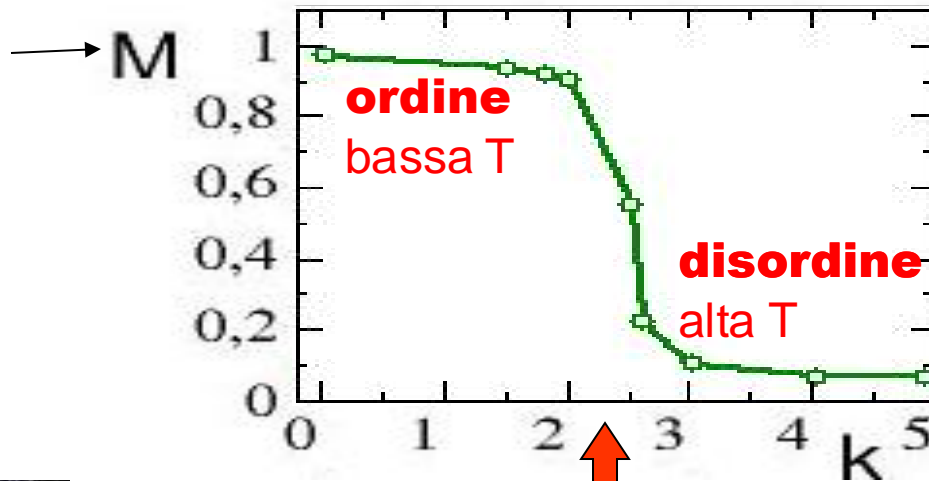
E' quasi identico al gruppo A, ma manca l'elemento con soglia 1: la rissa non inizia (sensibilità alle condizioni iniziali!)



# Dal Punto Critico allo Stato Critico...

Riassumendo, abbiamo visto che dal punto di vista **dinamico**, a causa di **fenomeni cooperativi del tipo effetto domino**, molti sistemi non lineari attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** dopo le quali la loro **struttura** e/o il loro **comportamento** cambia drasticamente...

**parametro d'ordine**



**parametro di controllo**

ad es. la temperatura dell'acqua o di un magnete

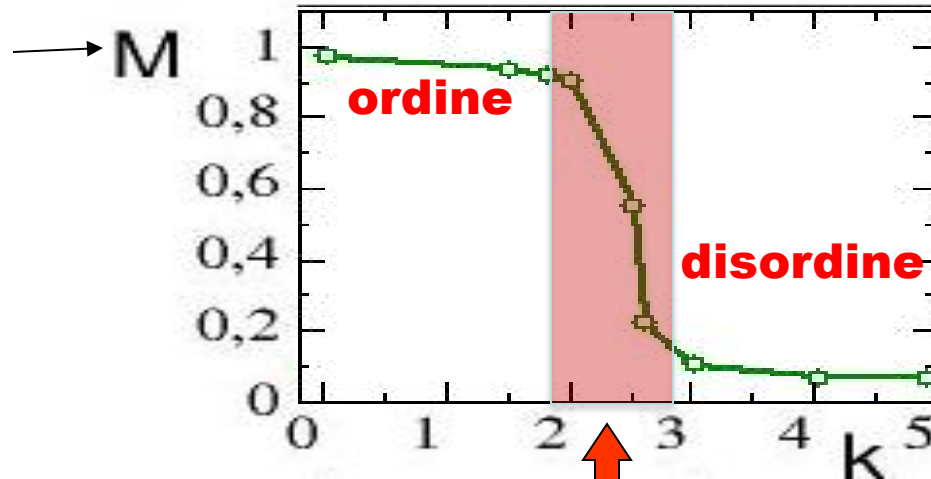
## Temperatura Critica

Bisogna regolare il parametro di controllo per portare il sistema al punto critico

# Dal Punto Critico allo Stato Critico...

In molti **sistemi complessi** questi fenomeni cooperativi sono ancora più eclatanti e fanno sì che essi si portino **SPONTANEMENTE** alla soglia critica e si stabilizzino in un quello che viene chiamato **STATO CRITICO**, al confine tra ordine e disordine, senza bisogno di regolare alcun parametro di controllo...

**parametro  
d'ordine**



**parametro di  
controllo**

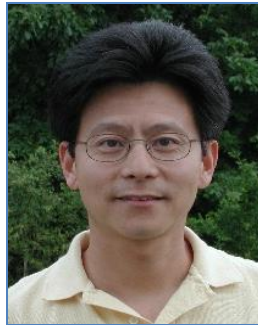


## Stato Critico

Il sistema si porta **SPONTANEMENTE**  
nello stato critico

# Generare Complessità: La Criticità Auto-Organizzata

Negli anni Ottanta, studiando la **formazione delle “valanghe”** in un mucchietto di sabbia, tre ricercatori americani, **Per Bak, Chao Tang e Kurt Weisenfeld**, scoprirono un importante meccanismo basato sull'effetto domino in grado di condurre spontaneamente molti sistemi complessi nello **Stato Critico**: si tratta della **“Criticità Auto-Organizzata”** (SOC), un processo dinamico caratterizzato statisticamente da una ben precisa **“firma matematica”**....



## Valanghe

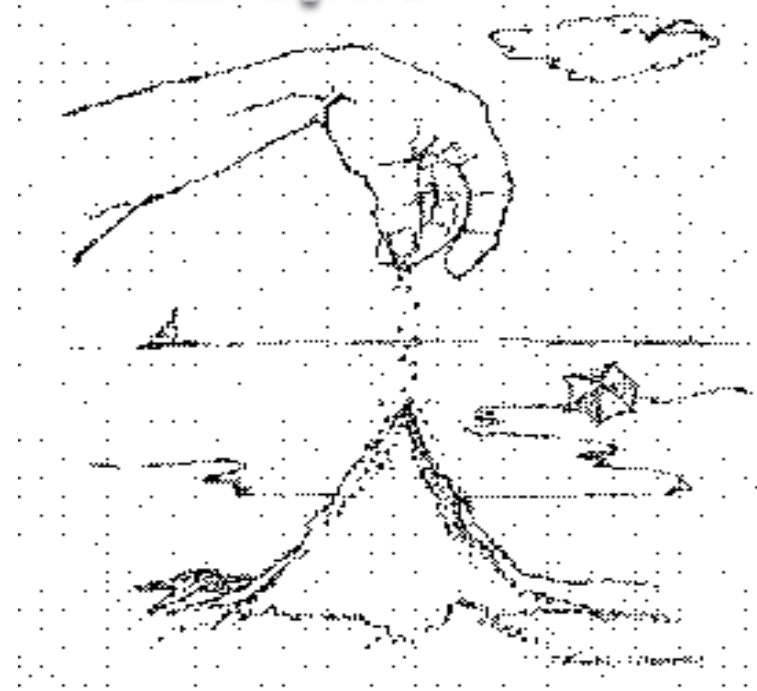


# Generare Complessità: La Criticità Auto-Organizzata

Negli anni Ottanta, studiando la **formazione delle “valanghe”** in un mucchietto di sabbia, tre ricercatori americani, **Per Bak, Chao Tang e Kurt Weisenfeld**, scoprirono un importante meccanismo basato sull'effetto domino in grado di condurre spontaneamente molti sistemi complessi nello **Stato Critico**: si tratta della **“Criticità Auto-Organizzata”** (SOC), un processo dinamico caratterizzato statisticamente da una ben precisa **“firma matematica”**....



## Sandpile Model



P.Bak, C.Tang and K.Weisenfeld, PRL 59 (1987)

# Generare Complessità: La Criticità Auto-Organizzata

Negli anni Ottanta, studiando la **formazione delle “valanghe”** in un mucchietto di sabbia, tre ricercatori americani, **Per Bak, Chao Tang e Kurt Weisenfield**, scoprirono un importante meccanismo basato sull'effetto domino in grado di condurre spontaneamente molti sistemi complessi nello **Stato Critico**: si tratta della **“Criticità Auto-Organizzata”** (SOC), un processo dinamico caratterizzato statisticamente da una ben precisa **“firma matematica”**....





# Generare Complessità: La Criticità Auto-Organizzata

Negli anni Ottanta, studiando la **formazione delle “valanghe”** in un mucchietto di sabbia, tre ricercatori americani, **Per Bak, Chao Tang e Kurt Weisenfeld**, scoprirono un importante meccanismo basato sull'effetto domino in grado di condurre spontaneamente molti sistemi complessi nello **Stato Critico**: si tratta della **“Criticità Auto-Organizzata”** (SOC), un processo dinamico caratterizzato statisticamente da una ben precisa **“firma matematica”**....

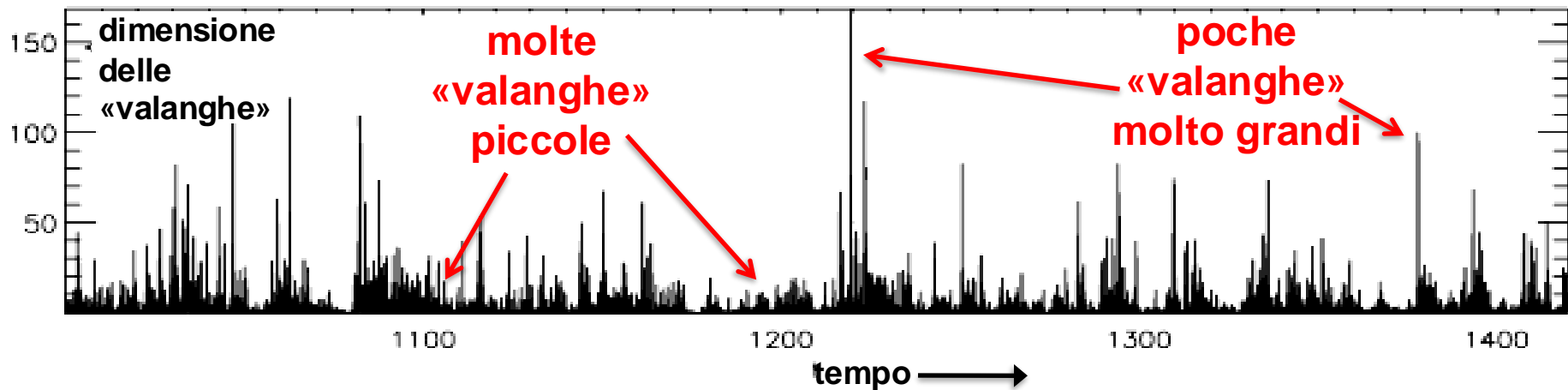


# Generare Complessità: La Criticità Auto-Organizzata

Negli anni Ottanta, studiando la **formazione delle «valanghe»** in un mucchietto di sabbia, tre ricercatori americani, **Per Bak, Chao Tang e Kurt Wiesenfeld**, scoprirono un importante meccanismo basato sull'effetto domino in grado di condurre spontaneamente molti sistemi complessi nello **Stato Critico**: si tratta della **«Criticità Auto-Organizzata»** (SOC), un processo dinamico caratterizzato statisticamente da una ben precisa **«firma matematica»**....



## EFFETTO DOMINO!

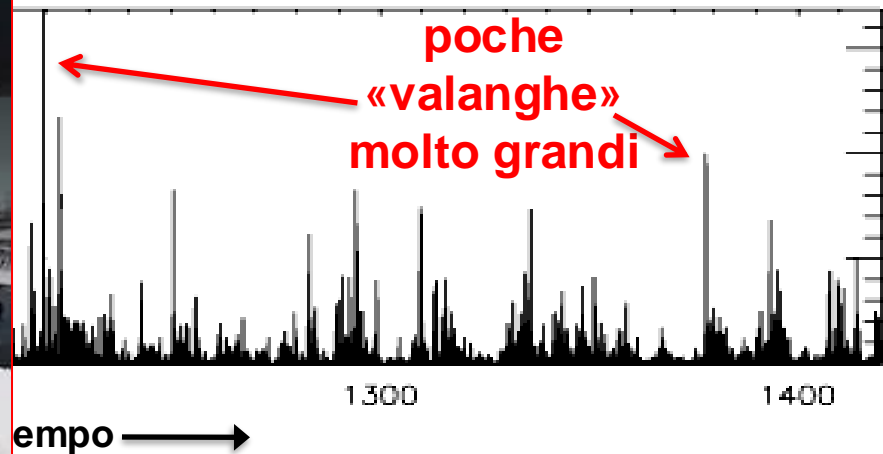
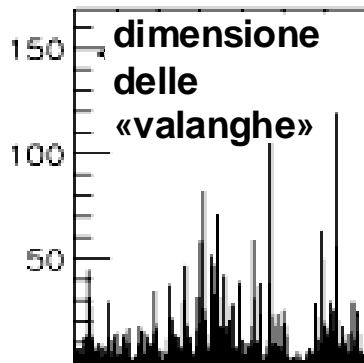


# Generare Complessità: La Criticità Auto-Organizzata

Negli anni Ottanta, studiando la **formazione delle “valanghe”** in un mucchietto di sabbia, tre ricercatori americani, **Per Bak, Chao Tang e Kurt Weisenfeld**, scoprirono un importante meccanismo basato sull'effetto domino in grado di condurre spontaneamente molti sistemi complessi nello **Stato Critico**: si tratta della **“Criticità Auto-Organizzata”** (SOC), un processo dinamico caratterizzato statisticamente da una ben precisa **“firma matematica”**....



## EFFETTO DOMINO!

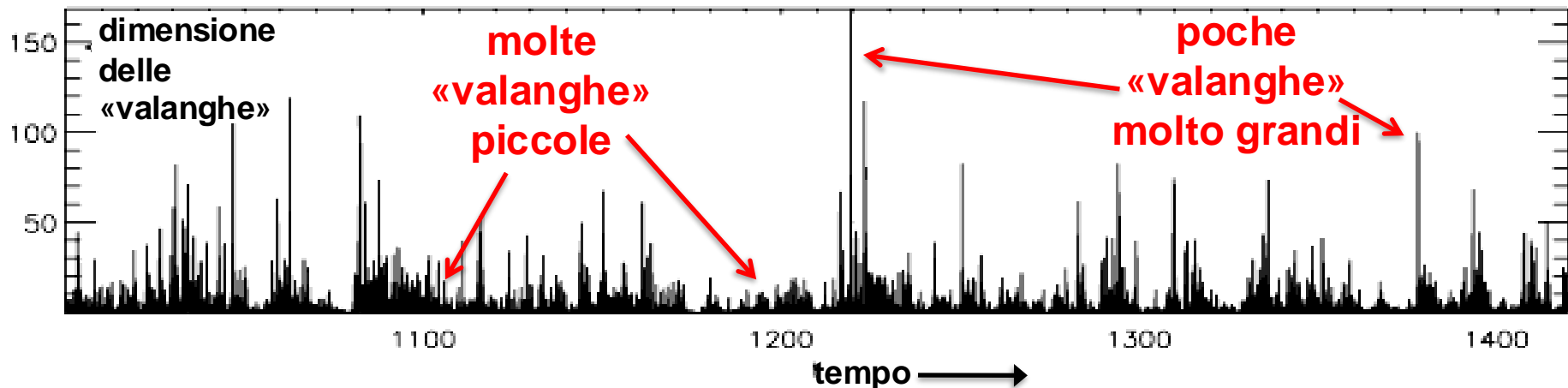


# Generare Complessità: La Criticità Auto-Organizzata

Negli anni Ottanta, studiando la **formazione delle «valanghe»** in un mucchietto di sabbia, tre ricercatori americani, **Per Bak, Chao Tang e Kurt Wiesenfeld**, scoprirono un importante meccanismo basato sull'effetto domino in grado di condurre spontaneamente molti sistemi complessi nello **Stato Critico**: si tratta della **«Criticità Auto-Organizzata»** (SOC), un processo dinamico caratterizzato statisticamente da una ben precisa **«firma matematica»**....



**Ma che forma ha la distribuzione statistica di queste «valanghe»? Qual è la sua «firma matematica»?**



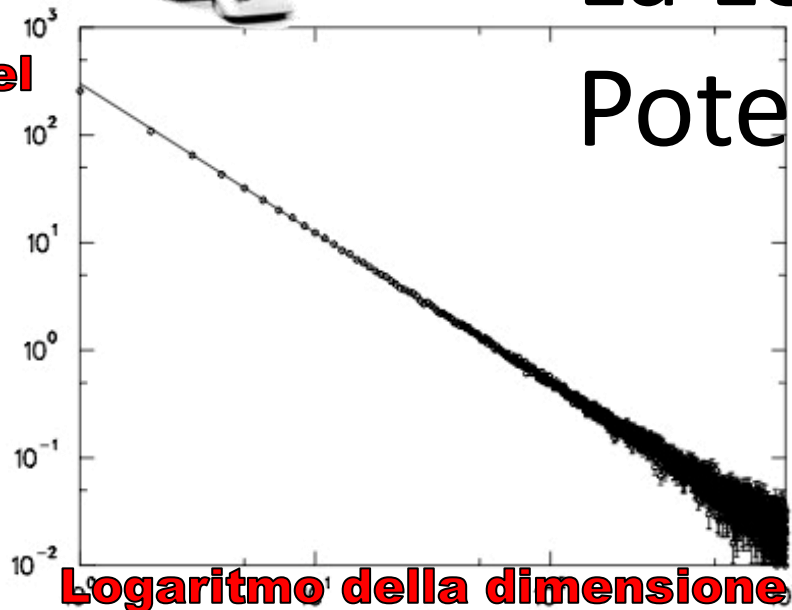
# Generare Complessità: La Criticità Auto-Organizzata

Negli anni Ottanta, studiando la **formazione delle “valanghe”** in un mucchietto di sabbia, tre ricercatori americani, **Per Bak, Chao Tang e Kurt Wiesenfeld**, scoprirono un importante meccanismo basato sull'effetto domino in grado di condurre spontaneamente molti sistemi complessi nello **Stato Critico**: si tratta della **“Criticità Auto-Organizzata”** (SOC), un processo dinamico caratterizzato statisticamente da una ben precisa **“firma matematica”**....



## La Legge di Potenza

**Logaritmo del numero di valanghe**



**Logaritmo della dimensione delle valanghe**

# La Criticità Auto-organizzata e gli Incendi

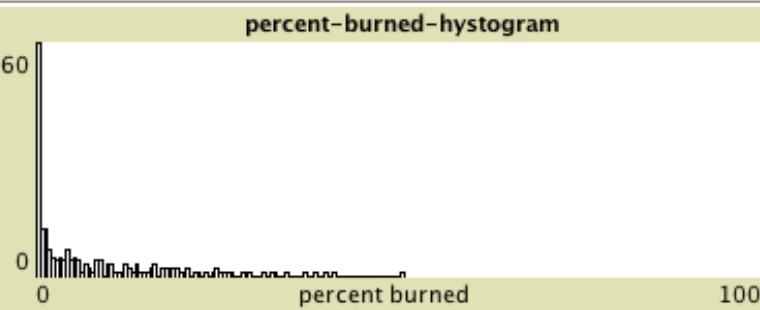
SETUP      START FIRE

number-of-repetitions: 500      n\_events: 203

density-of-trees: 58%      percent burned: 17.9

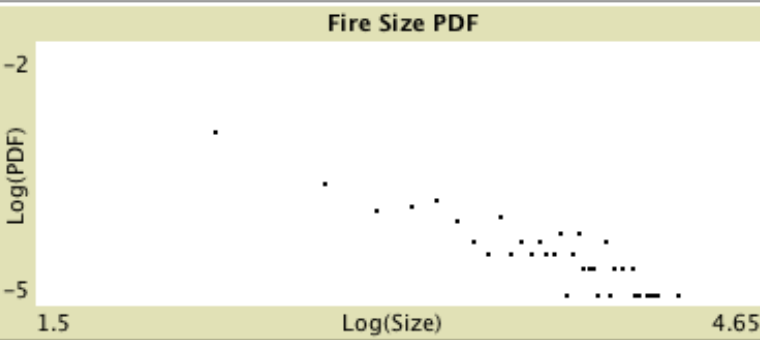
number-of-firing-points: 1

percent-burned-histogram



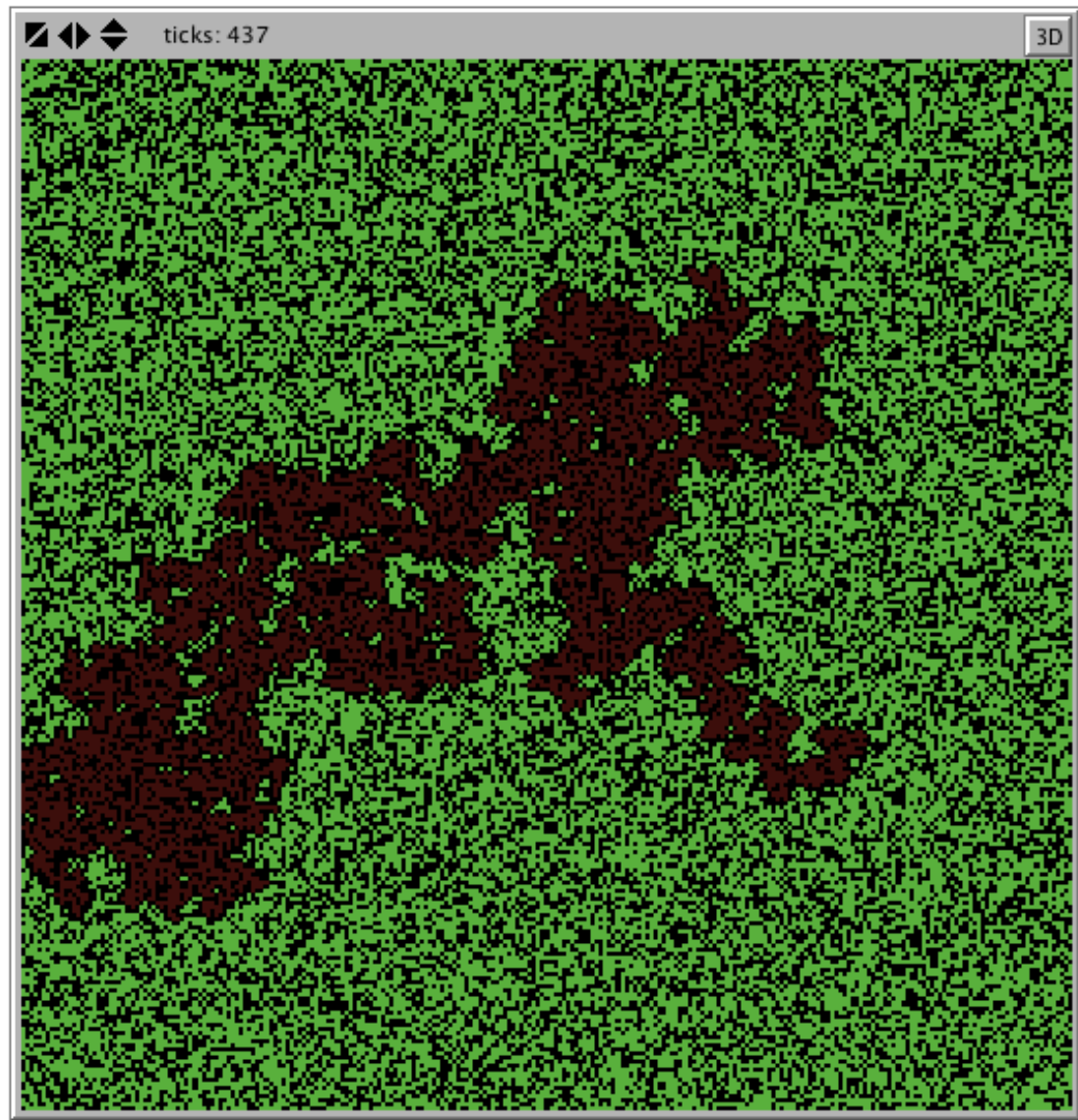
The histogram shows the distribution of percent burned. The x-axis is labeled 'percent burned' and ranges from 0 to 100. The y-axis represents frequency, with a peak at 60. The distribution is highly skewed towards zero, with a long tail extending towards 100.

Fire Size PDF



The plot shows the probability density function of fire sizes on a log-log scale. The x-axis is labeled 'Log(Size)' and ranges from 1.5 to 4.65. The y-axis is labeled 'Log(PDF)' and ranges from -2 to -5. The data points form a downward-sloping line, indicating a power-law distribution of fire sizes.

On size-pdf-view      waiting-time: 0.000

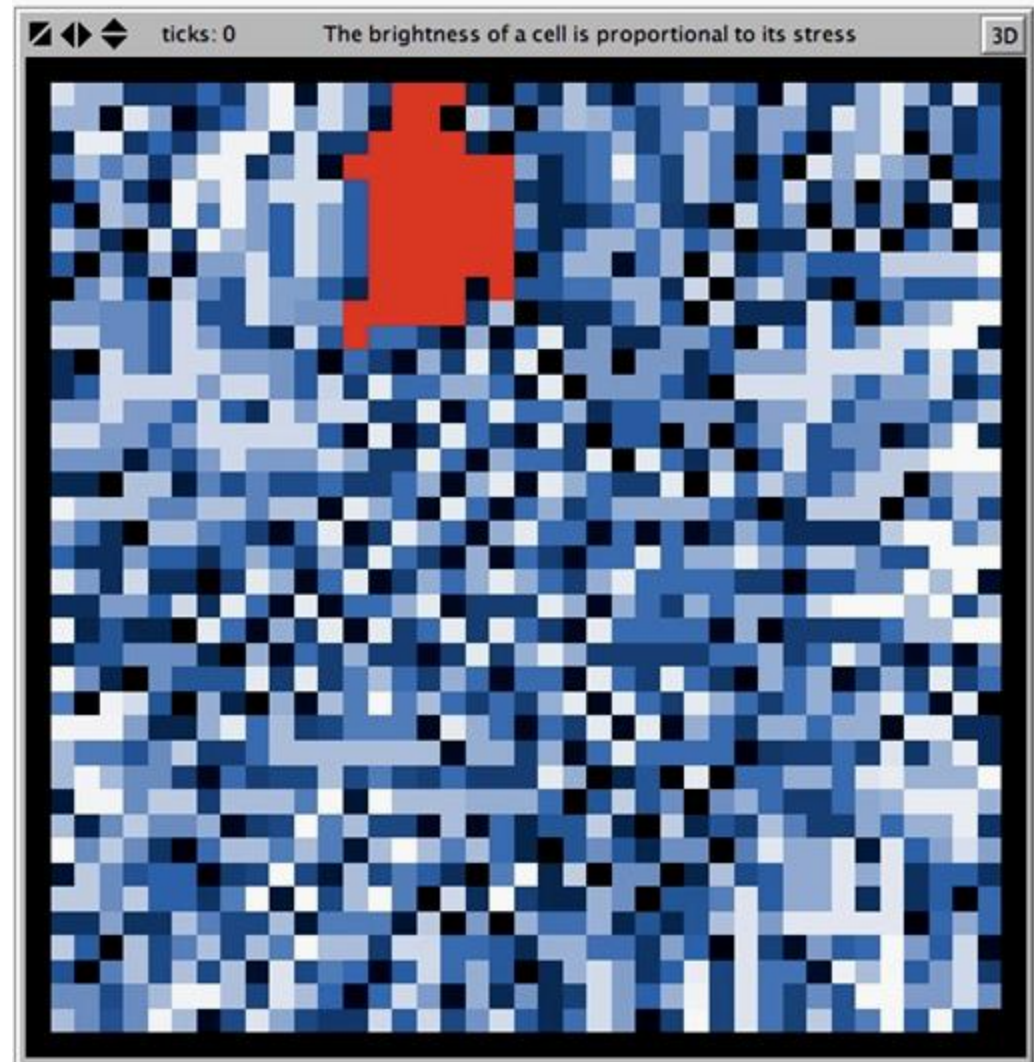


# La Criticità Auto-organizzata e i Terremoti: il modello OFC

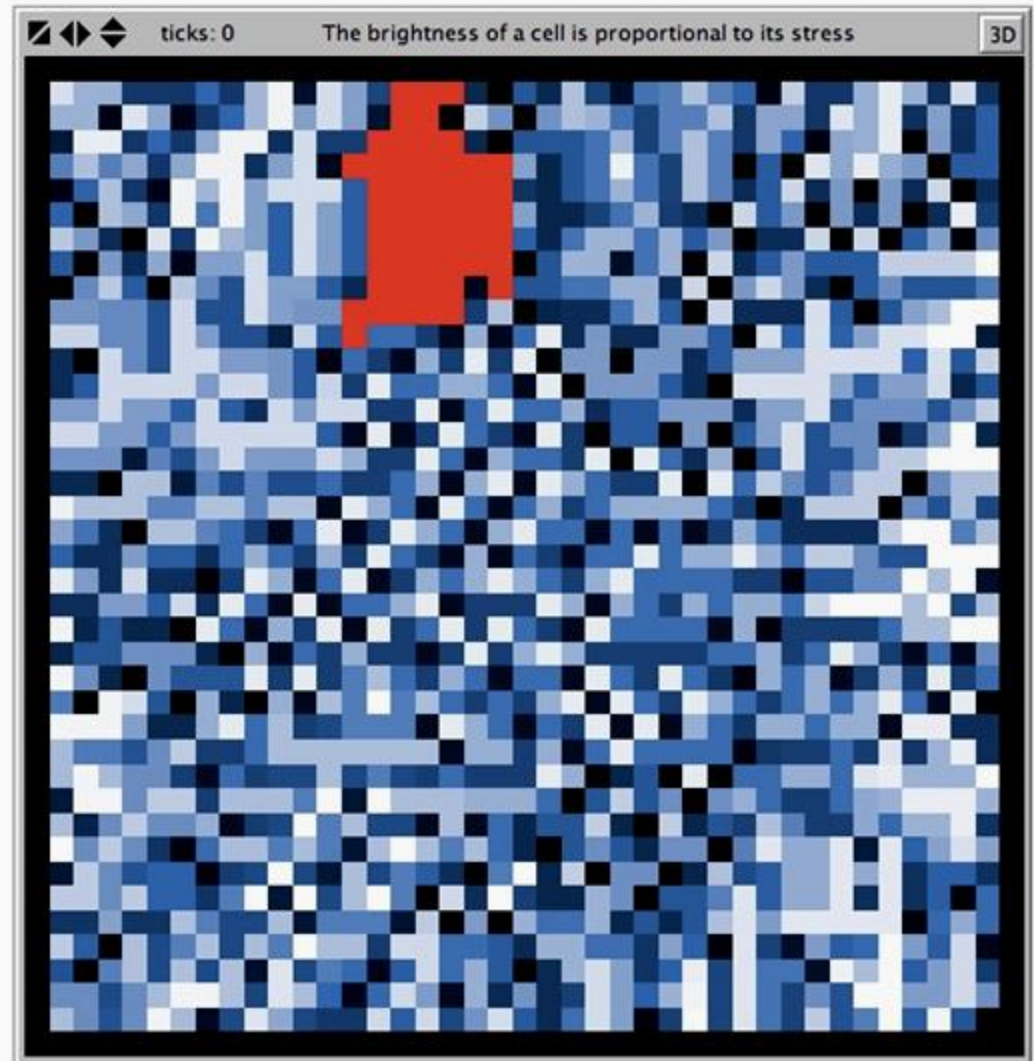
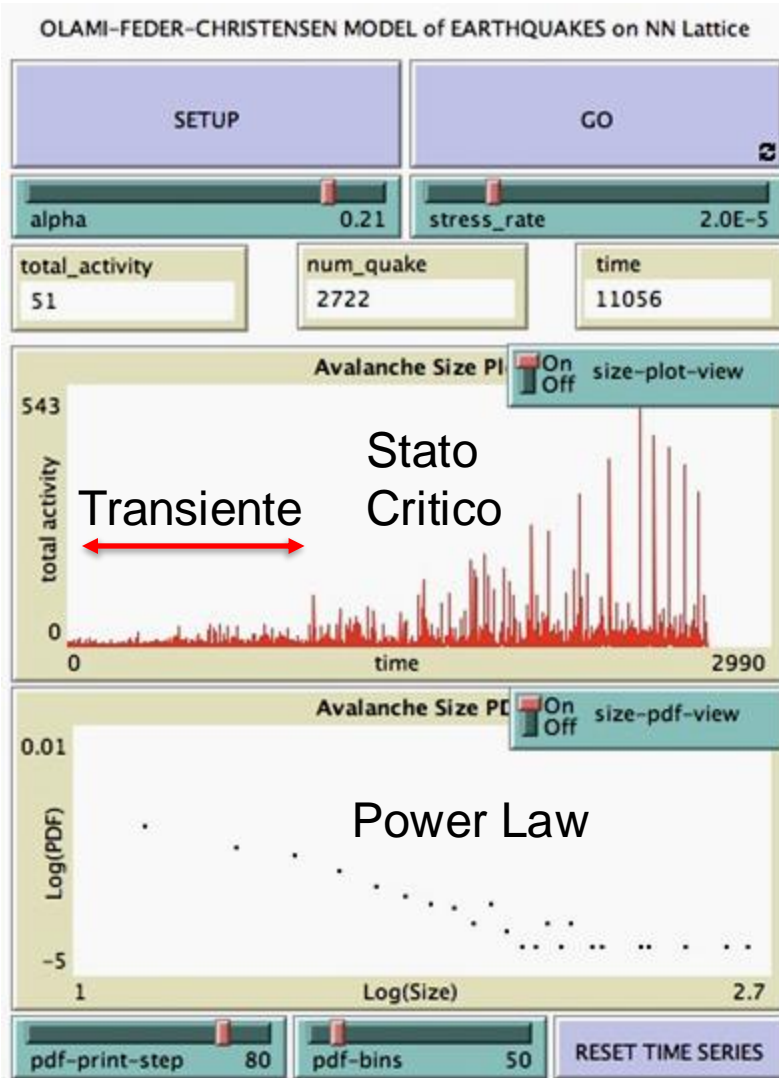
Nel **modello OFC** ogni celletta simula un blocco di crosta terrestre soggetto a uno **stress sismico**  $F_i$  (l'intensità del colore blu è proporzionale allo stress). Inizialmente lo stress su ogni celletta è distribuito casualmente, poi viene fatto **umentare gradualmente in maniera uniforme** per simulare ad esempio uno spostamento di faglia. Appena lo stress su una certa celletta supera la **soglia critica**  $F_{th}$  (uguale per tutte le cellette) parte l'effetto domino: la celletta in questione (colorata in rosso) scarica tutto il suo stress sulle cellette vicine (a meno di un certo fattore di **dissipazione** regolato dal parametro  $\alpha$ ), che a loro volta, grazie a questo surplus di stress, potrebbero superare la soglia (diventando rosse) e scaricare sulle vicine, e così via, finchè non ci sono più celle che superano la soglia.

$$F_i \geq F_{th} \Rightarrow \begin{cases} F_i \rightarrow 0, \\ F_{nn} \rightarrow F_{nn} + \alpha F_i \end{cases}$$

Il **numero totale di celle rosse** alla fine dell'evento sismico rappresenta la sua «**size**», o dimensione, legata (nella realtà) all'energia rilasciata.

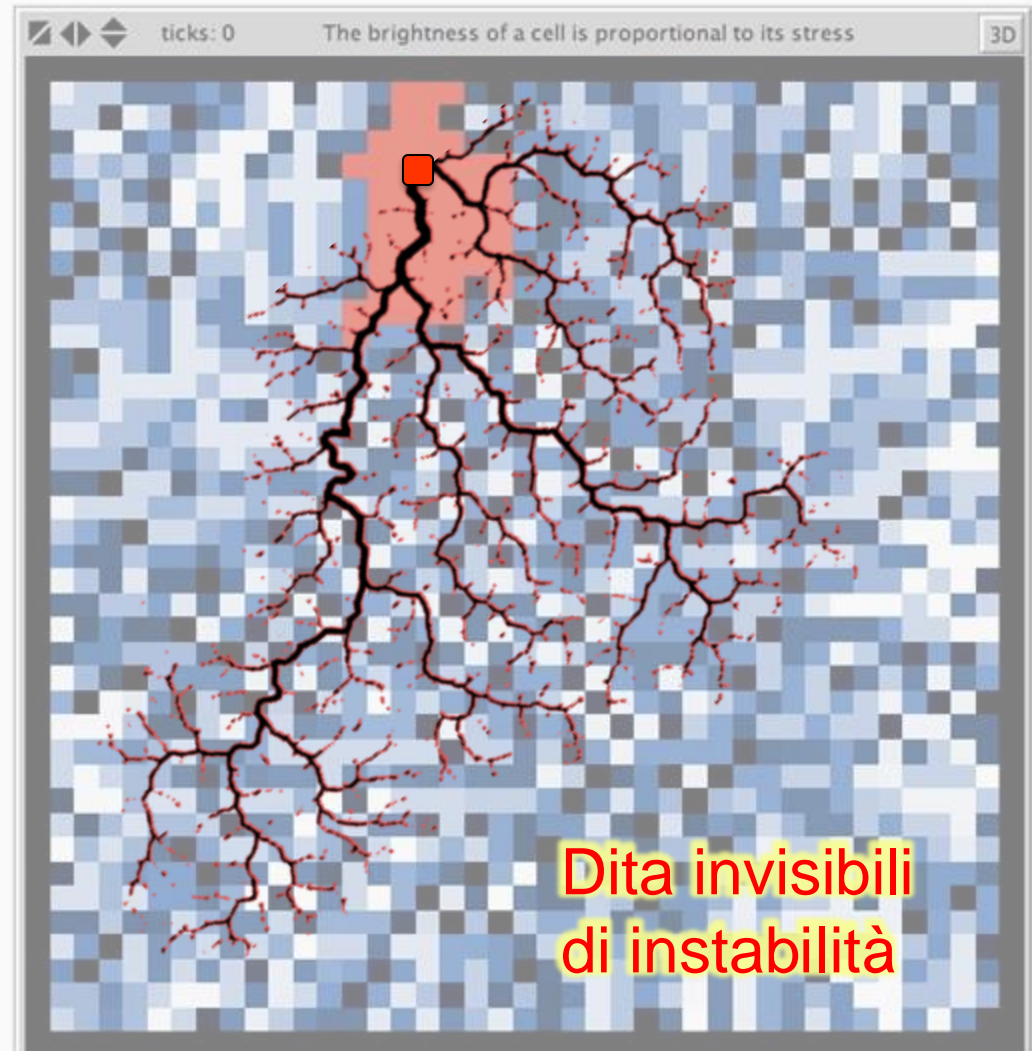
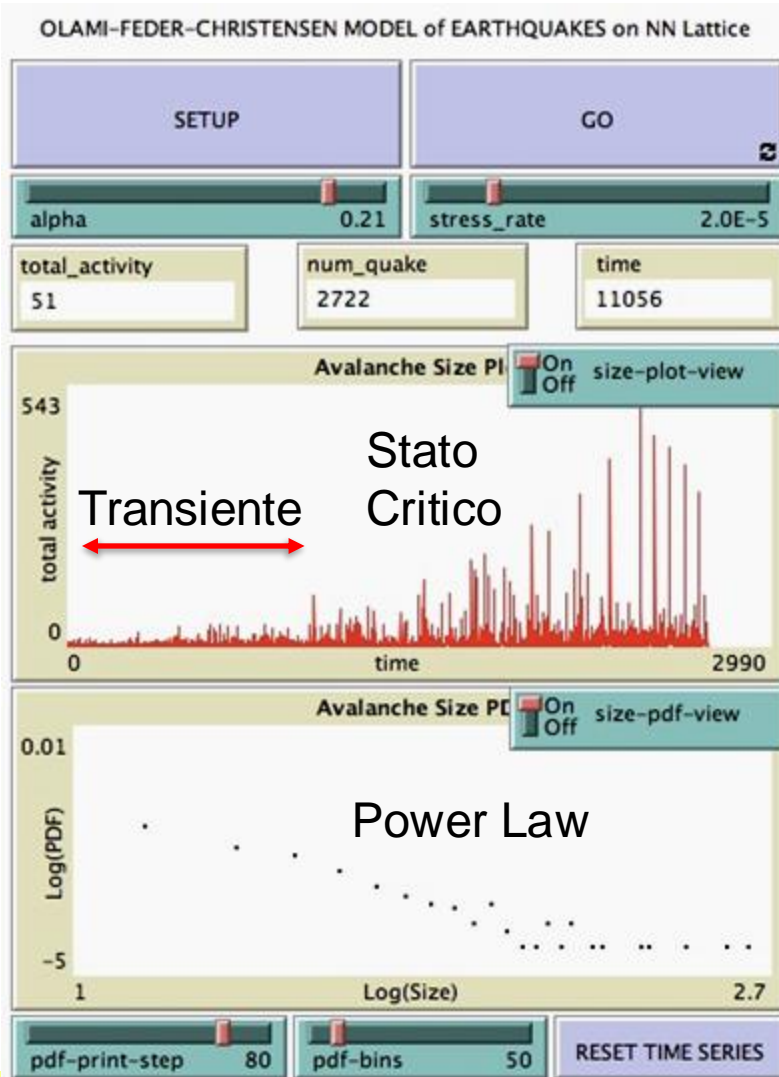


# La Criticità Auto-organizzata e i Terremoti: il modello OFC





# La Criticità Auto-organizzata e i Terremoti: il modello OFC



La dinamica dello stato critico implica quindi che **tutti i terremoti (così come le valanghe o gli incendi) nascono «piccoli»**. Se e quanto diventeranno «grandi», dipende solo dalle **dita invisibili di instabilità** che percorrono il sistema. Per questo motivo, **prevedere** l'occorrenza di questi eventi estremi in sistemi nello stato critico è di fatto **impossibile**.



**uragani**



**estinzioni**



**crolli in Borsa**



**epidemie**

**terremoti**



**incendi**



**cambiamenti di paradigma**



**guerre**

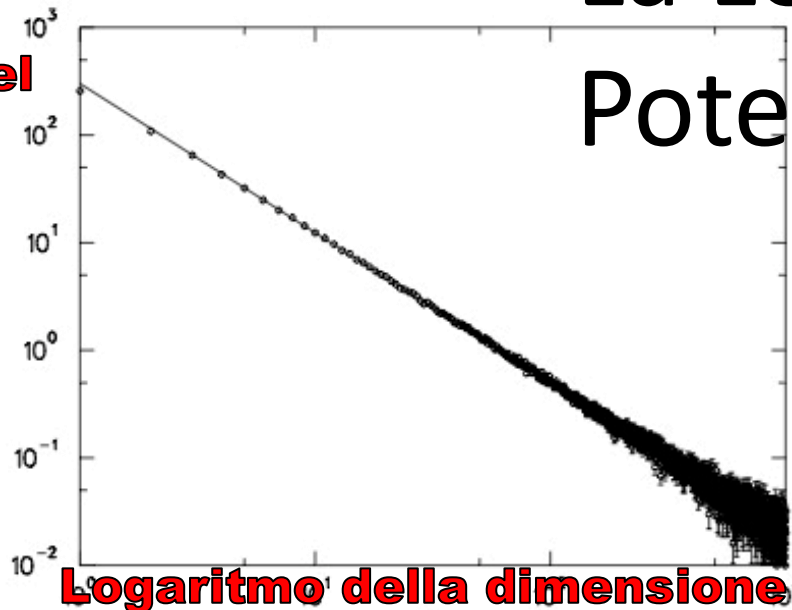


I **sistemi complessi** che si auto-organizzano nello **stato critico** si trovano in una condizione di estrema **instabilità e intermittenza**, molto sensibile alle condizioni iniziali e fortemente dipendente dalla storia passata del sistema, nella quale **cause** anche molto **piccole** possono essere amplificate per «effetto domino», in maniera **imprevedibile**, da “dita invisibili” di instabilità, fino a produrre **effetti** (“eventi”: terremoti, uragani, incendi, etc...) di qualunque dimensione, distribuiti a legge di potenza!

# La Legge di Potenza



**Logaritmo del numero di eventi**



**Logaritmo della dimensione degli eventi**



**uragani**



**estinzioni**



**crolli in Borsa**



**epidemie**

**terremoti**



**incendi**



**cambiamenti di paradigma**



**guerre**

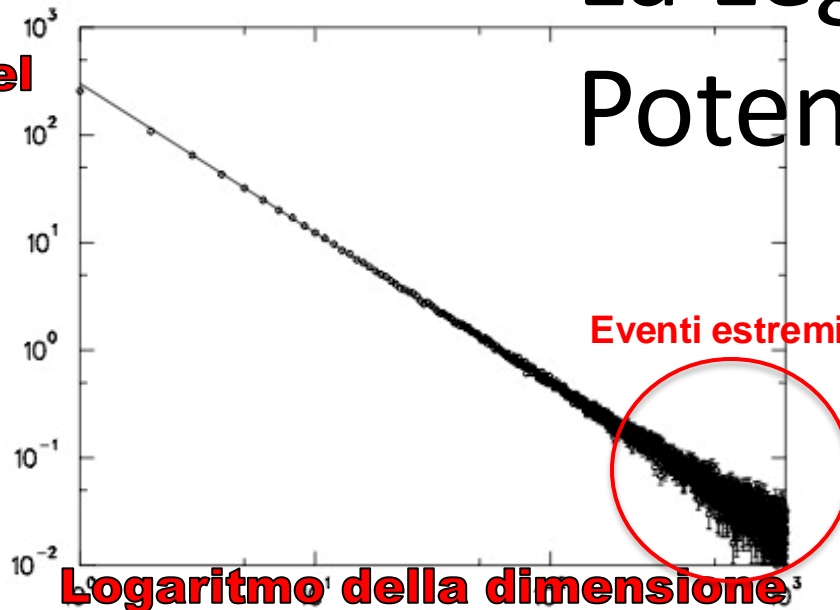


I **sistemi complessi** che si auto-organizzano nello **stato critico** si trovano in una condizione di estrema **instabilità e intermittenza**, molto sensibile alle condizioni iniziali e fortemente dipendente dalla storia passata del sistema, nella quale **cause** anche molto **piccole** possono essere amplificate per «effetto domino», in maniera **imprevedibile**, da “dita invisibili” di instabilità, fino a produrre **effetti** (“eventi”: terremoti, uragani, incendi, etc...) di qualunque dimensione, distribuiti a legge di potenza!

# La Legge di Potenza



**Logaritmo del numero di eventi**



**Logaritmo della dimensione degli eventi**



**uragani**



**estinzioni**



**crolli in Borsa**



**epidemie**

**terremoti**



**incendi**



**cambiamenti di paradigma**



**guerre**

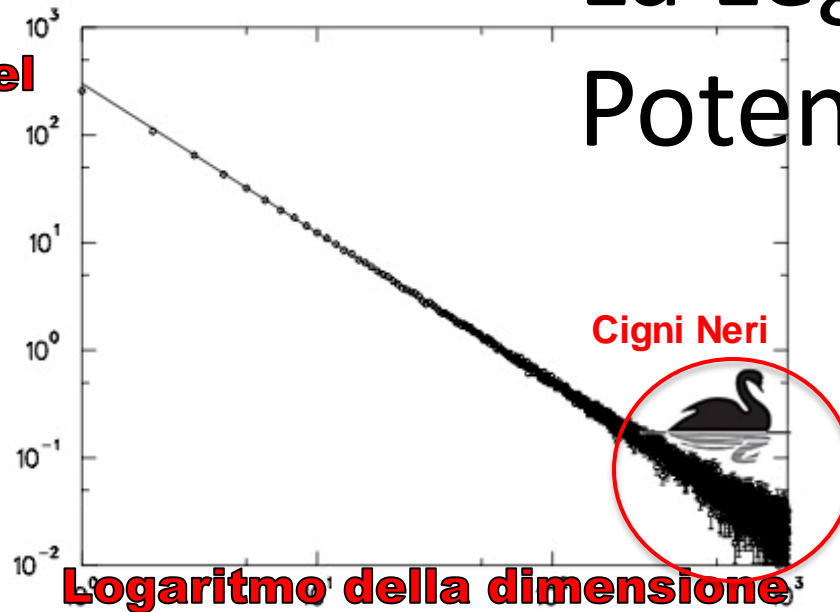


I **sistemi complessi** che si auto-organizzano nello **stato critico** si trovano in una condizione di estrema **instabilità e intermittenza**, molto sensibile alle condizioni iniziali e fortemente dipendente dalla storia passata del sistema, nella quale **cause** anche molto **piccole** possono essere amplificate per «effetto domino», in maniera **imprevedibile**, da “dita invisibili” di instabilità, fino a produrre **effetti** (“eventi”: terremoti, uragani, incendi, etc...) di qualunque dimensione, distribuiti a legge di potenza!

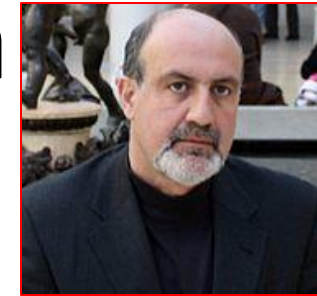
# La Legge di Potenza



**Logaritmo del numero di eventi**



**Logaritmo della dimensione degli eventi**



**Nassim Nicholas Taleb**



**uragani**



**terremoti**



**incendi**



**estinzioni**



**cambiamenti di paradigma**



**crolli in Borsa**



**guerre**



**epidemie**



# La Legge di



**Esempi di eventi estremi**



**La grande Estinzione dei Dinosauri 66 Mln di Anni Fa**



**uragani**



**estinzioni**



**crolli in Borsa**



**epidemie**

**terremoti**



**incendi**



**cambiamenti di paradigma**



**guerre**

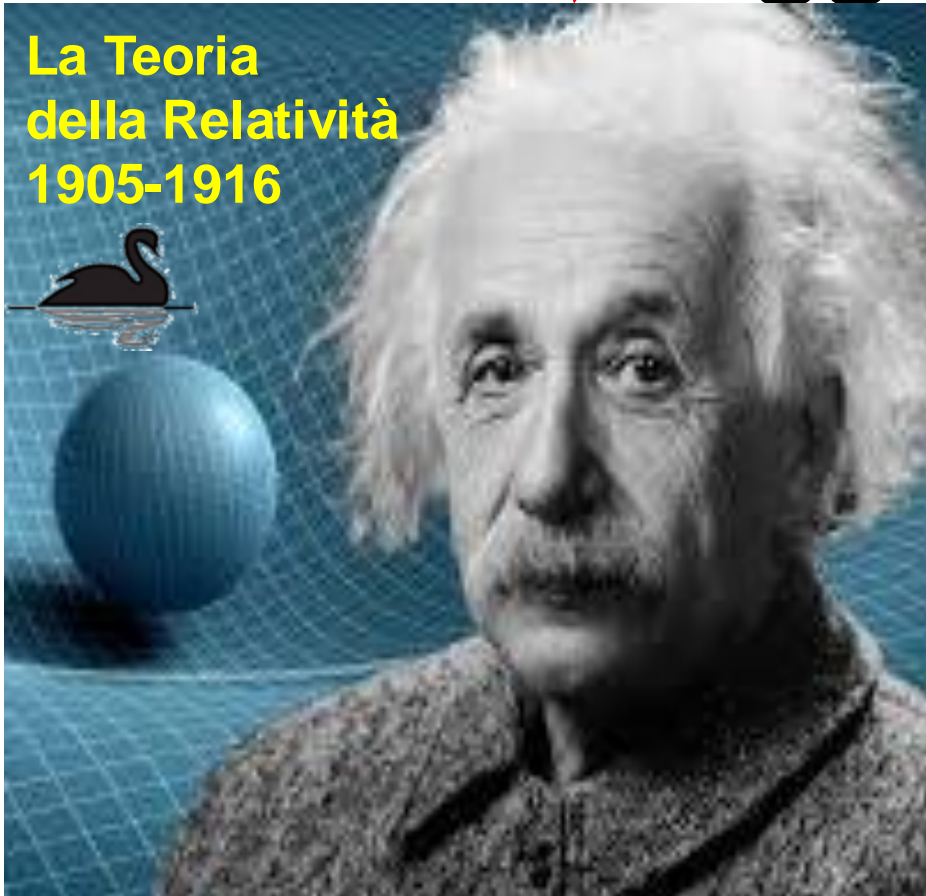


# La Legge di



**Esempi di eventi estremi**

**La Teoria della Relatività 1905-1916**





**uragani**



**estinzioni**



**crolli in Borsa**



**epidemie**

**terremoti**



**incendi**



**cambiamenti di paradigma**



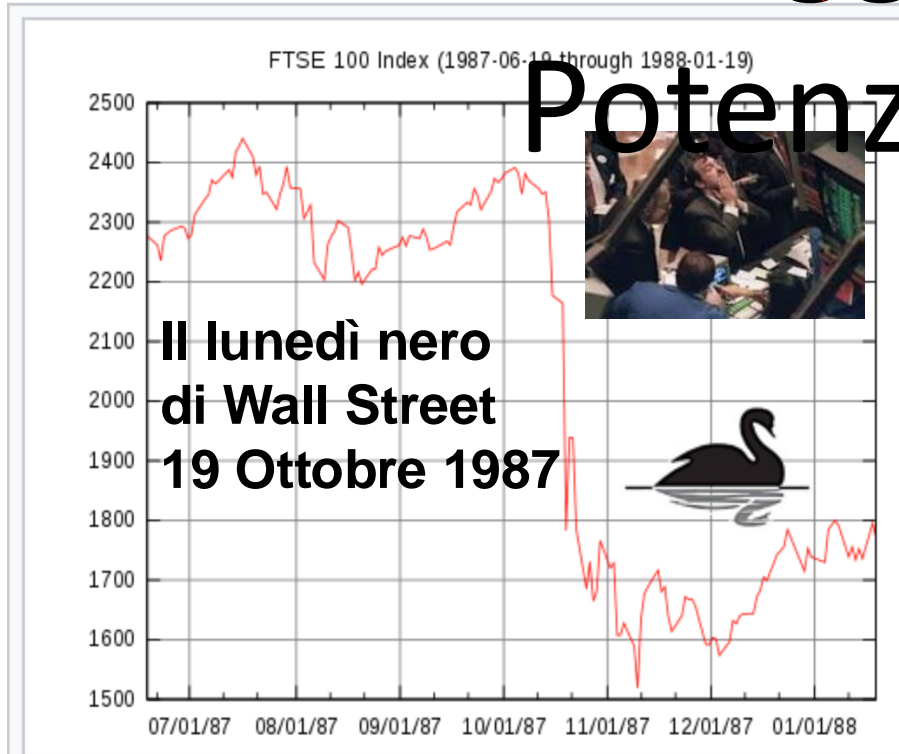
**guerre**



# La Legge di Potenza



**Esempi di eventi estremi**



Indice FTSE 100 della Borsa di Londra  
(dal 19 giugno 1987 al 19 gennaio 1988)





**uragani**



**terremoti**



**incendi**



**estinzioni**



**cambiamenti di paradigma**

**crolli in Borsa**



**guerre**

**epidemie**



# La Legge di Potenza



**Esempi di eventi estremi**



L'incendio di Yellowstone del 1988



1988



Lo Yellowstone National Park brucia





**uragani**



**estinzioni**



**crolli in Borsa**



**epidemie**

**terremoti**



**incendi**



**cambiamenti di paradigma**



**guerre**



# La Legge di



**Esempi di eventi estremi**



**L'uragano Andrew del 1992**

za



**uragani**



**estinzioni**



**crolli in Borsa**



**epidemie**

**terremoti**



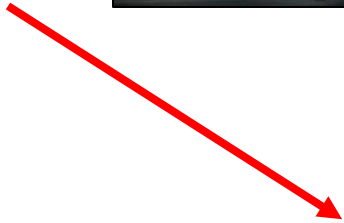
**incendi**



**cambiamenti di paradigma**

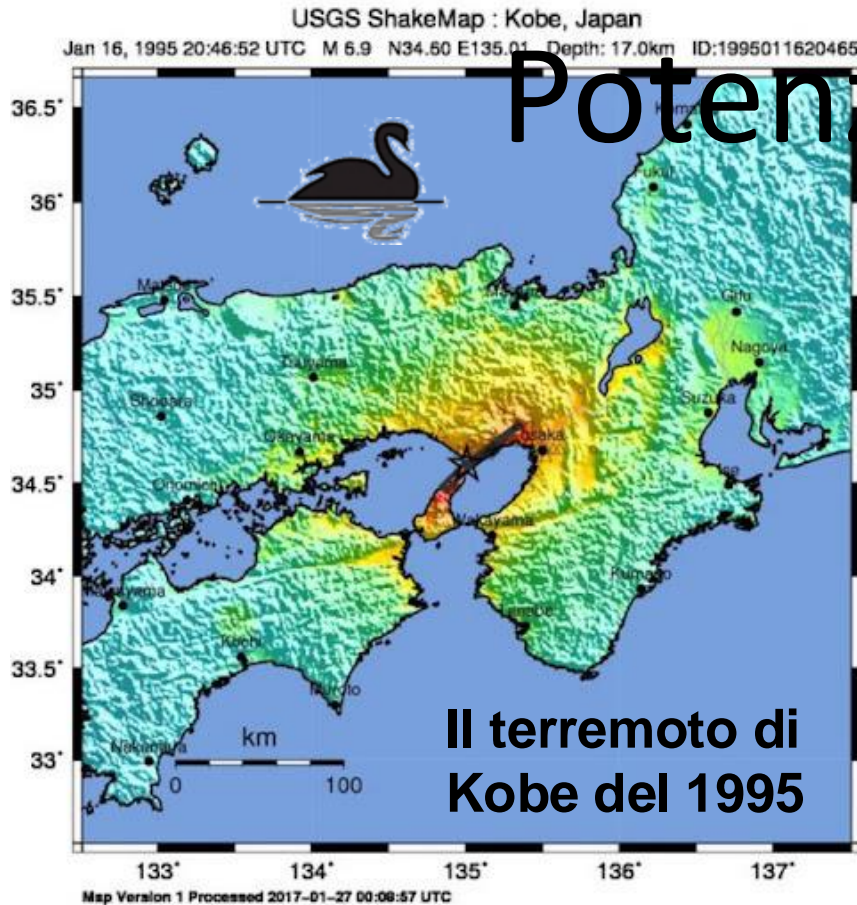


**guerre**



**Esempi di eventi estremi**

# La Legge di Potenza





**uragani**



**terremoti**



**incendi**



**estinzioni**



**cambiamenti di paradigma**

**crolli in Borsa**



**guerre**

**epidemie**



# La Legge di



**Esempi di eventi estremi**





**uragani**



**terremoti**



**incendi**



**estinzioni**



**cambiamenti di paradigma**



**crolli in Borsa**



**guerre**



**epidemie**

La Legge di

Potenza

**Esempi di eventi estremi**



**La Prima Guerra Mondiale (1914)**





**uragani**



**terremoti**



**incendi**



**estinzioni**



**cambiamenti di paradigma**



**crolli in Borsa**



**guerre**



**epidemie**

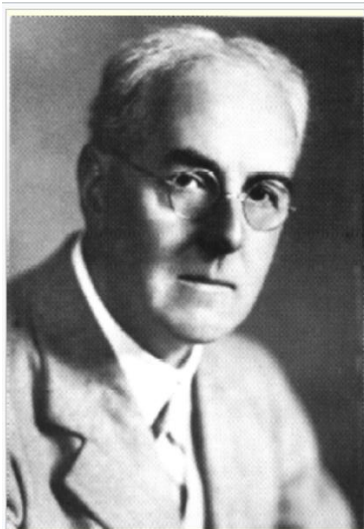
# La Legge di

# Potenza

**Esempi di eventi estremi**



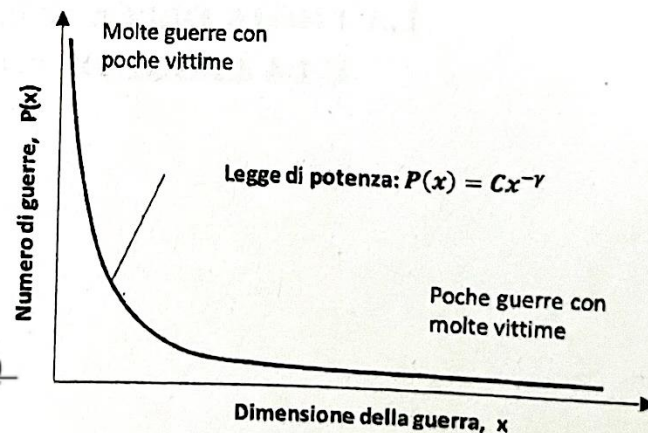
**La Prima Guerra Mondiale (1914)**



**Lewis Fly Richardson (1881-1953)**

Figura 4.1 – Legge di potenza per i conflitti tra il 1820 e il 1945

Dimensione della guerra (x)	Numero di guerre P(x)
Circa 1.000 vittime	188
Circa 10.000 vittime	63
Circa 100.000 vittime	24
Circa 1.000.000 vittime	5
Circa 10.000.000 vittime	2



Fonte: Axelrod e Cohen, 1999, p. 105



**uragani**



**incendi**



**estinzioni**



**cambiamenti di paradigma**

**crolli in Borsa**



**guerre**

**epidemie**



**terremoti**



**Esempi di eventi estremi**

# La Legge di



## Che dimensioni assumerà la guerra in Ucraina?





**uragani**



**estinzioni**



**crolli in Borsa**



**epidemie**

**terremoti**



**incendi**



**cambiamenti di paradigma**



**guerre**



# La Legge di Potenza



**Evidentemente dipenderà dalle dita invisibili di instabilità nei rapporti internazionali...**



**uragani**



**estinzioni**



**crolli in Borsa**



**epidemie**

**terremoti**



**incendi**



**cambiamenti di paradigma**

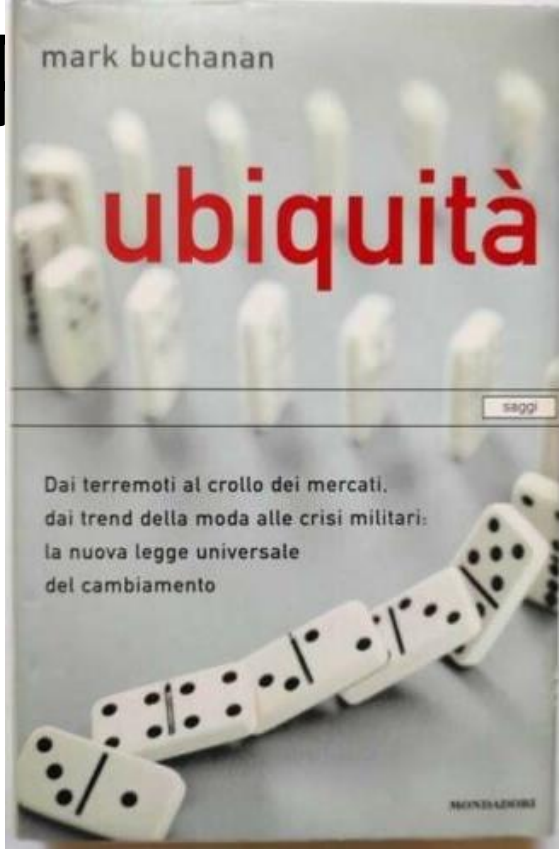


**guerre**



Ebbene, credo sia ormai chiaro perché il mondo umano è così interessante. Abbiamo visto che, a molti livelli, è realmente soggetto alle stesse fluttuazioni del mucchietto di sabbia o del magnete nel punto critico e, come quei due sistemi, è caratterizzato da un'accresciuta capacità di diffusione delle influenze. Se la struttura sociale e politica del mondo è davvero organizzata in tal modo, dovremo imparare a considerare naturale l'imprevisto. Oggi viviamo in un'epoca relativamente pacifica. Può darsi che la relativa calma duri un altro secolo, come può darsi che entro cinque anni scoppi un'altra guerra mondiale; chi può dirlo? Il nostro paese potrebbe sopravvivere ancora cinquecento anni o sgretolarsi fra trenta. Se il mondo è critico, si potranno analizzare le cause locali e si potrà cercare di capire in che modo le forze politiche e sociali determinino qui e là cambiamenti storici; ma se gli esiti finali di un evento dipendono dalla maniera in cui gli elementi in gioco si collegano per produrre dita di instabilità che percorrono il mondo intero, diventa praticamente impossibile prevedere il futuro. Insomma non si può presupporre che le tendenze persistano e l'unica cosa che si può prevedere è che il futuro continui a sfuggire alla nostra comprensione. Proprio per questo, forse, la storia è interessante: non è né statica né casualmente mutevole, ma si trova in equilibrio precario tra l'uno e l'altro polo, sicché, come il mucchio di sabbia, è sempre sull'orlo di sconvolgimenti drammatici.

# La Legge di

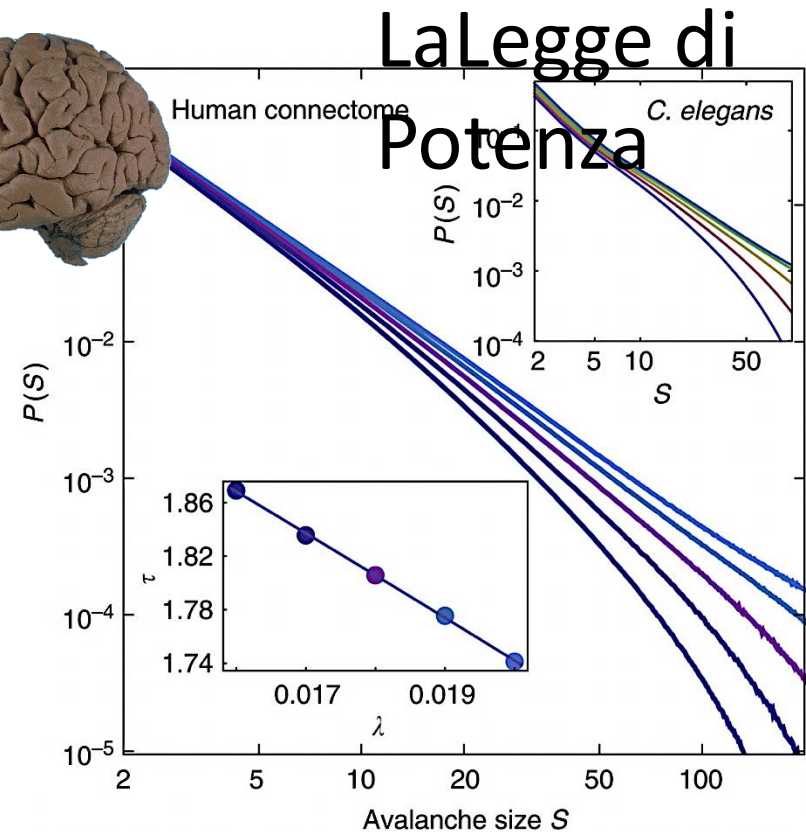
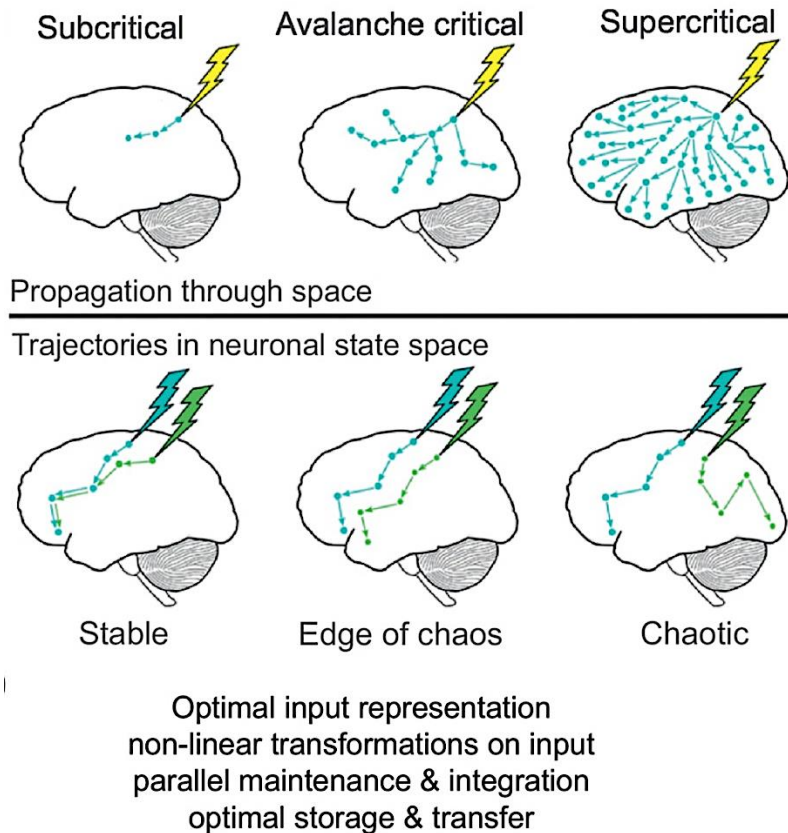


**Mark Buchanan 2001**



# Criticità Auto-organizzata nel Cervello Umano

RECENTEMENTE SI E' SCOPERTO CHE ANCHE IL NOSTRO CERVELLO SI TROVA NELLO "STATO CRITICO", AL "MARGINE DEL CAOS", E PRESENTA "VALANGHE" DI SCARICHE NEURONALI SINCRONIZZATE DI TUTTE LE DIMENSIONI...

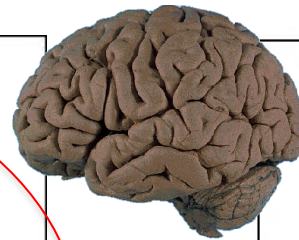
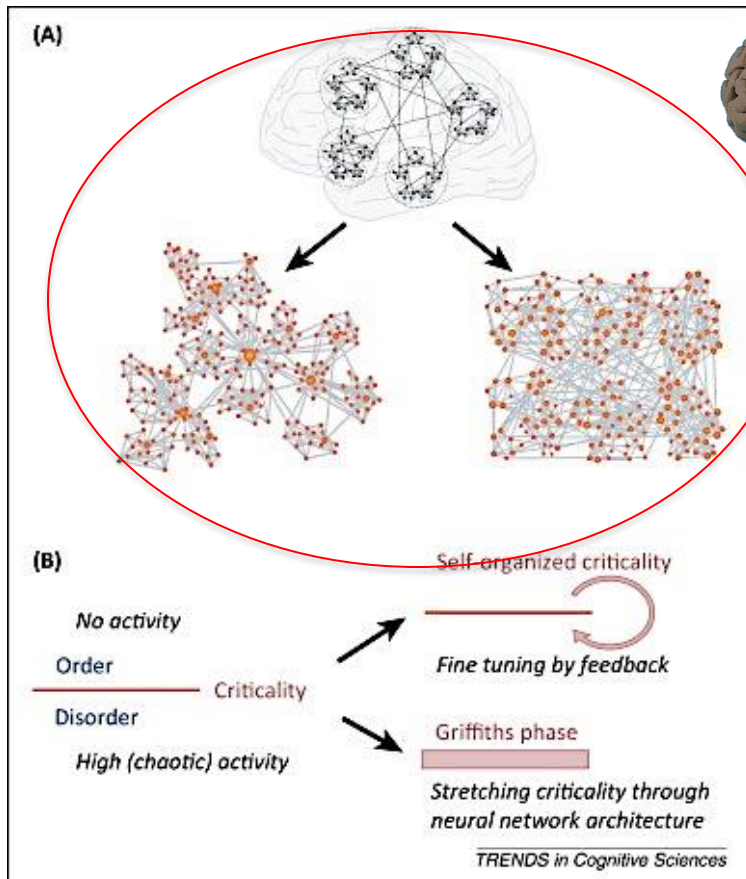


O'Byrne, Jordan et al. Trends in Neurosciences, Volume 45, Issue 11, 820 - 837

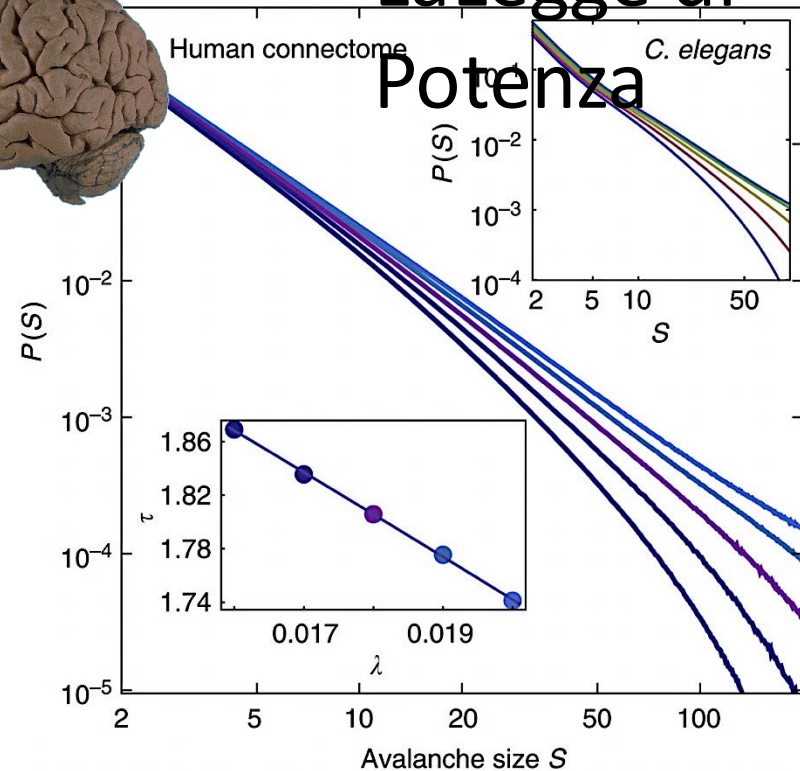
P.Moretti, M.A.Munoz, "Griffiths phases and the stretching of criticality in brain networks", Nature Communications 4, 2521 (2013)

# Criticità Auto-organizzata nel Cervello Umano

RECENTEMENTE SI E' SCOPERTO CHE ANCHE IL NOSTRO CERVELLO SI TROVA NELLO "STATO CRITICO", AL "MARGINE DEL CAOS", E PRESENTA "VALANGHE" DI SCARICHE NEURONALI SINCRONIZZATE DI TUTTE LE DIMENSIONI... MA IN QUESTO, COME VEDREMO, GIOCA UN RUOLO IMPORTANTE ANCHE LA SUA TOPOLOGIA...



La Legge di Potenza



P.Moretti, M.A.Munoz, "Griffiths phases and the stretching of criticality in brain networks", Nature Communications 4, 2521 (2013)