Applicazioni: il modello HMF

L'Hamiltonian Mean Field (HMF) model è un modello XY a rotatori planari (di massa e modulo unitari, equivalenti a pendoli rigidi) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle N coppie di variabili canoniche: $\{\theta_i, p_i\}$

Sistema di N rotatori accoppiati

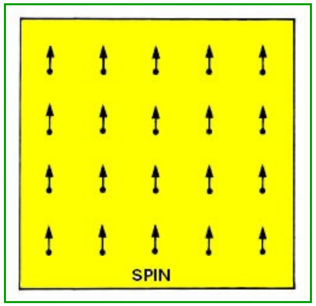
M. Antoni

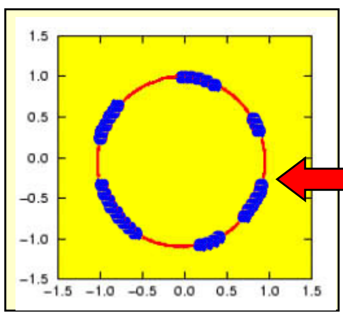
$$H = K + V = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^{N} [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)]$$

S. Ruffo

Antoni and Ruffo PRE 52 (1995) 2361

L'HMF può essere visto come un semplice reticolo di spin accoppiati…





…o come un sistema di particelle interagenti in moto (senza collisioni) su un cerchio unitario.

L'importanza di HMF sta nel fatto che si tratta di un toy-model il cui comportamento sembra essere paradigmatico di una ampia classe di sistemi con interazioni a lungo range, come per esempio sistemi nucleari o astrofisici (self-gravitating systems) e riveste un interesse particolare per lo studio della multiframmentazione e dei clusters atomici.

Applicazioni: il modello HMF

L'Hamiltonian Mean Field (HMF) model è un modello XY a rotatori planari (di massa e modulo unitari, equivalenti a pendoli rigidi) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle N coppie di variabili canoniche: $\{\theta_i, p_i\}$

Sistema di N rotatori accoppiati

M. Antoni

$$H = K + V = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^{N} [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)]$$

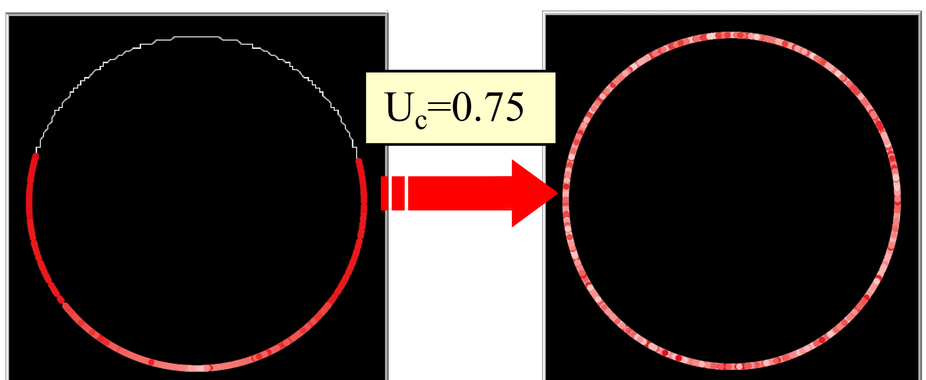
S. Ruffo

$$\vec{S}_i = (\cos\vartheta_i, \sin\vartheta_i) \Rightarrow \vec{M} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{S}_i \Rightarrow \boxed{\vec{M} = (M_x, M_y) = M e^{i\phi}}$$

Magnetizzazione

La soluzione in Ensemble Canonico del modello mostra una transizione da una fase **Condensata** (ferromagnetica con M > 0) ad una fase **Omogenea** (paramagnetica, con M ~ 0) in corrispondenza di un valore critico $U_c=0.75$ della Densità di Energia (U=H/N):

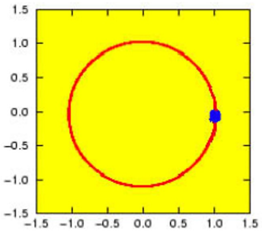
0 < M < 1
$U < U_c$
Fase Condensata



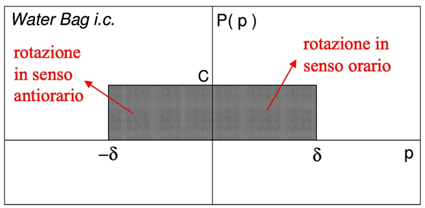
M ~ 0
$U > U_c$
Fase Omogenea

Stati metastabili (QSS)

Equazioni del moto in campo medio: $$\ddot{\theta}_i = M \sin(\Phi - \theta_i)$$

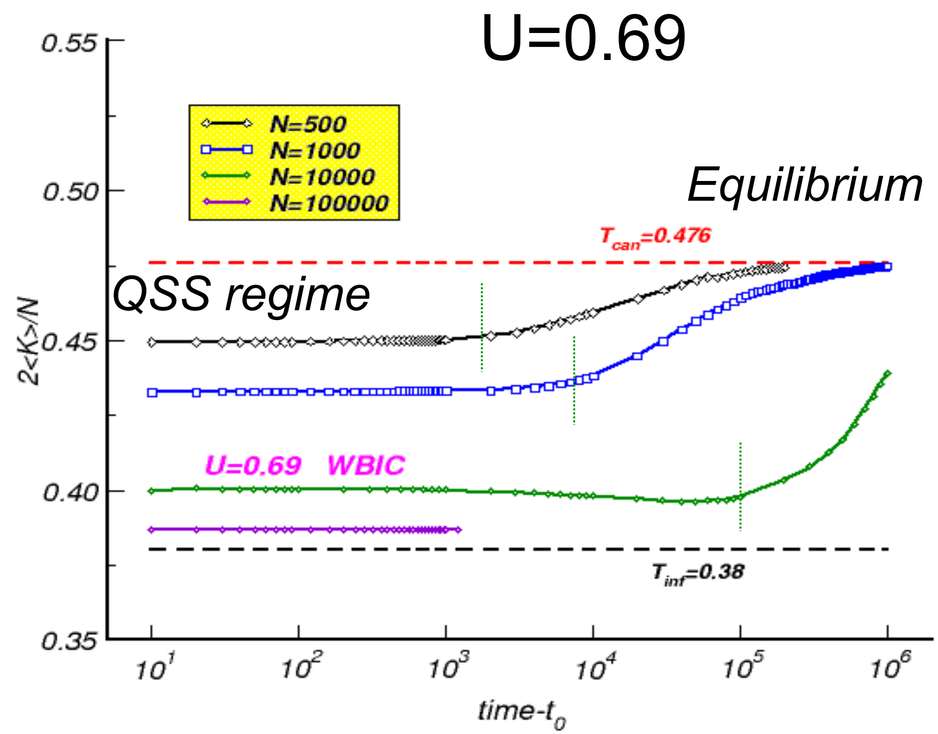


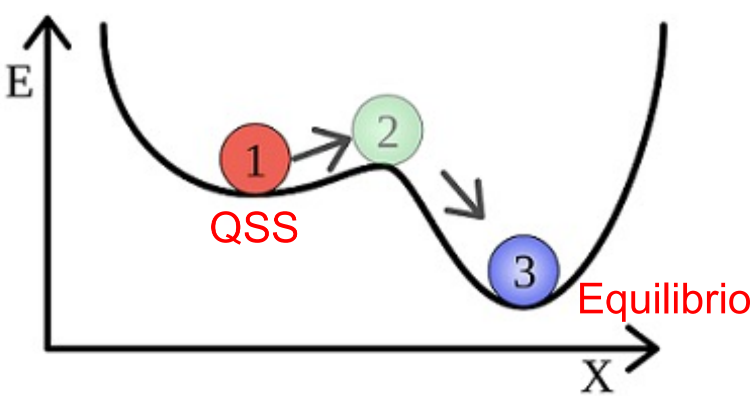
Tutti gli angoli = 0



Distribuzione uniforme delle velocità

Partendo da condizioni iniziali lontane dall' equilibrio (M=1), il sistema rimane intrappolato per un tempo molto lungo in ***STATI QUASI-STAZIONARI* (QSS) METASTABILI** dove la temperatura, è minore di quella prevista all'equilibrio (T_{eq}=0.476).

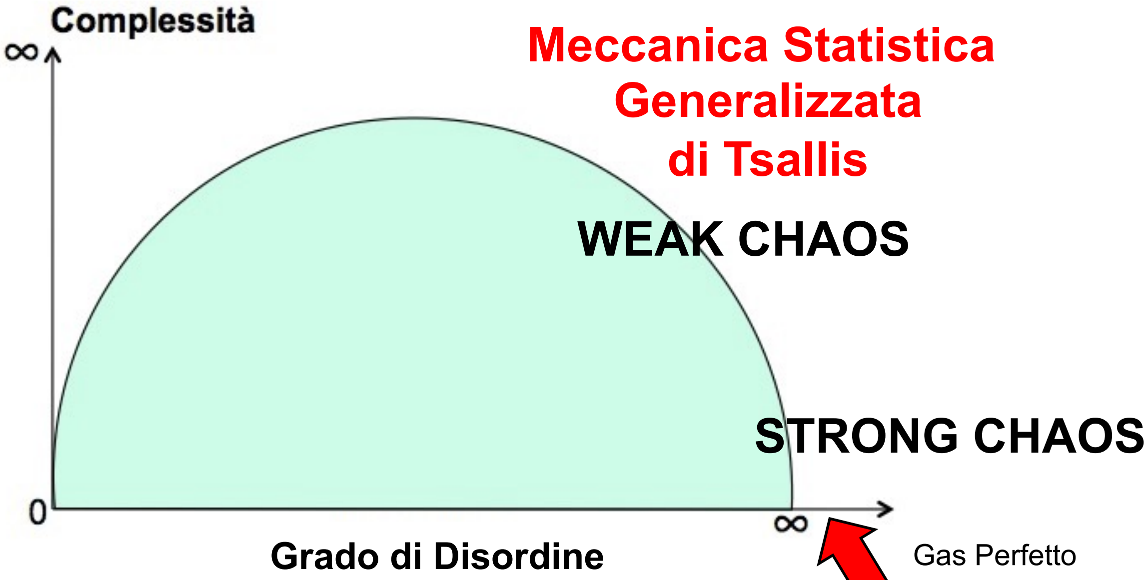


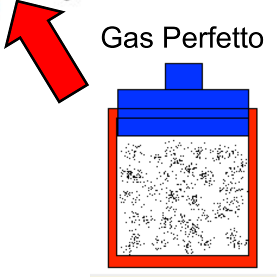


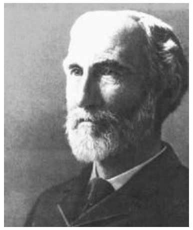
Quando $N \to \infty$, la temperatura dei QSS tende al valore limite T_{QSS}= 0.38 e il sistema non raggiunge MAI il regime di equilibrio!

Tutti gli indizi conducono verso verso una Meccanica Statistica generalizzata....

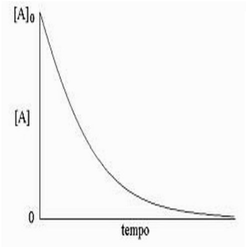
Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis



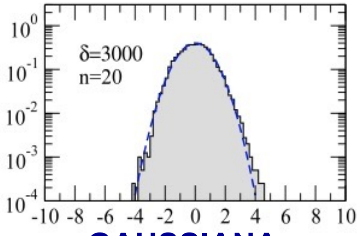




Meccanica Statistica di Boltzmann-Gibbs



ESPONENZIALE



GAUSSIANA

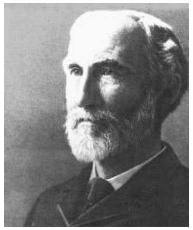
La Meccanica Statistica è q-invariante!

Entropia di Tsallis

$$S_q = k\,\frac{1-\sum_{i=1}^{W} p_i^q}{q-1} \quad \xrightarrow{p_i = \frac{1}{W}} \quad S_q = k\,ln_q W \qquad (S_1 = S_{BG})$$

con $\sum_i p_i = 1$

L'entropia di Tsallis si riduce all'entropia di Boltzmann-Gibbs quando l'indice entropico q tende al valore 1



La quantità |q – 1| misura dunque le correlazioni presenti nel sistema!

L'entropia di BG è sempre additiva ed è *estensiva per sistemi all'equilibrio* privi di correlazioni (strong mixing, q=1)

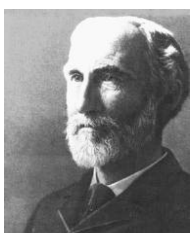
$$S(A+B) = S(A) + S(B)$$

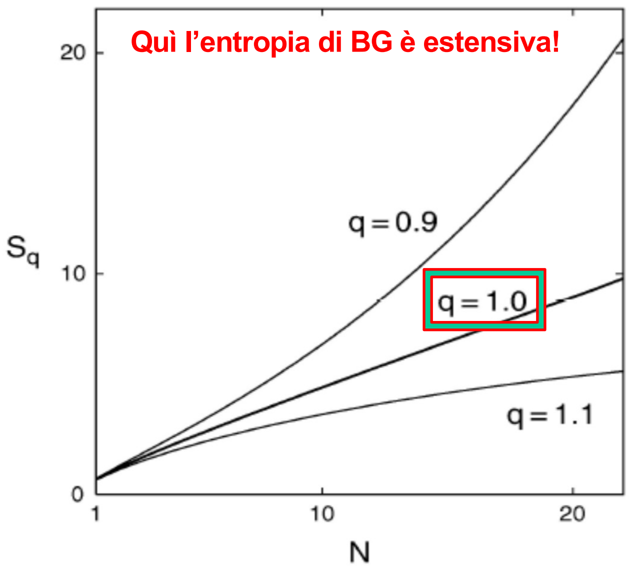
L'entropia di Tsallis è sempre non additiva ed è *estensiva per sistemi fuori equilibrio* con correlazioni (weak mixing, q>1)

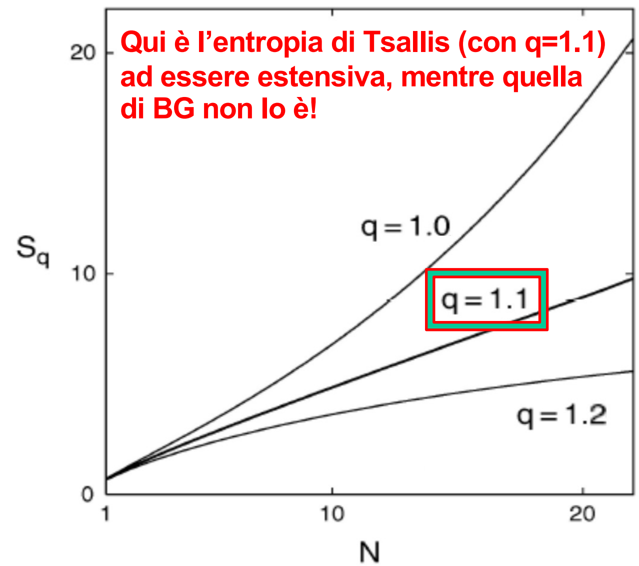
$$\frac{S_q(A+B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1-q)\,\frac{S_q(A)}{k}\frac{S_q(B)}{k}$$

E’ il sistema a «scegliere» la forma entropica corretta

QUINDI E’ IL SISTEMA A «DECIDERE» QUAL’E’ L’ENTROPIA PIU’ CORRETTA DA UTILIZZARE PER DESCRIVERLO: SARA’ QUELLA CHE SODDISFA L’ESTENSIVITA’, OSSIA QUELLA CHE SCALA LINEARMENTE CON *N* NEL LIMITE TERMODINAMICO (TEST DELL’ESTENSIVITA’).







La massimizzazione della S_q permette di ottenere una generalizzazione del peso di Boltzmann che si può esprimere attraverso una funzione q-esponenziale, che per q > 1 è una legge di potenza:

$$e_q\left(-\frac{E}{kT}\right) = \left[1-(1-q)\frac{E}{kT}\right]^{\frac{1}{1-q}} \rightarrow e^{-\frac{E}{kT}} \quad per\ q \rightarrow 1$$

La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi

NON ERGODICITA' E STRUTTURE FRATTALI NELLO SPAZIO DELLE FASI

CORRELAZIONI E ANOMALIE DINAMICHE

SISTEMI CON INTERAZIONI A LUNGO- RANGE (O ENTANGLED)

SISTEMI MESOSCOPICI CON MEMORIA NON MARKOVIANA

TIPICHE APPLICAZIONI DELLA MECCANICA STATISTICA GENERALIZZATA

METASTABILITA' E NON-EQUILIBRIO IN SISTEMI HAMILTONIANI

SISTEMI DISSIPATIVI "AT THE EDGE OF CHAOS"

SISTEMI CON COMPORTAMENTI ASINTOTICI A LEGGE DI POTENZA

FENOMENI DI TURBOLENZA

COMPLEX NETWORKS

SISTEMI VETROSI (GLASSES)

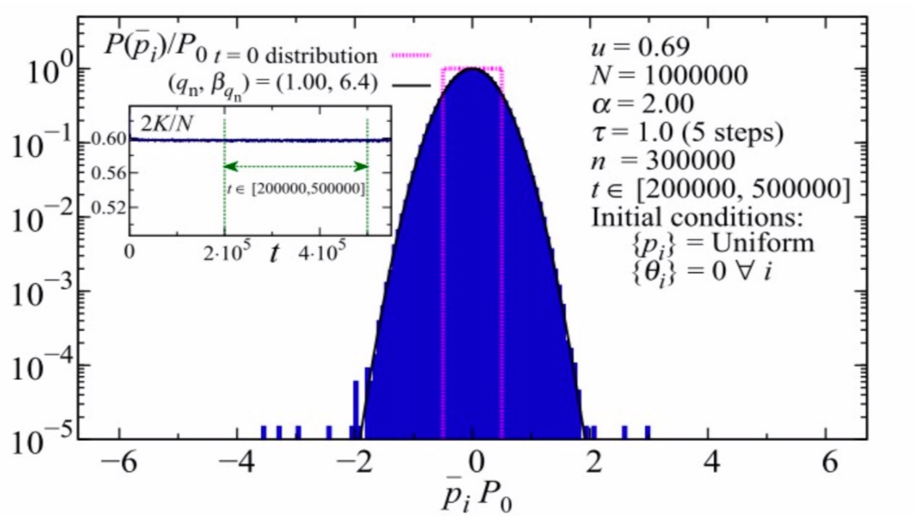
Distribuzione delle velocità nel Modello α-XY (d=1)

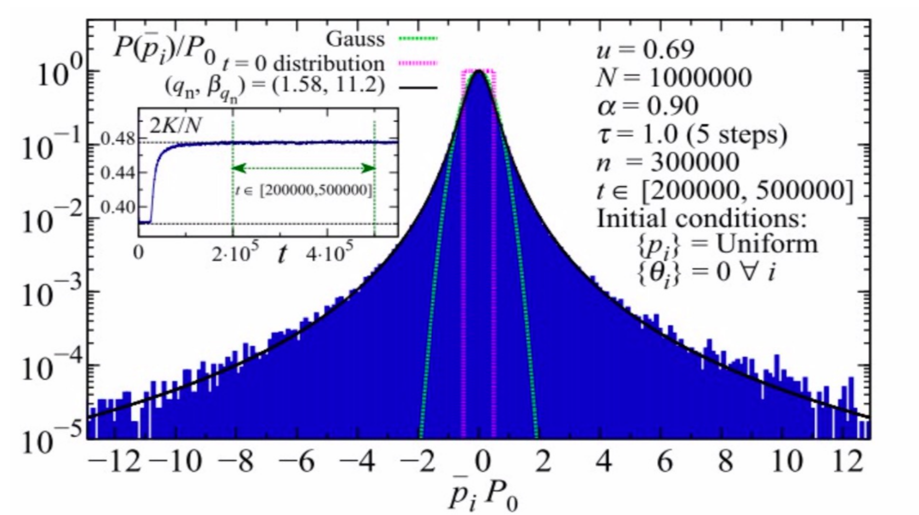
$$H_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2\tilde{N}} \sum_{i \neq j=1}^{N} \frac{1-\cos(\vartheta_i - \vartheta_j)}{r_{ij}^{\alpha}}$$

$$\alpha \; fissa \; il \; range \; dell'interazione \; (\alpha = 0 \rightarrow HMF)$$

Se d=1, per α > 1, ossia quando l'interazione è a corto raggio, la distribuzione delle velocità all'equilibrio è quella gaussiana di Boltzmann-Gibbs:

Per α < 1, ossia quando l'interazione è a lungo raggio, il sistema resta lontano dall'equilibrio e la distribuzione delle velocità è q-gaussiana:





L.J.L. Cirto, V.R.V. Assis and C. T., Physica A **393**, 286 (2014)

Distribuzione delle velocità nel Modello α-XY (d=1)

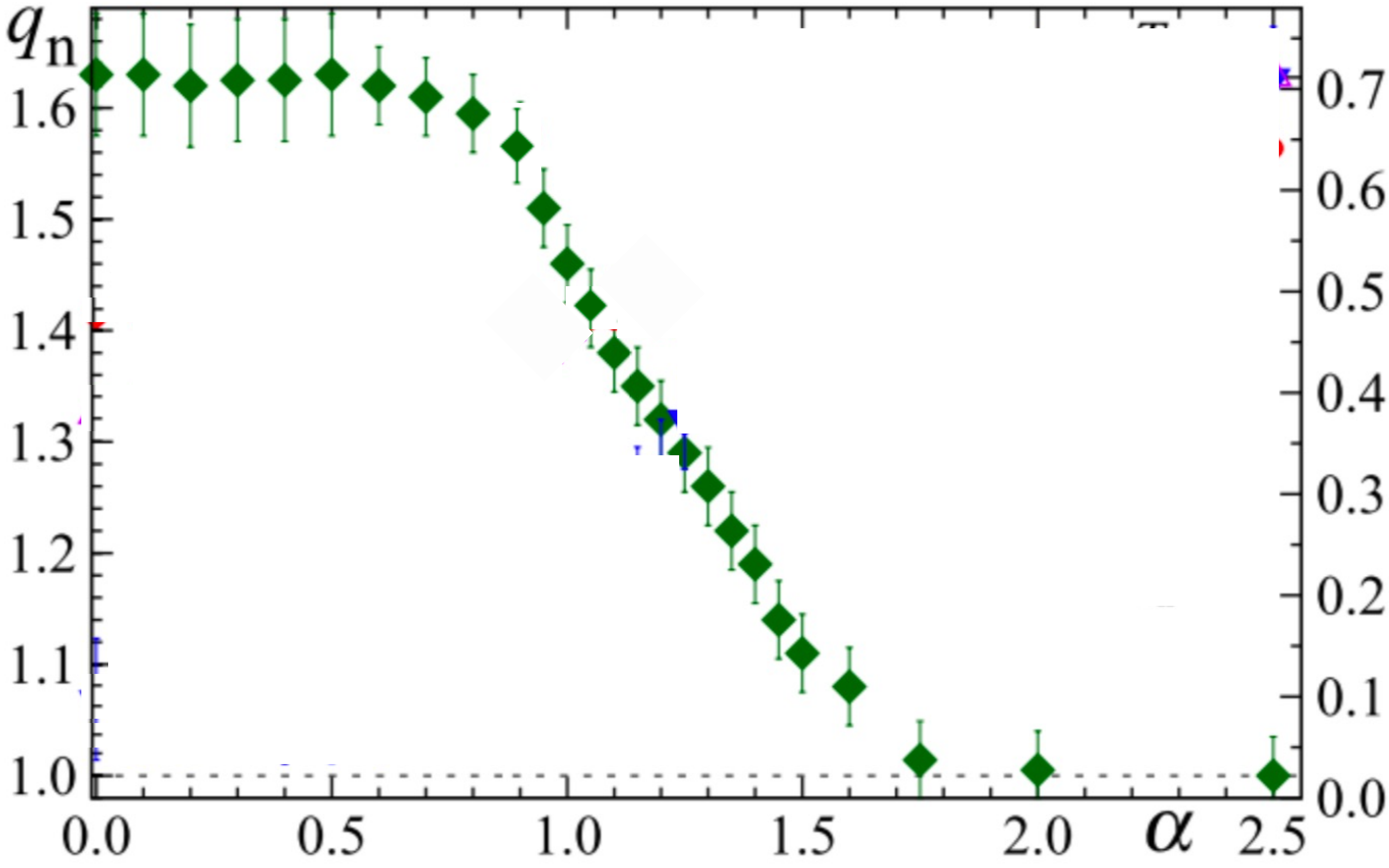
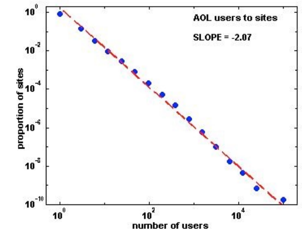


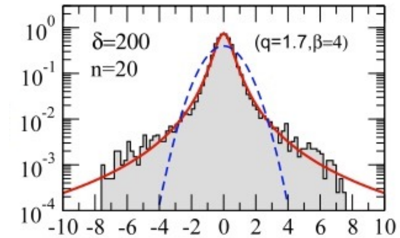
Figura 3.1.3: indice entropico q al variare del range di interazione α.

q-Statistica di Tsallis all'Edge of Chaos

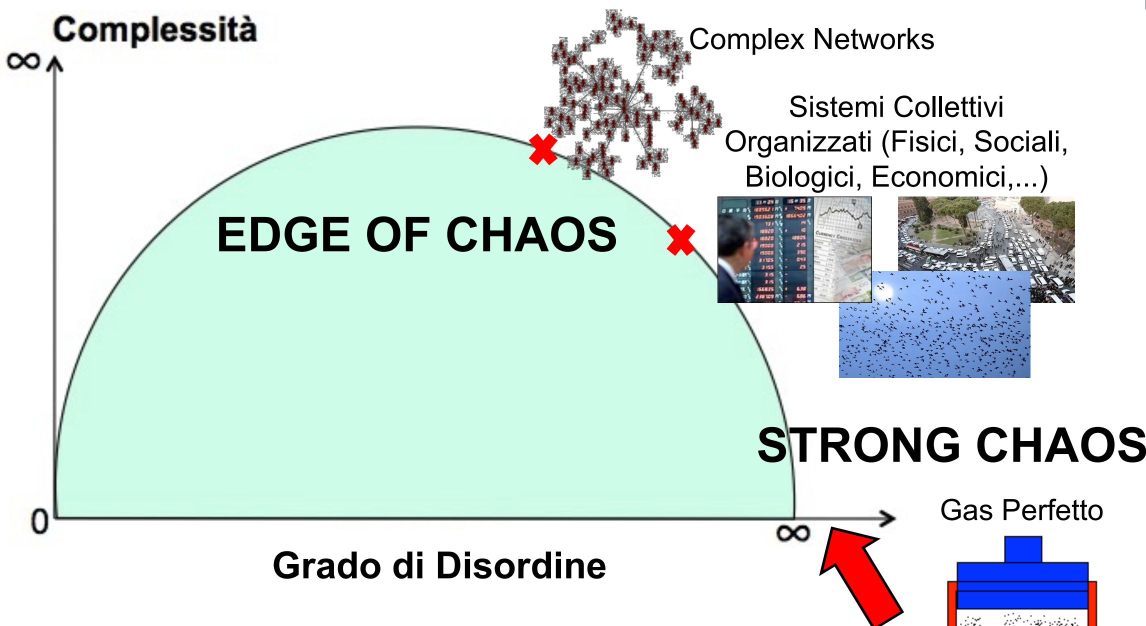
Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis

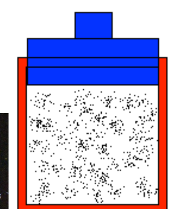


LEGGE DI POTENZA

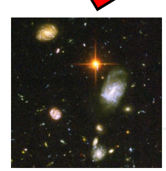


q-GAUSSIANA

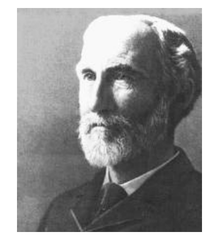




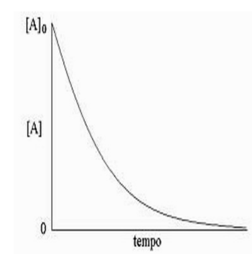
Gas Perfetto



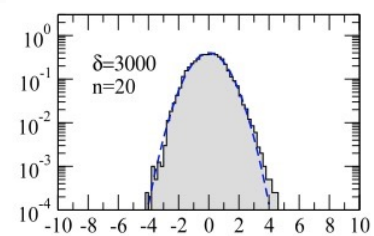
Universo come
gas perfetto di Galassie



Meccanica Statistica di Boltzmann-Gibbs



ESPONENZIALE



GAUSSIANA

Classificazione dei Sistemi Dinamici

Sistemi dinamici continui (Flussi)

$$\dot{X} = f(X)$$

- **Flussi Dissipativi**
  - Attrattori
    - 1D: Punto fisso
    - 2D: Ciclo Limite
    - 3D: Caotici
- **Flussi Hamiltoniani**
  - Orbite
    - Periodiche
    - Quasi Periodiche
    - Caotiche

Sistemi dinamici discreti (Mappe)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

- **Mappe Dissipative**
  - Attrattori
    - Punto fisso
    - Ciclo Limite
    - Caotici
- **Mappe Conservative (area-preserving)**
  - Orbite
    - Periodiche
    - Quasi Periodiche
    - Caotiche

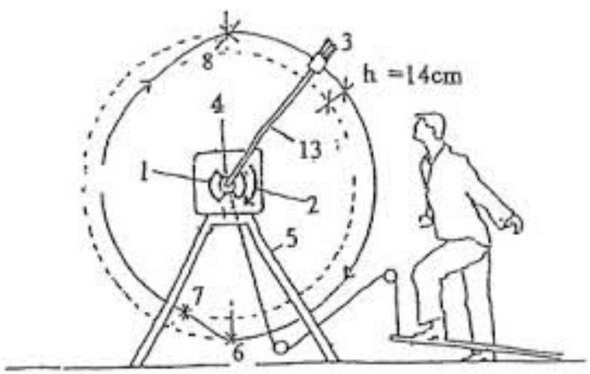
Classificazione dei Sistemi Dinamici

Sistemi dinamici continui (Flussi)

$$\dot{X} = f(X)$$

Sistemi dinamici discreti (Mappe)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$



Kicked Rotator

STANDARD MAP (Chirikov 1969)

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i \pmod{2\pi}$$
$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1} \pmod{2\pi}$$
$$(i = 0,1,2,\ldots)$$

Particle confinement in magnetic traps,
particle dynamics in accelerators,
comet dynamics,
ionization of Rydberg atoms,
electron magneto-transport

Mappe Conservative (area-preserving)

Orbite

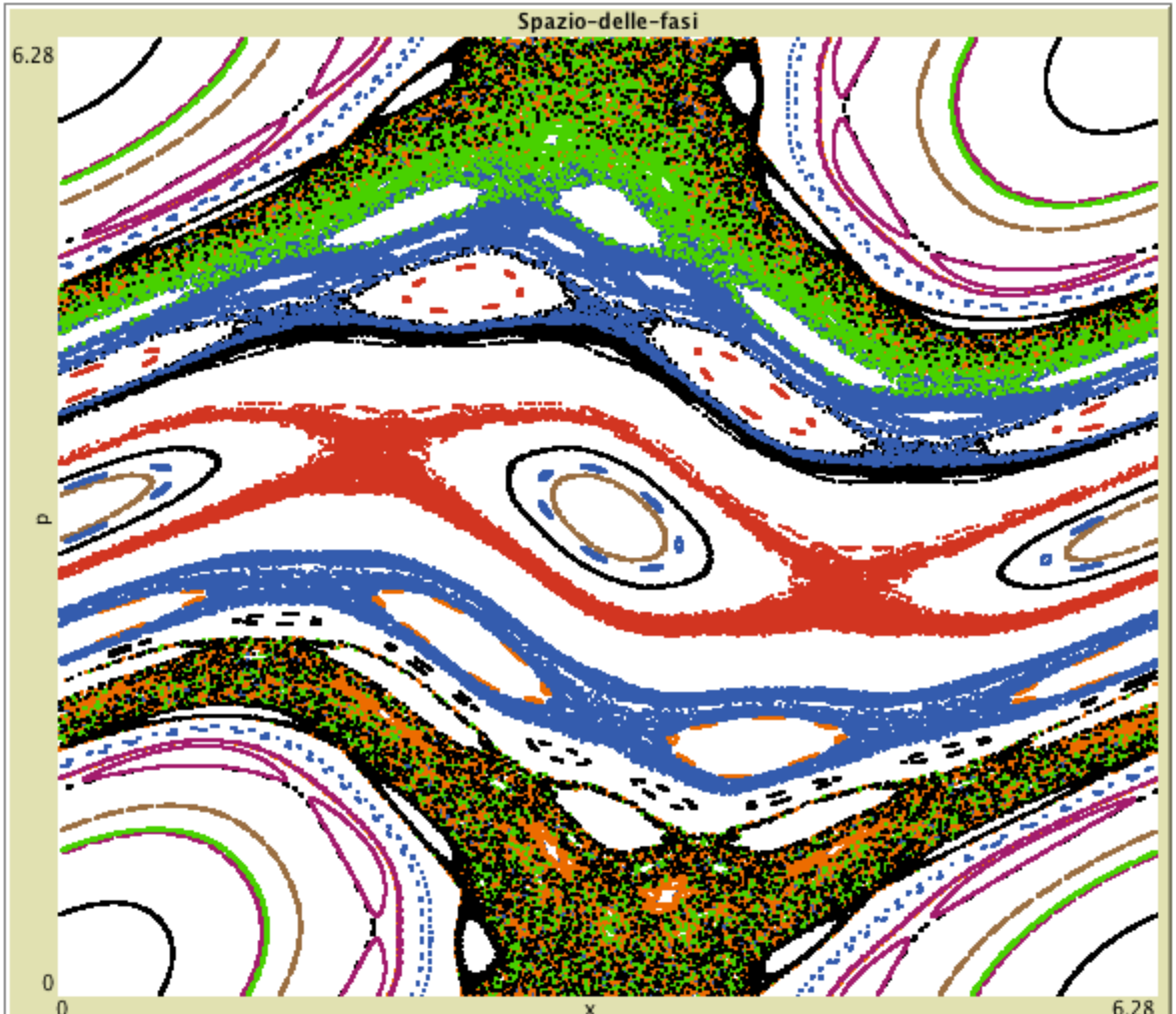
Periodiche

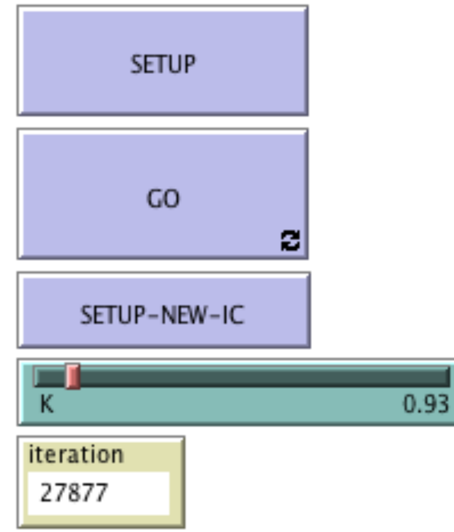
Quasi Periodiche

Caotiche

Statistica di Tsallis e Mappe Conservative

MAPPA STANDARD

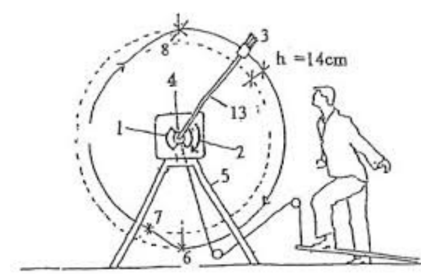




$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i$$

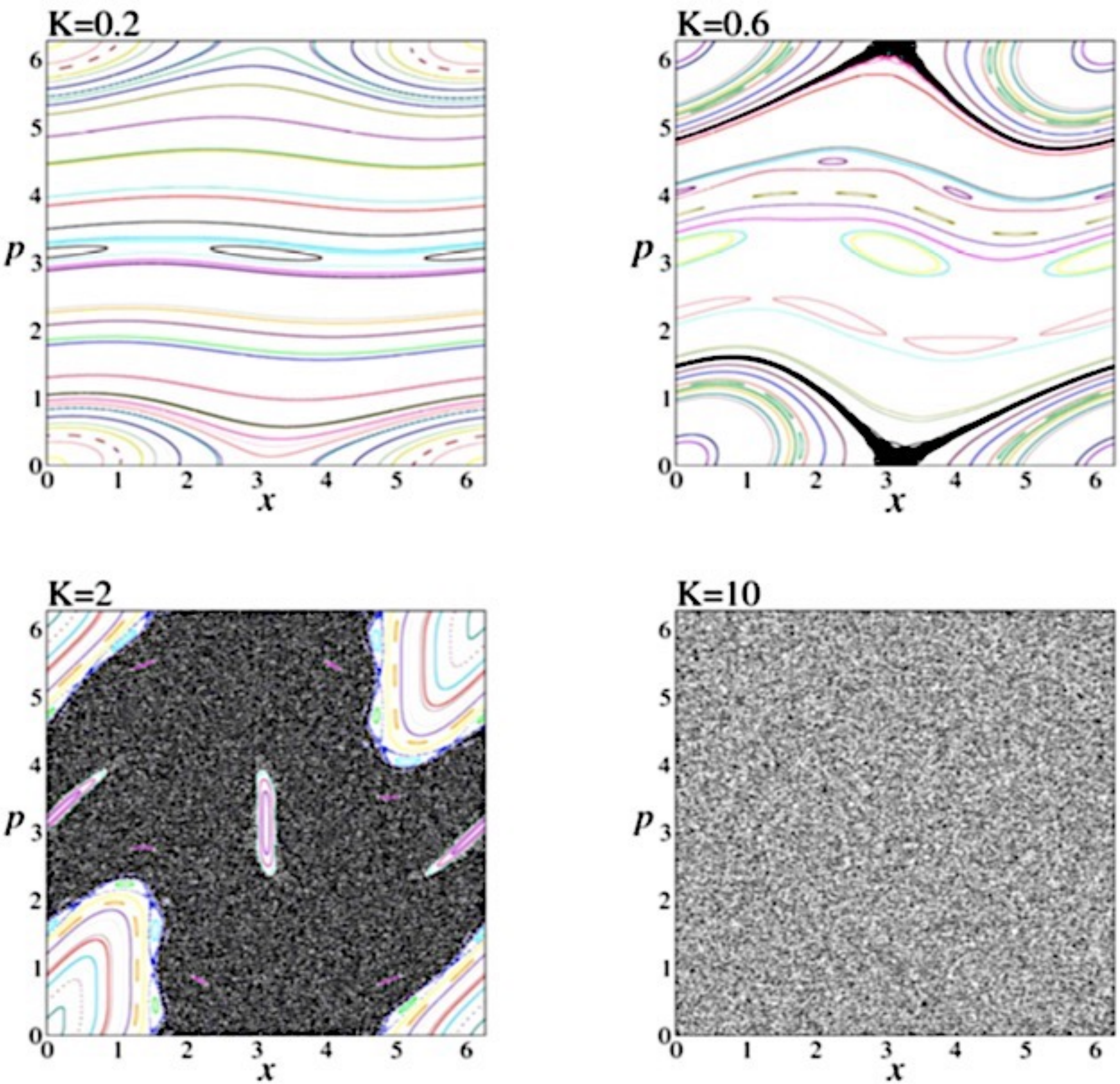
$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1}$$

where p and x are taken as modulo 2π.



Kicked Rotator

Edge of Chaos nella Mappa Standard

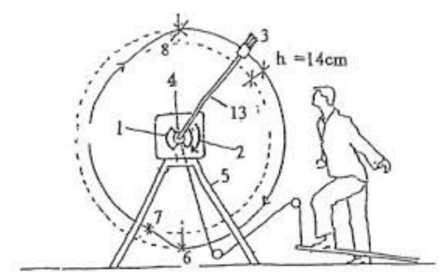


Tirnakli and Borges
Nature / Scientific Reports **6**, 23644 (2016)

$$p_{i+1} = p_i - K\sin x_i$$

$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1}$$

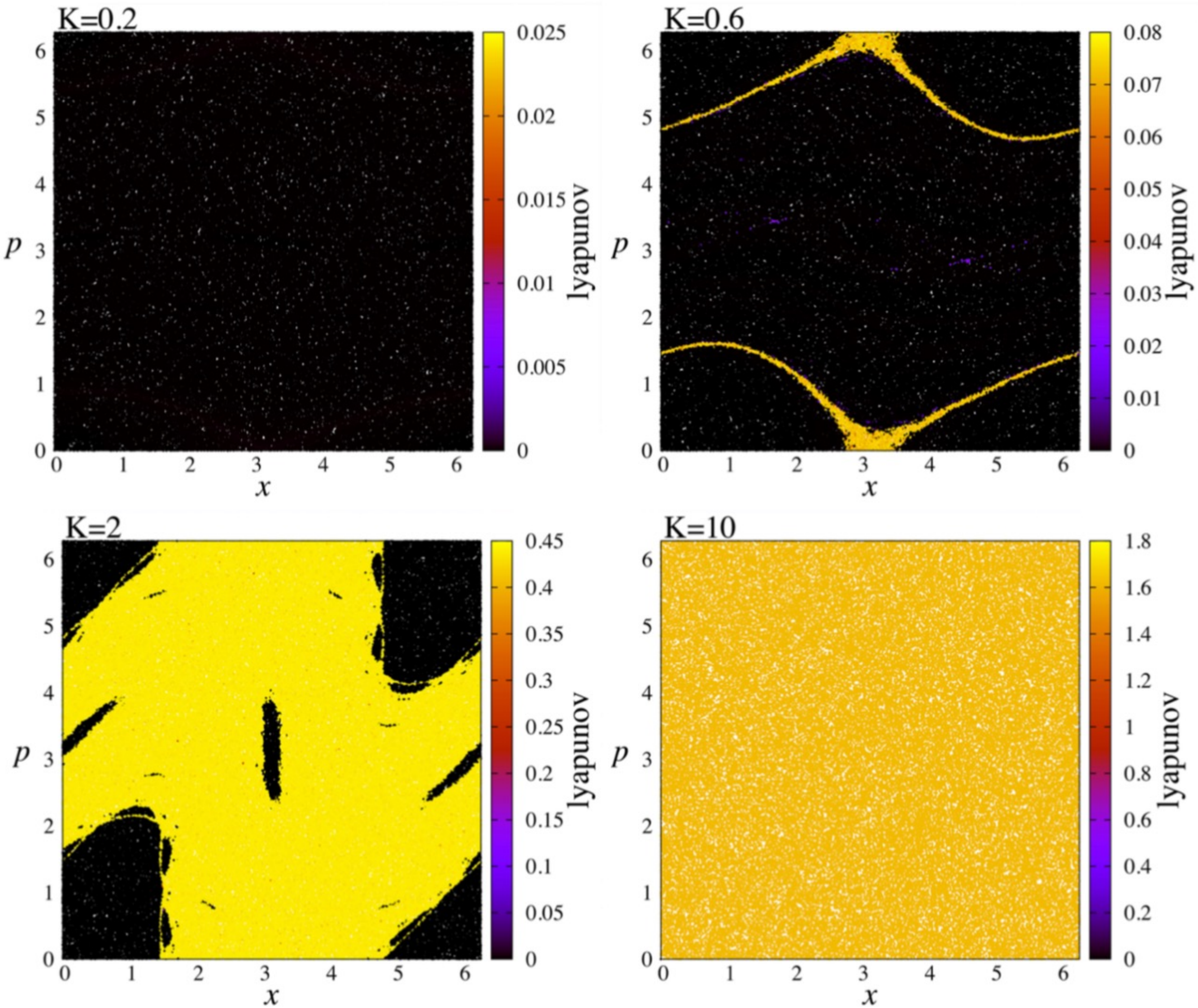
where p and x are taken as modulo 2π.



Kicked Rotator

Tirnakli and Borges (2016 Sci. Rep. 6 23644)

Edge of Chaos nella Mappa Standard

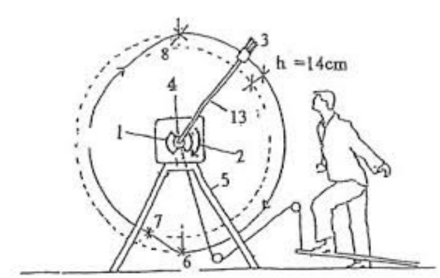


Tirnakli and Borges
Nature / Scientific Reports **6**, 23644 (2016)

$$p_{i+1} = p_i - K\sin x_i$$

$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1}$$

where p and x are taken as modulo 2π.

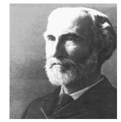


Kicked Rotator

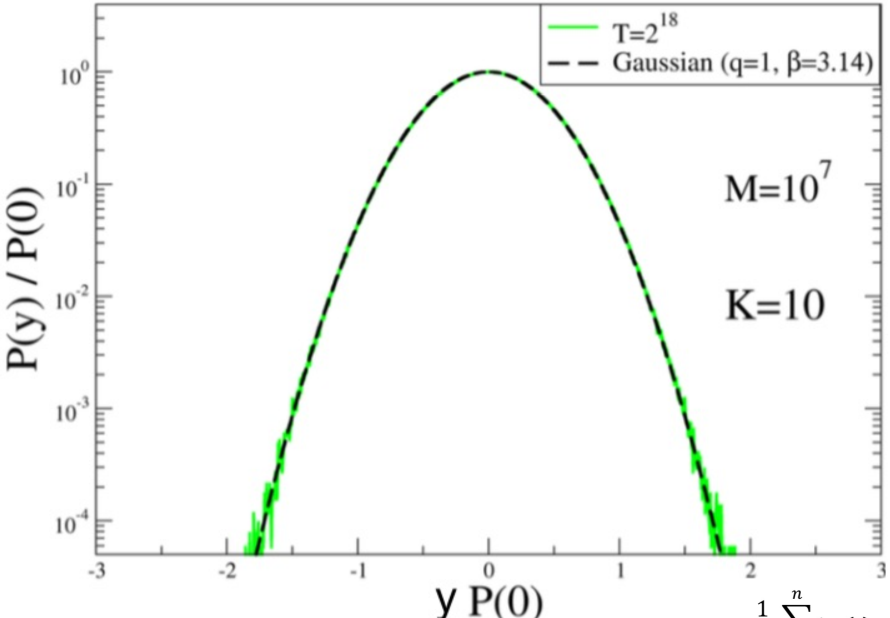
Tirnakli and Borges (2016 Sci. Rep. 6 23644)

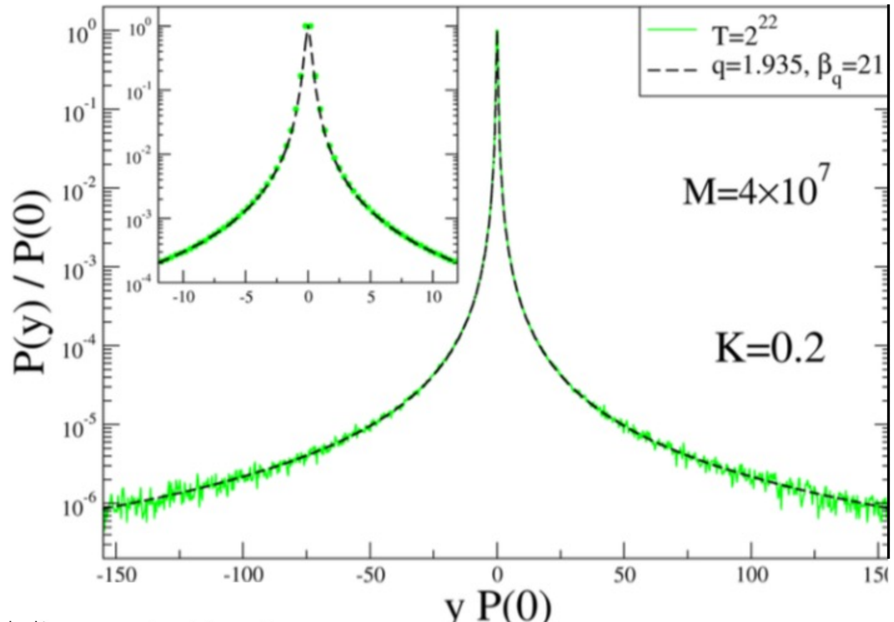
Violazione del CLT nella Mappa Standard

STRONG CHAOS

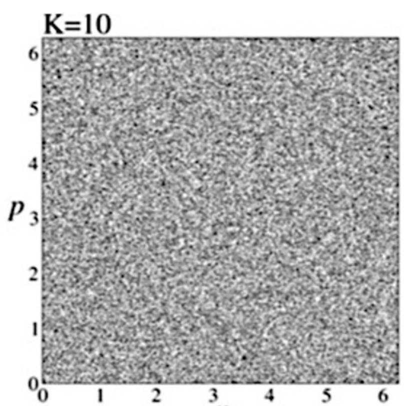


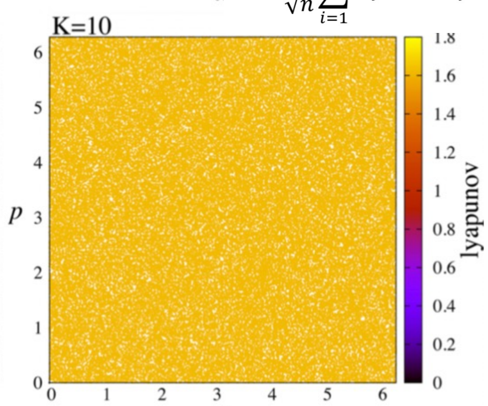
EDGE OF CHAOS

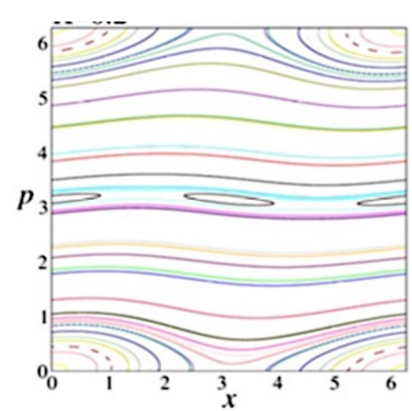


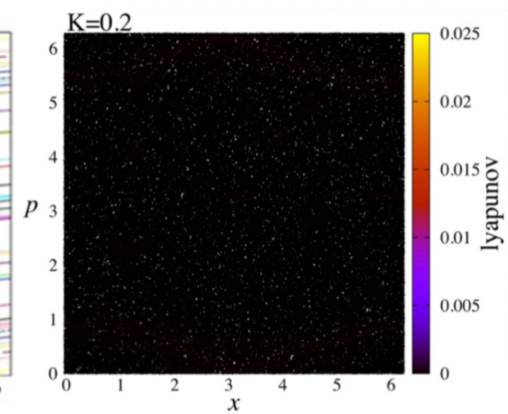


$$y_i = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(p_j(i) - \langle p_j\rangle) \qquad per\ j = 1,2,\dots,N$$









Tirnakli and Borges (2016 Sci. Rep. 6 23644)

La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi

NON ERGODICITA' E STRUTTURE FRATTALI NELLO SPAZIO DELLE FASI

CORRELAZIONI E ANOMALIE DINAMICHE

SISTEMI CON INTERAZIONI A LUNGO RANGE

SISTEMI MESOSCOPICI CON MEMORIA NON MARKOVIANA

TIPICHE APPLICAZIONI DELLA MECCANICA STATISTICA GENERALIZZATA

METASTABILITA' E NON-EQUILIBRIO IN SISTEMI HAMILTONIANI

SISTEMI DISSIPATIVI "AT THE EDGE OF CHAOS"

FENOMENI DI TURBOLENZA

SISTEMI VETROSI (GLASSES)

SISTEMI CON COMPORTAMENTI ASINTOTICI A LEGGE DI POTENZA

Sincronizzazione:
il ruolo delle correlazioni a lungo raggio

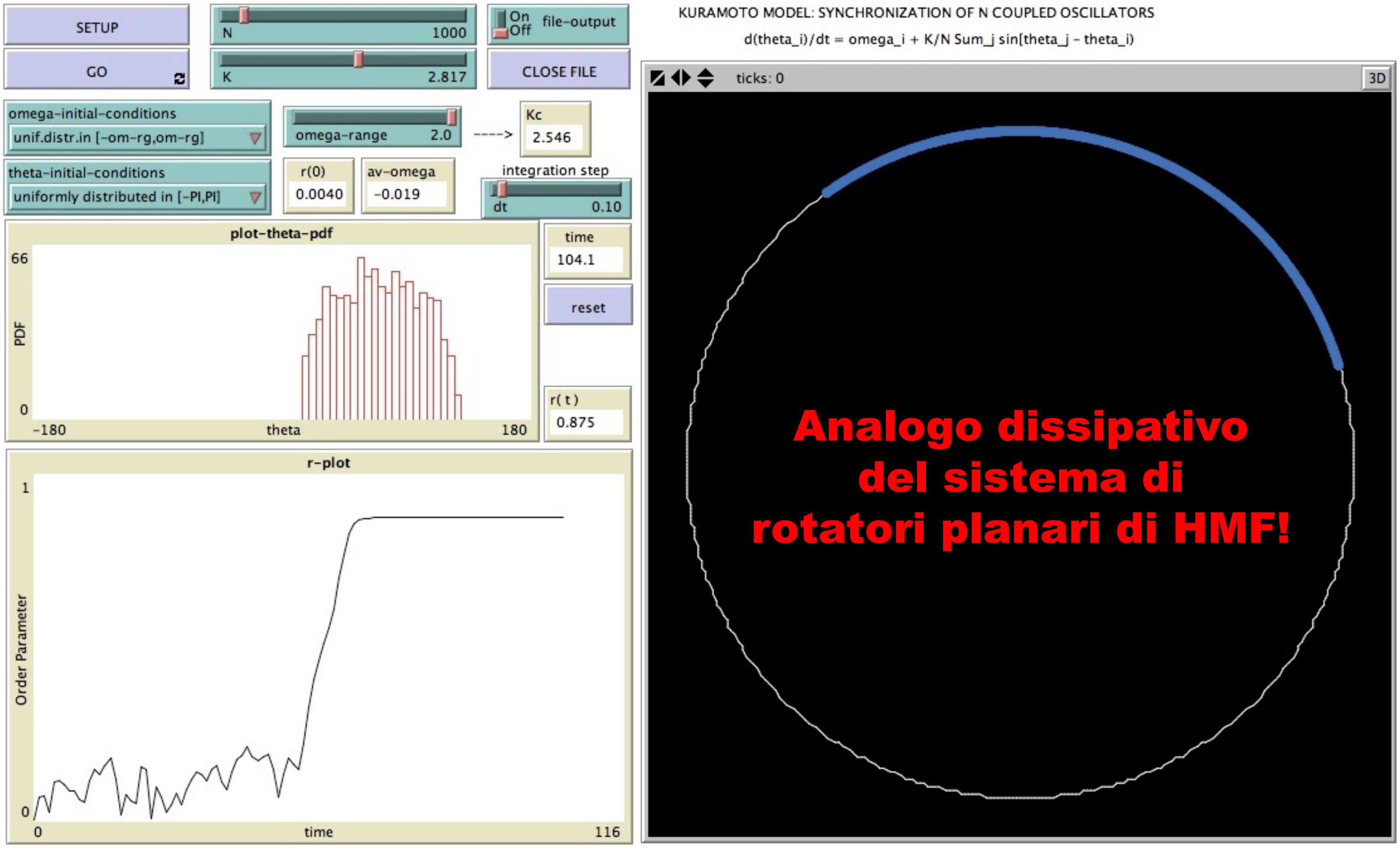
Sincronizzazione:
il ruolo delle correlazioni a lungo raggio

Sistema di 5 oscillatori accoppiati

Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

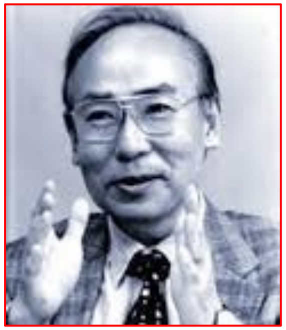
Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.

Sistema di N oscillatori accoppiati



Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.

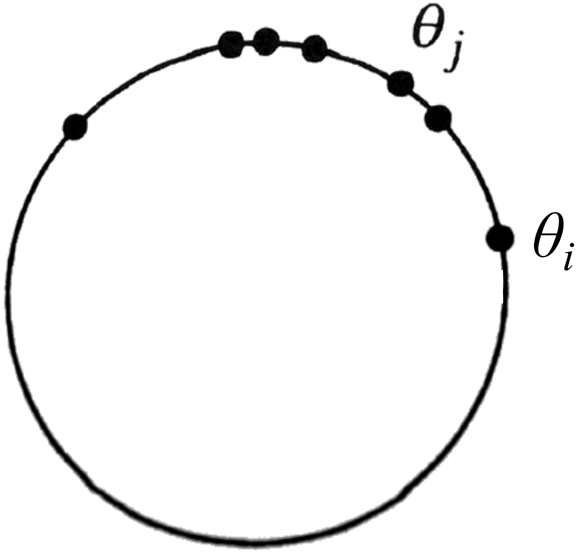


Yoshiki Kuramoto

Il **modello di Kuramoto** descrive la dinamica di un *sistema di N oscillatori (o rotatori) accoppiati*, ognuno caratterizzato da una fase θ_i(t) al tempo t e da una frequenza propria ω_i, indipendente dal tempo.

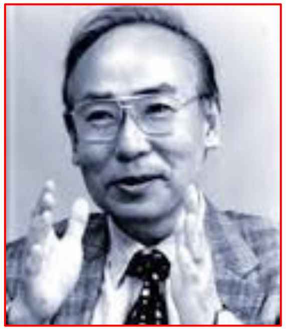
$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i) \qquad (1)$$

dove $K \geq 0$ è la costante di accoppiamento e il fattore $1/N$ assicura un corretto comportamento al limite di $N \to \infty$. Si noti che ogni oscillatore interagisce allo stesso modo con tutti gli altri, quindi si tratta anche in questo caso di un modello *mean field,* cioè con interazioni a lungo raggio come nel modello HMF, ma stavolta invece che con un flusso Hamiltoniano abbiamo a che fare con un *flusso dissipativo* a *N* dimensioni.



Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.



Yoshiki Kuramoto

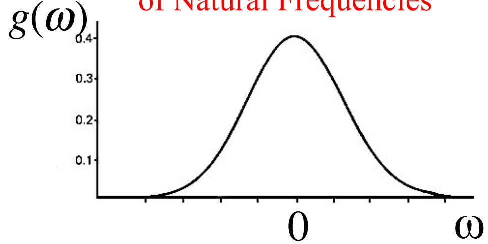
Il **modello di Kuramoto** descrive la dinamica di un *sistema di N oscillatori (o rotatori) accoppiati*, ognuno caratterizzato da una fase θ_i (t) al tempo t e da una frequenza propria ω_i , indipendente dal tempo.

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i) \qquad (1)$$

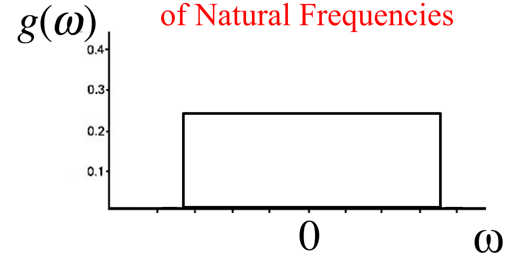
dove $K \geq 0$ è la costante di accoppiamento e il fattore $1/N$ assicura un corretto comportamento al limite di $N \to \infty$. Si noti che ogni oscillatore interagisce allo stesso modo con tutti gli altri, quindi si tratta anche in questo caso di un modello *mean field,* cioè con interazioni a lungo raggio come nel modello HMF, ma stavolta invece che con un flusso Hamiltoniano abbiamo a che fare con un *flusso dissipativo* a *N* dimensioni.

Nel limite di $N \to \infty$ la distribuzione delle frequenze naturali ω_i può essere descritta da una certa funzione di probabilità $g(\omega)$, tipicamente Gaussiana o uniforme, che per semplicità si assume simmetrica rispetto alla sua frequenza media Ω (che per la simmetria rotazionale del sistema si può considerare nulla, cioè Ω=0).

Gaussian Distribution of Natural Frequencies

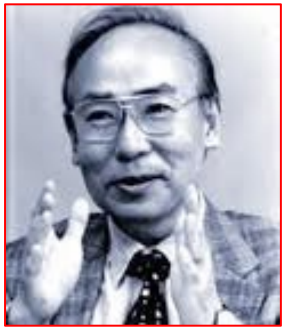


Gaussian Distribution of Natural Frequencies



Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.



Yoshiki Kuramoto

Il **modello di Kuramoto** descrive la dinamica di un *sistema di N oscillatori (o rotatori) accoppiati*, ognuno caratterizzato da una fase θ_i (t) al tempo t e da una frequenza propria ω_i , indipendente dal tempo.

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^{N} \sin(\theta_j - \theta_i) \qquad (1)$$

dove $K \geq 0$ è la costante di accoppiamento e il fattore $1/N$ assicura un corretto comportamento al limite di $N \rightarrow \infty$. Si noti che ogni oscillatore interagisce allo stesso modo con tutti gli altri, quindi si tratta anche in questo caso di un modello *mean field,* cioè con interazioni a lungo raggio come nel modello HMF, ma stavolta invece che con un flusso Hamiltoniano abbiamo a che fare con un *flusso dissipativo* a N dimensioni.

Nel limite di $N \rightarrow \infty$ la distribuzione delle frequenze naturali ω_i può essere descritta da una certa funzione di probabilità $g(\omega)$, tipicamente Gaussiana o uniforme, che per semplicità si assume simmetrica rispetto alla sua frequenza media Ω (che per la simmetria rotazionale del sistema si può considerare nulla, cioè Ω=0).

Secondo l'equazione (1), mentre ogni oscillatore tende a muoversi indipendentemente con la propria frequenza naturale ω_i , il termine di accoppiamento tende a sincronizzarlo con tutti gli altri. Se, quindi, per bassi valori del parametro K il sistema rimane incoerente e desincronizzato, per alti valori di K esso tenderà verso la sincronizzazione collettiva. Come vedremo più avanti, il passaggio dallo stato incoerente a quello sincronizzato può essere visto a tutti gli effetti come una transizione di fase spontanea al crescere del valore del parametro di accoppiamento oltre una certa soglia critica.

Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.

E’ necessario, prima di procedere oltre, fare una breve precisazione, utile a chiarire la dinamica di sincronizzazione degli oscillatori. Il fatto che il sistema sia dissipativo induce a pensare che ad un certo punto la dinamica si arresti. In effetti, questo sarebbe vero se non ci fossero i termini ω_i ad agire come forzanti esterne. Infatti, la dinamica degli oscillatori si organizza sempre in modo tale che la media delle loro velocità, a qualsiasi istante di tempo, sia sempre costante e uguale a Ω:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\dot{\theta}_i &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\omega_i + \frac{K}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j-\theta_i) = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\omega_i + \frac{K}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\sin\theta_j\cos_i-\cos\theta_j\sin\theta_i) = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\omega_i + \frac{K}{N^2}\left[\sum_{i,j=1}^{N}\sin\theta_j\cos\theta_i-\sum_{i,j=1}^{N}\cos\theta_j\sin\theta_i\right],
\end{aligned}$$

ed invertendo gli indici (muti) nell’ultima sommatoria, si ha:

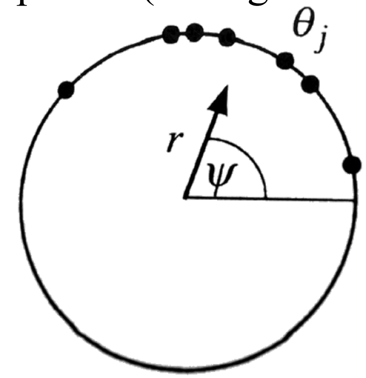
$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\dot{\theta}_i &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\omega_i + \frac{K}{N^2}\left[\sum_{\substack{i,i=1\\i,j=1}}^{N}\sin\theta_j\cos\theta_i-\sum_{i,j=1}^{N}\cos\theta_i\sin\theta_j\right] = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\omega_i = \Omega = costante.
\end{aligned}$$

Dunque gli oscillatori si fermeranno solo nel caso in cui la distribuzione $g(\omega)$ sia tale che $\Omega = 0$. In realtà, per N finito, nonostante g(ω) sia simmetrica, Ω non è mai esattamente nulla e gli oscillatori continueranno a ruotare, tanto più lentamente quanto più è grande N.

Il parametro d’ordine del Modello di Kuramoto

Per poter caratterizzare lo stato macroscopico del sistema e dare una misura della sua sincronizzazione è conveniente introdurre il seguente parametro d’ordine complesso (analogo della magnetizzazione M nel modello HMF):

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}. \qquad (2)$$



Essendo uno stato qualunque del sistema (θ_1, θ_2, ..., θ_N) rappresentato come un set ordinato di N punti $e^{i\theta_i}$ su un cerchio unitario, di conseguenza $re^{i\psi}$ rappresenta il centroide delle fasi degli oscillatori. Il raggio r misura la coerenza in fase e ψ è la fase media.

Nel caso in cui gli oscillatori si muovano come un unico gruppo, le loro fasi assumono in media lo stesso valore ψ ed $r \simeq 1$, cioè il sistema è simile ad un oscillatore gigante. Se invece gli oscillatori sono disposti in maniera casuale sul cerchio unitario, allora le loro fasi sono uniformemente distribuite e le oscillazioni individuali si sommano in maniera incoerente, dunque $r \simeq 0$. Perciò il valore di r è una misura macroscopica della sincronizzazione del sistema.

Tuttavia, è opportuno distinguere tra sincronizzazione in frequenza, che si raggiunge quando la forza esercitata dal termine di accoppiamento sovrasta quella dovuta alle frequenze naturali e ogni oscillatore ruota alla stessa frequenza, pur mantenendo inalterata la fase, e sincronizzazione totale, in cui le frequenze degli oscillatori sono uguali ad Ω ($\theta_i = \Omega$, $\forall i$) e la loro differenza di fase resta confinata in un piccolo intervallo di valori. Noi studieremo quest’ultima, anche se è bene precisare che ***non si può mai avere una sincronizzazione perfetta in fase*** (r = 1) perchè in questo caso si avrebbe $\theta_i = \theta_j$ $\forall i, j$ e, dalla (1) seguirebbe che $\theta_i = \omega_i$, cioè ogni oscillatore sincronizzato dovrebbe ruotare con la propria frequenza naturale, in contraddizione con l’ipotesi di sincronizzazione totale!

Equazioni in campo medio per il Modello di Kuramoto

Una volta introdotto il parametro d'ordine, è possibile scrivere la (1) in una forma più conveniente. Infatti, moltiplicando ambo i membri della (2) per e$^{-i\theta_i}$, si ha:

$$re^{i\psi}e^{-i\theta_i} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}e^{-i\theta_i} \Rightarrow re^{i(\psi-\theta_i)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i(\theta_j-\theta_i)}.$$

Poiché in generale e$^{i\varphi}$ = cos φ + *i* sin φ, uguagliando tra loro le parti immaginarie:

$$r\sin(\psi-\theta_i) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j-\theta_i).$$

e le (1) diventano quindi un set di equazioni disaccoppiate:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr\sin(\psi-\theta_i), \quad i = 1, \ldots, N \qquad (3)$$

In questa forma è evidente il carattere di campo medio (*mean field*) del modello. Infatti, pur essendo le (3) disaccoppiate, la dipendenza di ogni oscillatore da tutti gli altri è implicita, in quanto sia *r* che ψ sono quantità medie che dipendono dal comportamento collettivo del sistema. Ogni oscillatore è accoppiato alla fase media ψ(t) con un parametro di accoppiamento dato da *Kr* : per un certo valore di *K*, più aumenta la coerenza del sistema nel tempo, più cresce *r* e, di conseguenza, crescerà anche l'accoppiamento effettivo *Kr*, che tende a raggruppare tutti gli oscillatori in un unico blocco.

Dalle equazioni (3) appare anche chiaramente che il comportamento complesso del modello di Kuramoto emerge dalla competizione tra il termine di accoppiamento parametrizzato da *Kr*, che tende a «ordinare» (sincronizzare) gli oscillatori, e le loro frequenze naturali ω_i , che tendono a «disordinarli» facendoli oscillare ciascuno per conto proprio.

Modelli HMF e Kuramoto come casi limite di un sistema di pendoli accoppiati

Da un punto di vista teorico, è possibile mostrare una analogia formale tra il modello HMF, conservativo, e il modello di Kuramoto, dissipativo. L'idea è che le equazioni del moto di entrambi i modelli possono essere viste come casi particolari delle equazioni generali in campo medio che regolano l'evoluzione dinamica di un set di N pendoli forzati e smorzati con massa e lunghezza unitaria (e g=1):

$$\ddot{\theta}_i + B\dot{\theta}_i + C\, r\, \sin(\theta_i - \phi) = \Gamma, \quad i = 1, \ldots, N, \qquad (4)$$

dove B rappresenta il coefficiente di smorzamento, Γ è una forzante esterna e C è il termine di accoppiamento, mentre r e ϕ sono, rispettivamente, il modulo e la fase del parametro d'ordine complesso che misura la sincronizzazione dei pendoli.

Nel caso conservativo, cioè per B=0, in assenza di forzanti esterne (Γ=0) e per un accoppiamento unitario (C=1) le (4) diventano formalmente equivalenti alle equazioni del moto in campo medio del modello HMF (coincidendo il parametro d'ordine r con la magnetizzazione M dei rotatori planari):

$$\ddot{\theta}_i + M \sin(\theta_i - \phi) = 0 \qquad i = 1, \ldots, N,$$

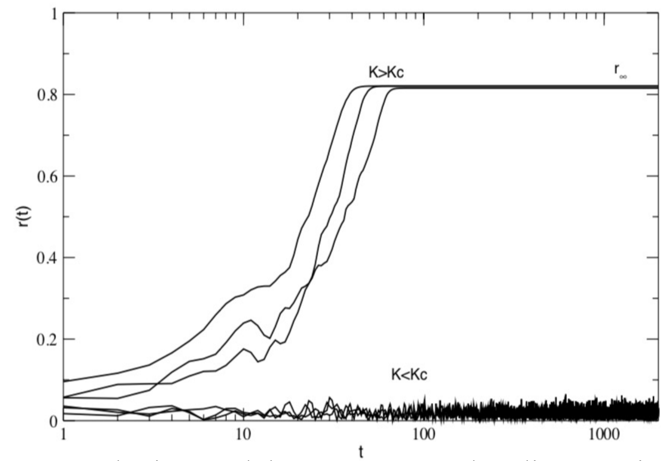
D'altra parte, per B>>1 (caso dissipativo sovra-smorzato), nelle equazioni (4) i termini $\ddot{\theta}_i$ diventano trascurabili ed esse risultano analoghe alle equazioni del moto in campo medio del modello di Kuramoto:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K r \sin(\phi - \theta_i), \quad i = 1, \ldots, N$$

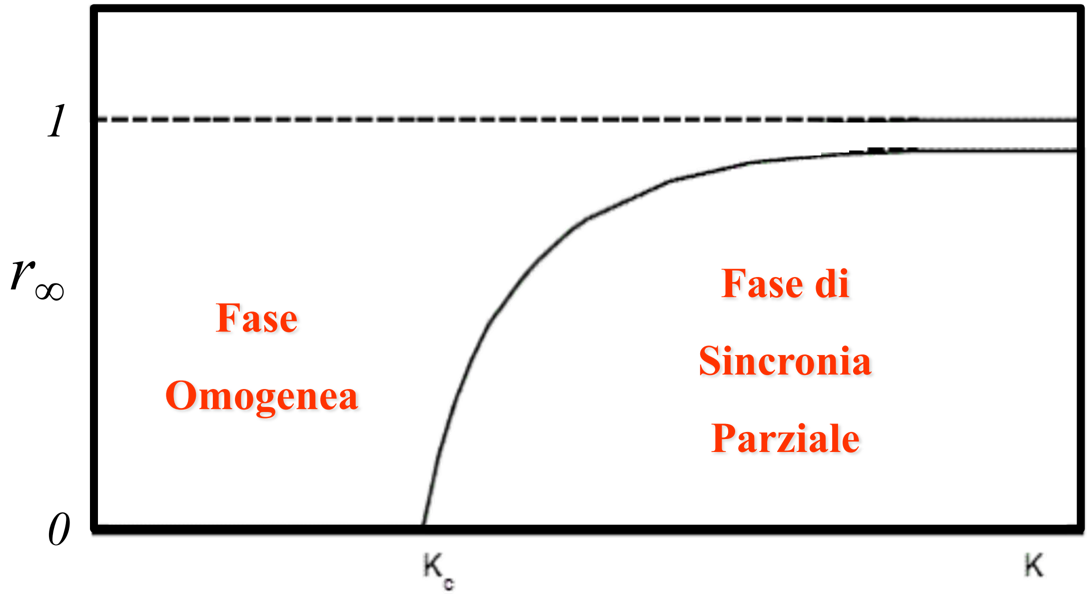
avendo identificato le frequenze naturali ω_i con delle forzanti esterne Γ_i/B e il coefficiente di accoppiamento K = C/B.

Transizione di fase nel Modello di Kuramoto

Assumendo una certa distribuzione delle frequenze naturali g(ω) e distribuendo a t = 0 gli oscillatori uniformemente sul cerchio unitario, le simulazioni mostrano che anche il modello di Kuramoto, come quello HMF, mostra una transizione di fase in corrispondenza di un certo valore critico K_C: al di sotto di questo valore il disordine prevale e gli oscillatori continuano a muoversi rimanendo uniformemente distribuiti sul cerchio unitario, quindi $r \to 0$; per $K > K_C$, lo stato incoerente diventa instabile e r tende ad aumentare saturando in corrispondenza di un certo $r_\infty < 1$ (sincronizzazione parziale), il cui valore dipende solo da K e non dalla particolare realizzazione delle condizioni iniziali.



Evoluzione del parametro d'ordine r in funzione del tempo per due diversi valori di K, sotto e sopra la soglia critica.



Valore asintotico del parametro d'ordine r_∞ in funzione di K

Analisi teorica di Kuramoto

Il merito di Yoshiki Kuramoto fu quello di riuscire a ricavare analiticamente, con una procedura basata su considerazioni di simmetria per la soluzione stazionaria r_∞, il valore critico K_C nel limite di un numero infinito di oscillatori. In condizioni stazionarie $r(t)$ è costante e il vettore $\vec{r}$ ruota uniformemente alla frequenza Ω. Mettendosi nel sistema di riferimento che ruota con frequenza Ω, e spostando eventualmente l'origine in maniera opportuna, si può considerare $\psi = 0$. In questo caso, le equazioni del moto (3) diventano:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr\sin\theta_i\,, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Alla base dell'analisi di Kuramoto c'è una *condizione di autoconsistenza*: essendo r costante, ogni oscillatore è indipendente da tutti gli altri, e sarà quindi possibile risolvere l'equazione del moto comune a tutti gli oscillatori, la cui soluzione implicherà valori di r e di ψ che dovranno essere consistenti con i valori originariamente assunti.

La (5) ha due tipi di soluzioni, a seconda che la frequenza naturale dell'i-esimo oscillatore sia maggiore o minore del parametro di accoppiamento Kr:

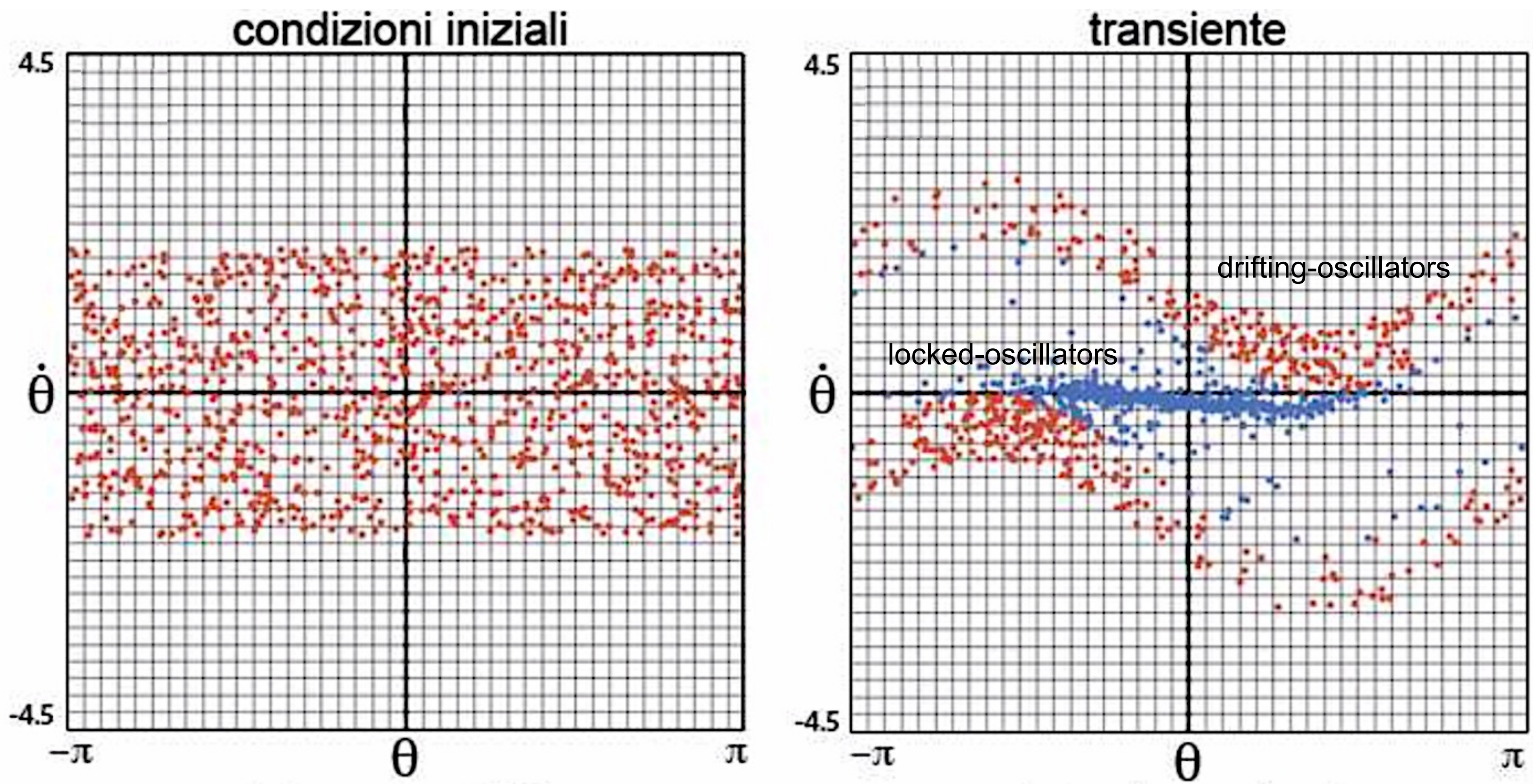
•gli oscillatori con $|\omega_i| \leq Kr$ si avvicinano al punto fisso stabile ($\dot{\theta}_i = 0\ \forall i$) definito dalla condizione $\omega_i = Kr \sin\theta_i$ con $|\theta_i| \leq \pi$: questi oscillatori sono parzialmente sincronizzati in fase e ruotano alla frequenza Ω (nel sistema di riferimento originario);

•gli oscillatori con $|\omega_i| > Kr$ ruotano sul cerchio unitario in maniera casuale e incoerente, accelerando in prossimità di certe posizioni e rallentando in prossimità di altre.

Per distinguere i due tipi di oscillatori, spesso quelli appartenenti al primo gruppo vengono chiamati "locked-oscillators", quelli appartenenti al secondo "drifting-oscillators".

Analisi teorica di Kuramoto

Nel limite di un numero infinito di oscillatori si può supporre che questi siano distribuiti con una densità di probabilità $\rho(\theta,\omega,t)$. Sia $\rho(\theta,\omega)\, d\theta$ la frazione di oscillatori con frequenza naturale ω e fase compresa tra θ e $\theta + d\theta$ in condizioni stazionarie.



Analisi teorica di Kuramoto

Nel limite di un numero infinito di oscillatori si può supporre che questi siano distribuiti con una densità di probabilità $\rho(\theta,\omega,t)$. Sia $\rho(\theta,\omega)\, d\theta$ la frazione di oscillatori con frequenza naturale ω e fase compresa tra θ e $\theta + d\theta$ in condizioni stazionarie. La condizione di stazionarietà implica una densità $\rho(\theta,\omega)$ inversamente proporzionale alla velocità $\dot{\theta}_i$. Si ha quindi:

$$\rho(\theta,\omega) = \frac{C}{|\,\omega - Kr\sin\theta\,|} \qquad (6)$$

dove il valore della costante C si ricava imponendo la normalizzazione della $\rho(\theta,\omega)$: $C = 1/2\pi\sqrt{\omega^2-(Kr)^2}$.

Sfruttando la condizione di autoconsistenza per il parametro d'ordine r, Kuramoto riuscì a ricavare la seguente equazione:

$$r = Kr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\, g(Kr\sin\theta)d\theta$$

che ammette una prima soluzione banale $r = 0$, corrispondente allo stato incoerente con una densità di probabilità degli oscillatori che (come si vede sostituendo C nella (6) e poi ponendo $r = 0$) rimane costante:

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\omega^2-(Kr)^2}}{\omega - Kr\sin\theta} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\omega^2}}{\omega} = \frac{1}{2\pi}.$$

e una seconda soluzione non banale, corrispondente allo stato parzialmente sincronizzato che si ottiene per:

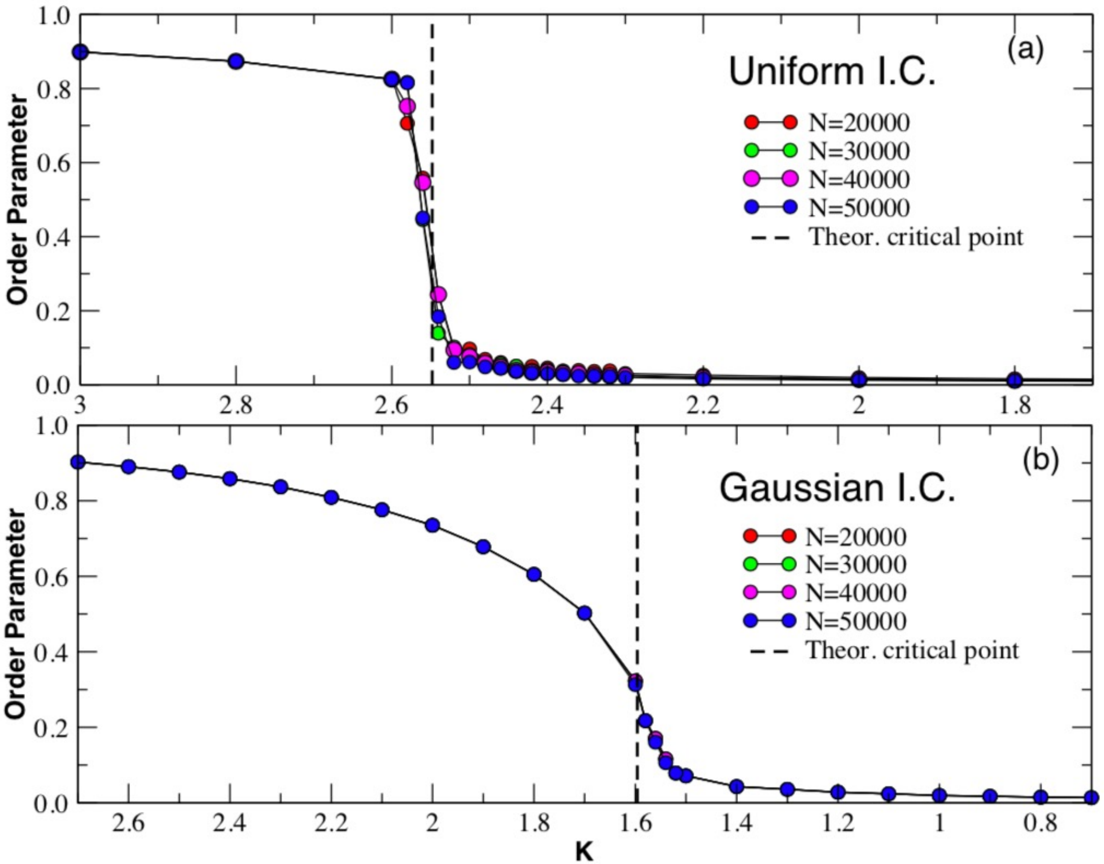
$$1 = K\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\, g(Kr\sin\theta)d\theta$$

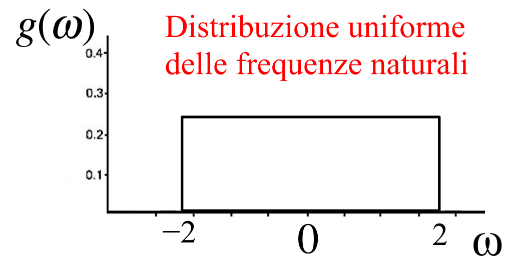
e che si distacca dalla soluzione con $r = 0$ in corrispondenza di un valore critico K_C del parametro di accoppiamento (ricavabile nel limite $r \to 0^+$):

$$1 = K\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\, g(0)d\theta \Rightarrow 1 = K_C g(0)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{K_C = \frac{2}{\pi g(0)}}$$

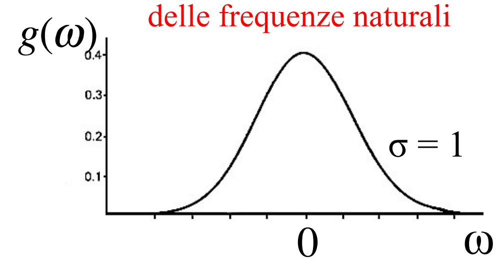
Transizione di fase nel Modello di Kuramoto

Dunque K_C dipende solo dal valore che assume la distribuzione delle frequenze g(ω) in corrispondenza di ω=0. Però il carattere della transizione di fase dipende dal tipo di distribuzione scelta. Nel grafico (a), ad esempio, la g(ω) è uniforme (waterbag) con $\omega \in [-2, 2]$, quindi (essendo la distribuzione normalizzata ad area unitaria) si avrà g(0)=1/4 e K_C=2.547: in questo caso si vede che la transizione è brusca (transizione del primo ordine). Nel grafico (b), invece, g(ω) è gaussiana (con σ = 1) quindi $g(\omega) = 1/\sqrt{2\pi}\,\exp(-\omega^2/2)$, da cui $g(0)=1/\sqrt{2\pi}$ e K_C=1.596: stavolta la transizione è continua (del secondo ordine, come nel caso del modello HMF).





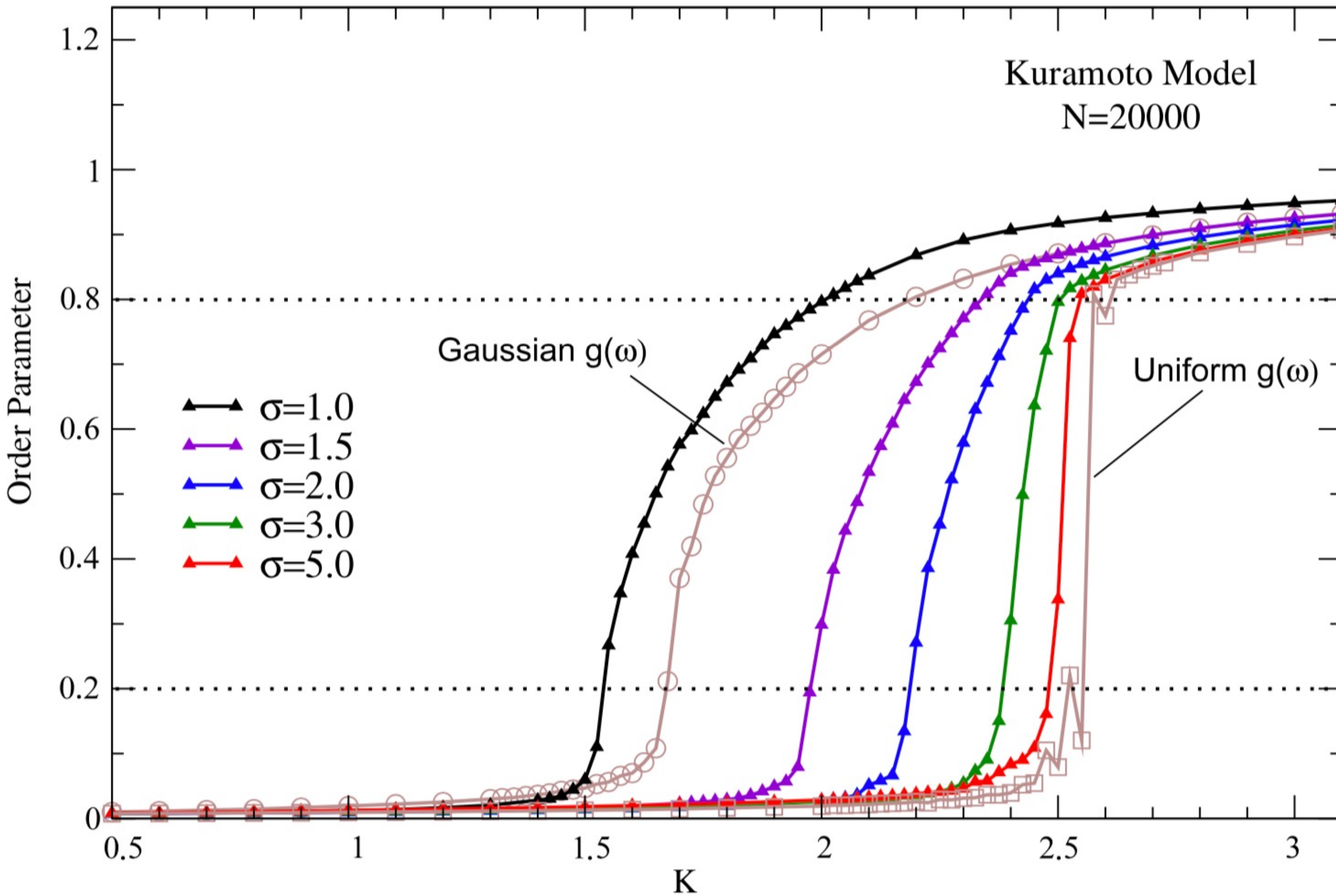
$$\boxed{K_C = \frac{2}{\pi g(0)}}$$



G.MIRITELLO, A.PLUCHINO, A.RAPISARDA (2009). Phase Transitions and Chaos in Long-Range Models of Coupled Oscillators. *Europh. Lett.* vol. 85, pp. 10007

Transizione di fase nel Modello di Kuramoto

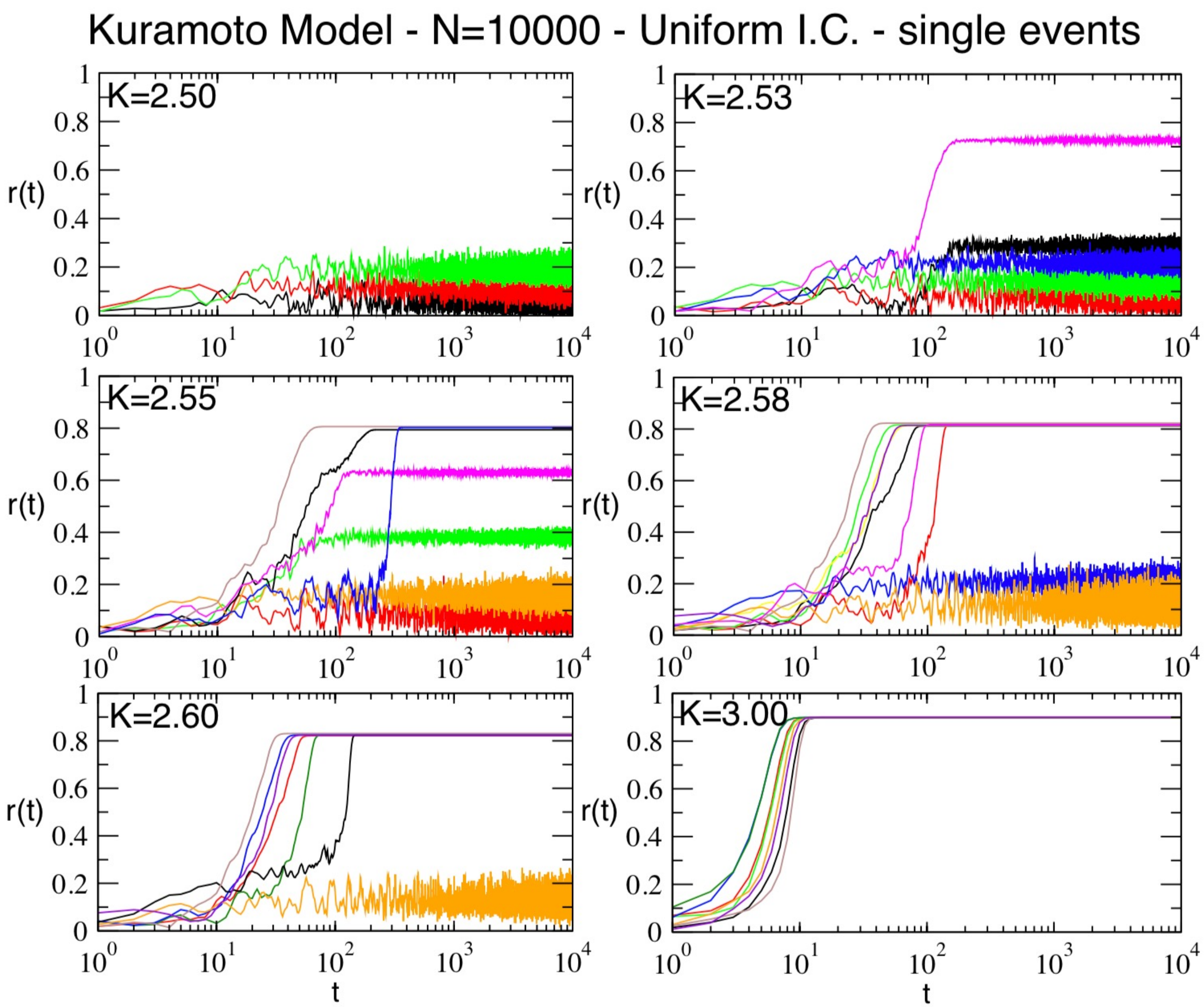
In realtà è anche possibile passare da un tipo di transizione all'altra facendo aumentare gradualmente la deviazione standard della distribuzione Gaussiana delle frequenze, trasformandola infine (per σ > 5) in una distribuzione uniforme:



G.MIRITELLO, A.PLUCHINO, A.RAPISARDA (2009). Central Limit Behavior in the Kuramoto model at the "Edge of Chaos". *Physica A* 388, 4818-4826.

Stati Metastabili nel Modello di Kuramoto

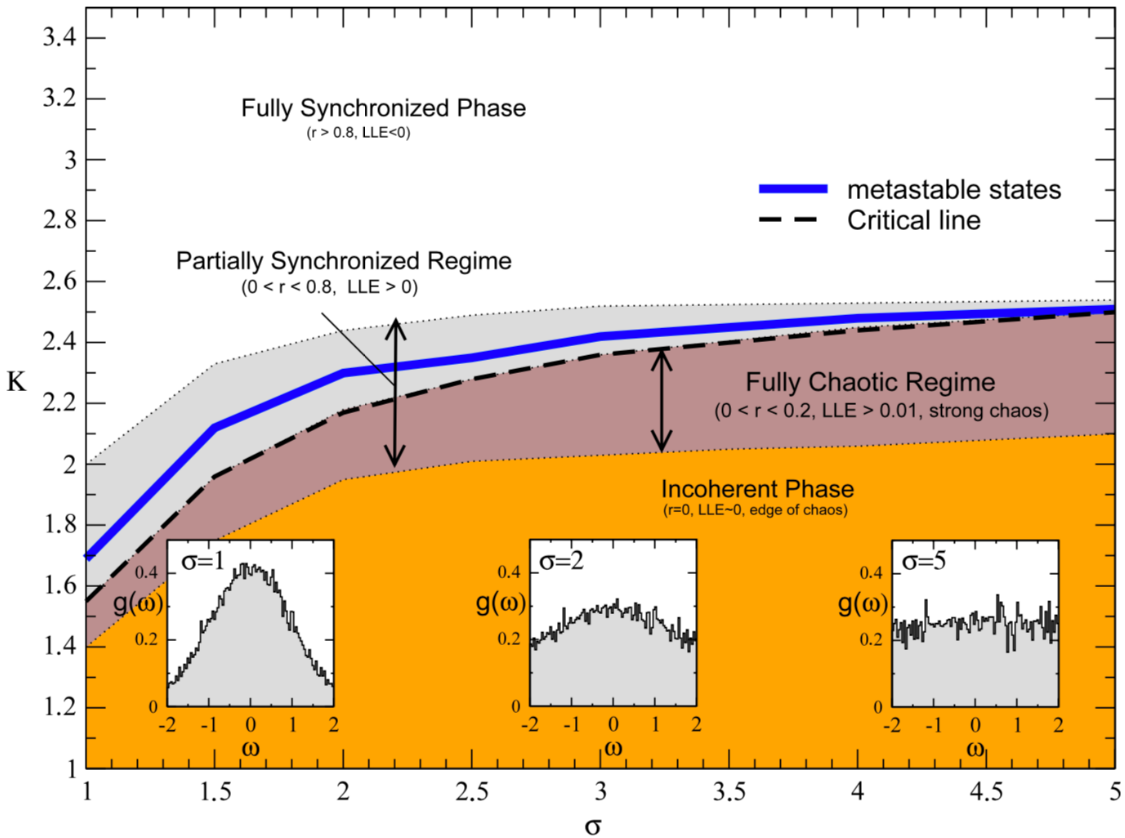
Ma l’analogia del modello di Kuramoto col modello HMF va oltre la presenza della transizione di fase: si è visto infatti che, quando K assume valori prossimi a quello critico (K_C=2.547), così come accadeva nel modello HMF anche qui iniziano ad emergere stati metastabili, in cui il parametro d’ordine si mantiene, per un certo intervallo di tempo, ad un valore più basso del valore asintotico r_∞:



G.MIRITELLO, A.PLUCHINO, A.RAPISARDA (2009). Phase Transitions and Chaos in Long-Range Models of Coupled Oscillators. *Europh. Lett.* vol. 85, pp. 10007

Diagramma di fase nel Modello di Kuramoto

Quanto abbiamo visto può essere sintetizzato in un diagramma di fase K-σ, dove si vede che, all'aumentare di σ, il valore K_C aumenta anch'esso gradualmente formando una «linea critica» tratteggiata: questa linea separa la fase incoerente (omogenea) da quella coerente (sincronizzata) ed è circondata da una zona di sincronia parziale all'interno della quale appare una linea (blu) che identifica i valori di K per cui si manifestano gli stati metastabili. A differenza però di quanto accadeva in HMF, calcolando l'esponente massimale di Lyapunov (LLE) in questi diversi regimi, si vede che è la fase incoerente a trovarsi al margine del caos (Edge of Chaos, con LLE circa zero).

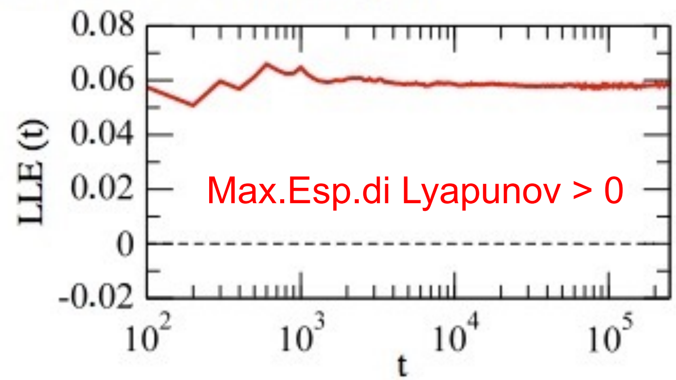


G.MIRITELLO, A.PLUCHINO, A.RAPISARDA (2009). Central Limit Behavior in the Kuramoto model at the "Edge of Chaos". *Physica A* 388, 4818-4826.

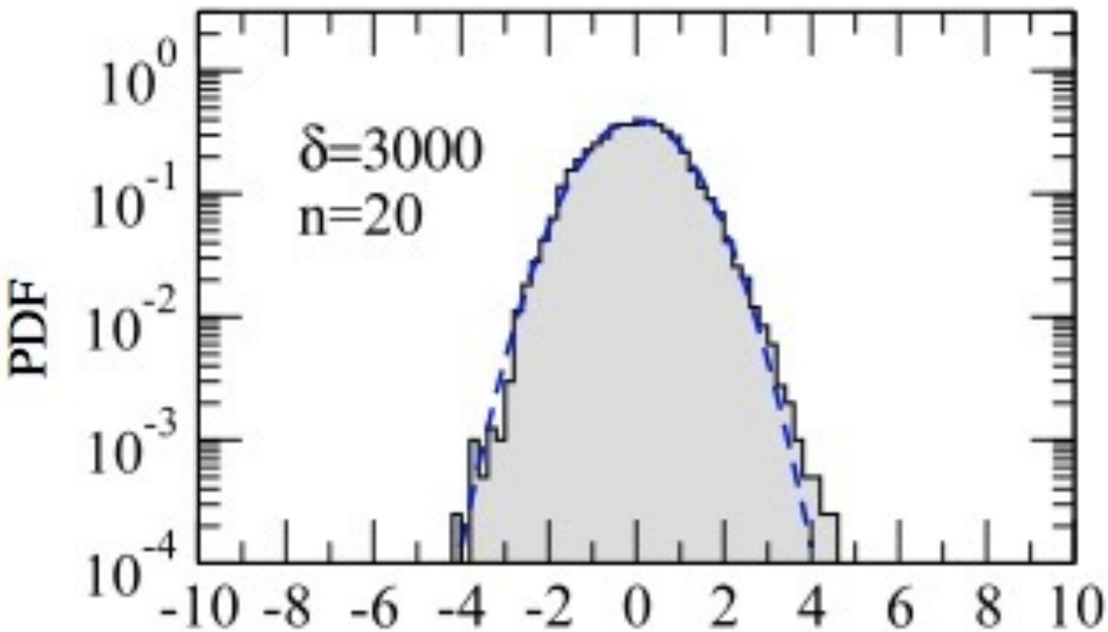
Modello di Kuramoto e Teorema Centrale del Limite (CLT)

Sappiamo che, secondo il CLT standard, la somma (normalizzata) di un grande numero di variabili casuali INDIPENDENTI è approssimativamente distribuita come una variabile casuale normale standard (distribuzione Gaussiana). Se come variabili prendiamo le fasi degli oscillatori di Kuramoto ad istanti di tempo successivi (con passo δ) nel regime caotico, cioè nella fase parzialmente sincronizzata con $0 < r < 0.2$, troviamo in effetti una distribuzione Gaussiana (una parabola in scala Log-Lin) :

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \theta_i(k\delta)$$



Fully Chaotic Regime



Standard Gaussian CLT attractor

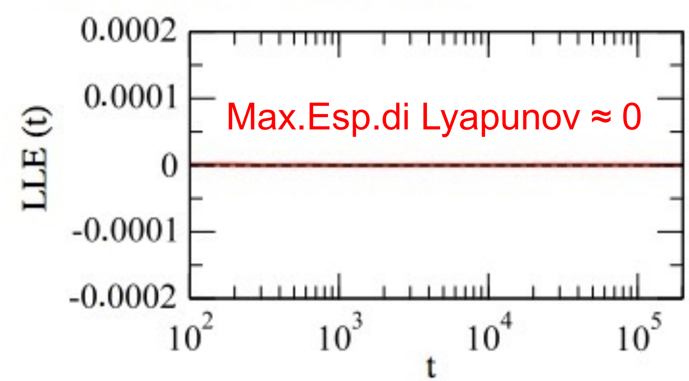
Code esponenziali

G.MIRITELLO, A.PLUCHINO, A.RAPISARDA (2009). Central Limit Behavior in the Kuramoto model at the "Edge of Chaos". *Physica A* 388, 4818-4826.

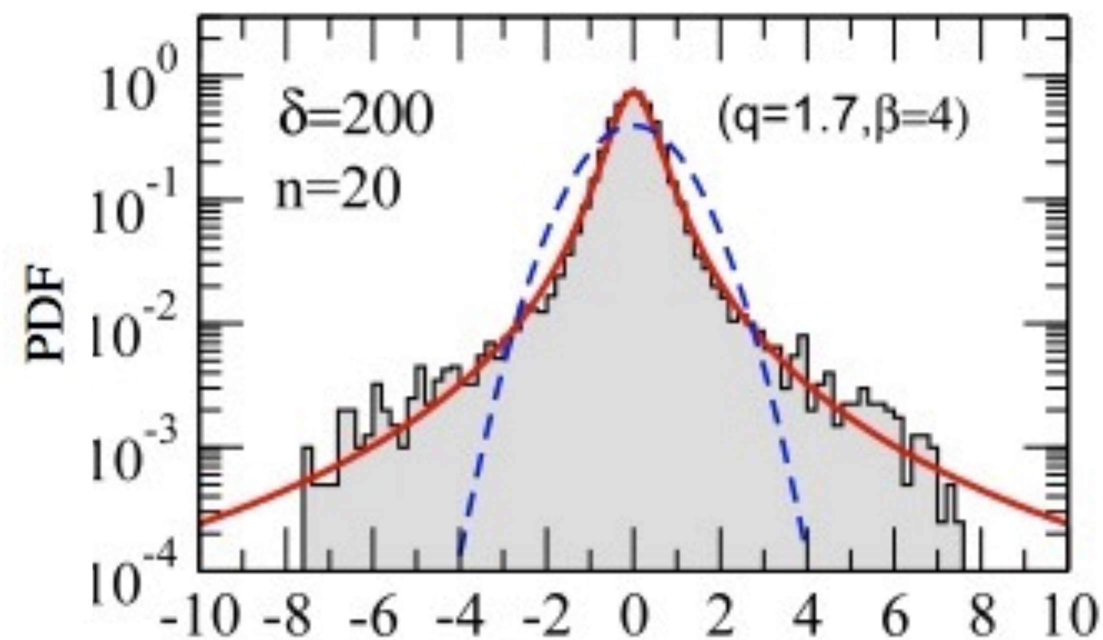
Violazione del Teorema Centrale del Limite all'Edge of Chaos

Prendendo invece le stesse variabili dinamiche al margine del caos, cioè nella fase incoerente con $r \sim 0$ dove il LLE rimane anch'esso nullo, la distribuzione non segue più le previsioni del CLT ma viene ben fittata dalla curva q-Gaussiana introdotta nella Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis, con le sue tipiche code a legge di potenza: anche nel modello di Kuramoto, quindi, la presenza di correlazioni a lungo raggio tra gli oscillatori produce la violazione dei teoremi statistici standard!

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \theta_i(k\delta)$$



"Edge of Chaos" Regime

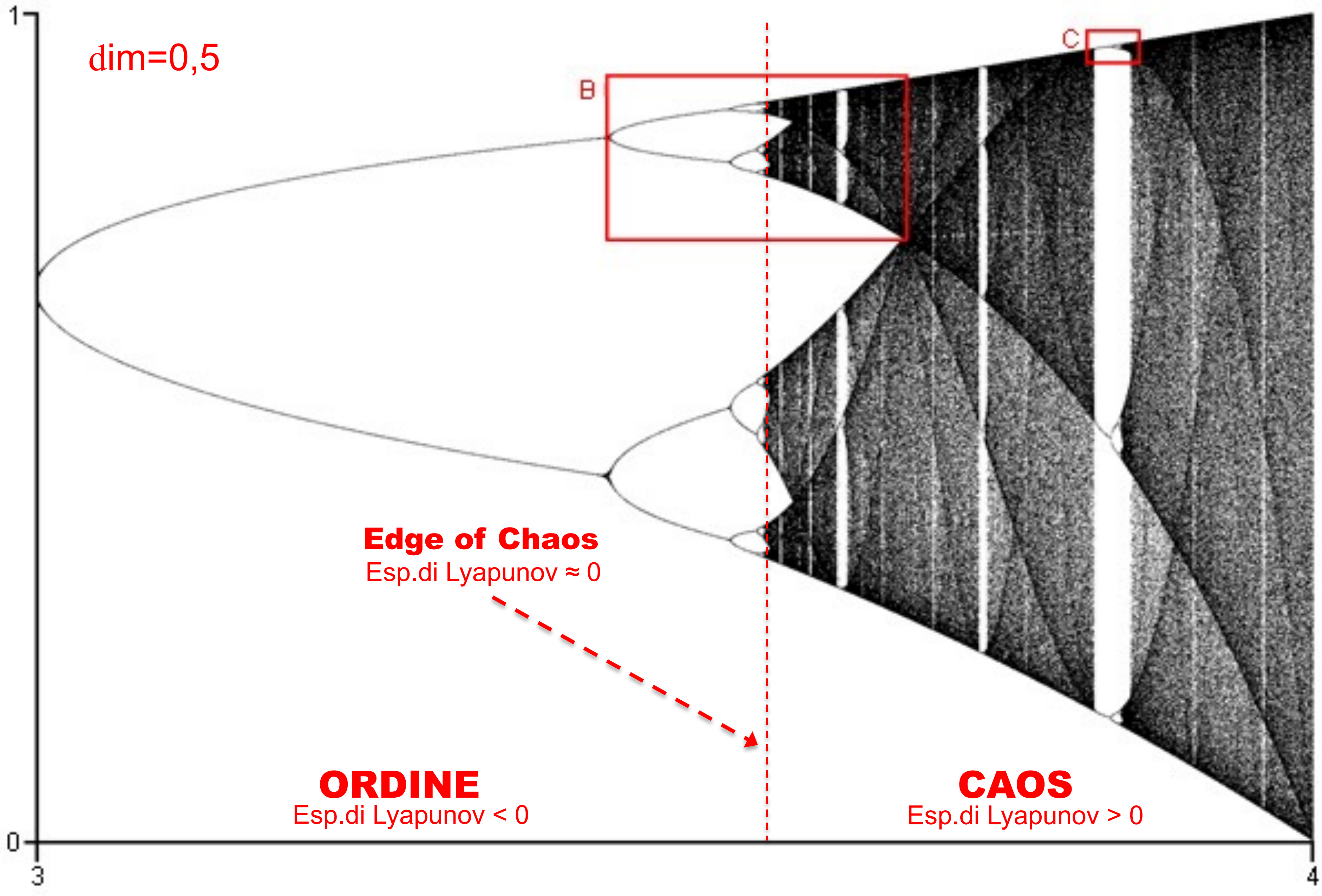


Generalized q-Gaussian attractor

Code a legge di potenza!

G.MIRITELLO, A.PLUCHINO, A.RAPISARDA (2009). Central Limit Behavior in the Kuramoto model at the "Edge of Chaos". *Physica A* 388, 4818-4826.

The “edge of chaos” nella Mappa Logistica



Sincronizzazione di Mappe Accoppiate

La sincronizzazione di numerose unità elementari accoppiate è stata largamente studiata negli ultimi decenni fornendo importanti intuizioni sui meccanismi che generano **comportamenti collettivi emergenti** in molti sistemi complessi fisici, biologici o sociali. In questo contesto le **mappe accoppiate** sono state spesso utilizzate in svariati modelli teorici...

- Y. Kuramoto, "*Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*" (Springer, New York, 1984)
- A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths, "*Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences*", (Cambridge 2001)
- S.H. Strogatz, "*Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*", (Hyperion Books, 2004)
- K. Kaneko , "*Simulating Physics with Coupled Map Lattices*" (World Scientific, Singapore, 1990)

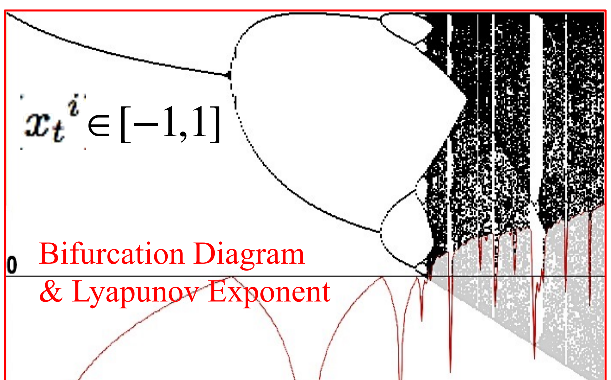
MODELLO CML di KANEKO: UNA CATENA LINEARE (Lattice 1D) di MAPPE LOGISTICHE ACCOPPIATE LOCALMENTE

Single Logistic (Quadratic) Map

$$\boxed{f\left(x_t^i\right) = 1 - \mu\left(x_t^i\right)^2, \text{ with } \mu \in [0,2]}$$

N Coupled Logistic Maps with periodic boundary conditions

$$\boxed{x_{t+1}^i = (1-\epsilon)\, f\left({x_t}^i\right) + \frac{\epsilon}{2}\left[f\left({x_t}^{i-1}\right) + f\left({x_t}^{i+1}\right)\right]}$$



map i+1

map i

map i-1

Intensità (strenght) dell'accoppiamento

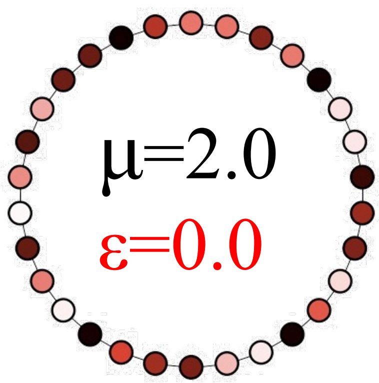
$$\boxed{\epsilon \in [0,1]}$$

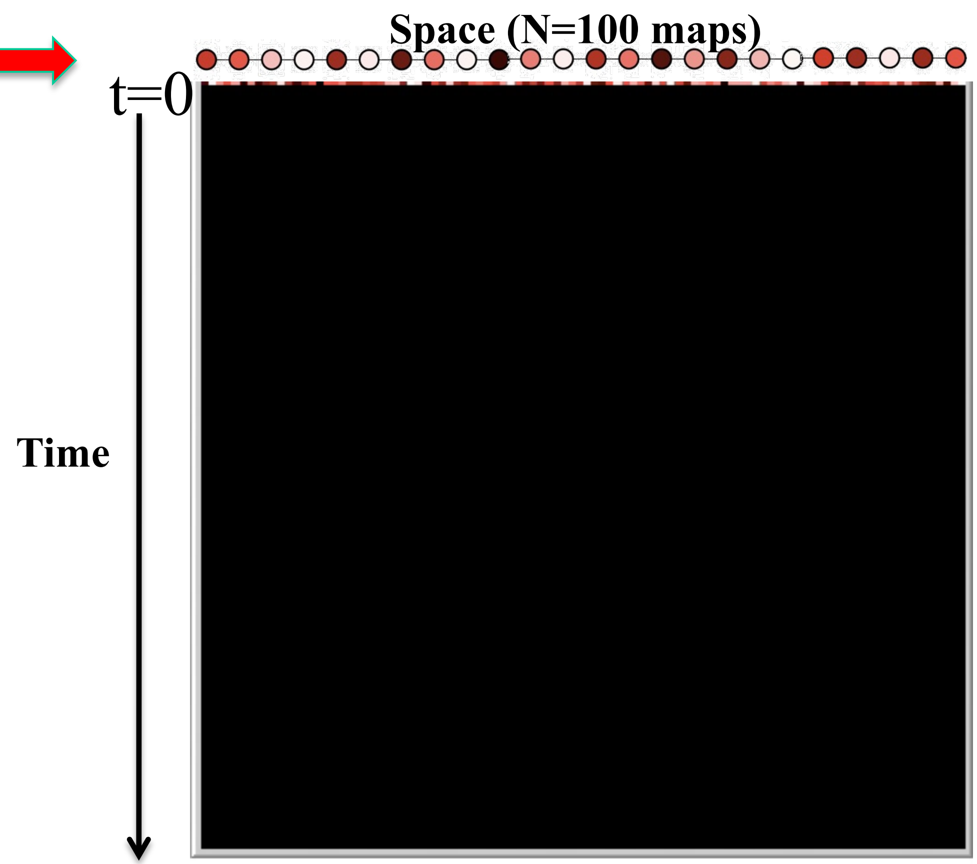
Differenti colori indicano diverse condizioni iniziali per le mappe

Caos spazio-temporale e patterns di sincronizzazione nel Modello CML (Coupled Map Lattice)

K. Kaneko , "*Simulating Physics with Coupled Map Lattices*" (World Scientific, Singapore, 1990)

$$\boxed{x^i_{t+1} = (1-\epsilon)\, f\left({x_t}^i\right) + \frac{\epsilon}{2}\left[f\left({x_t}^{i-1}\right) + f\left({x_t}^{i+1}\right)\right]}$$



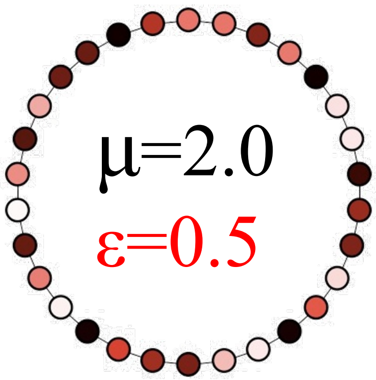


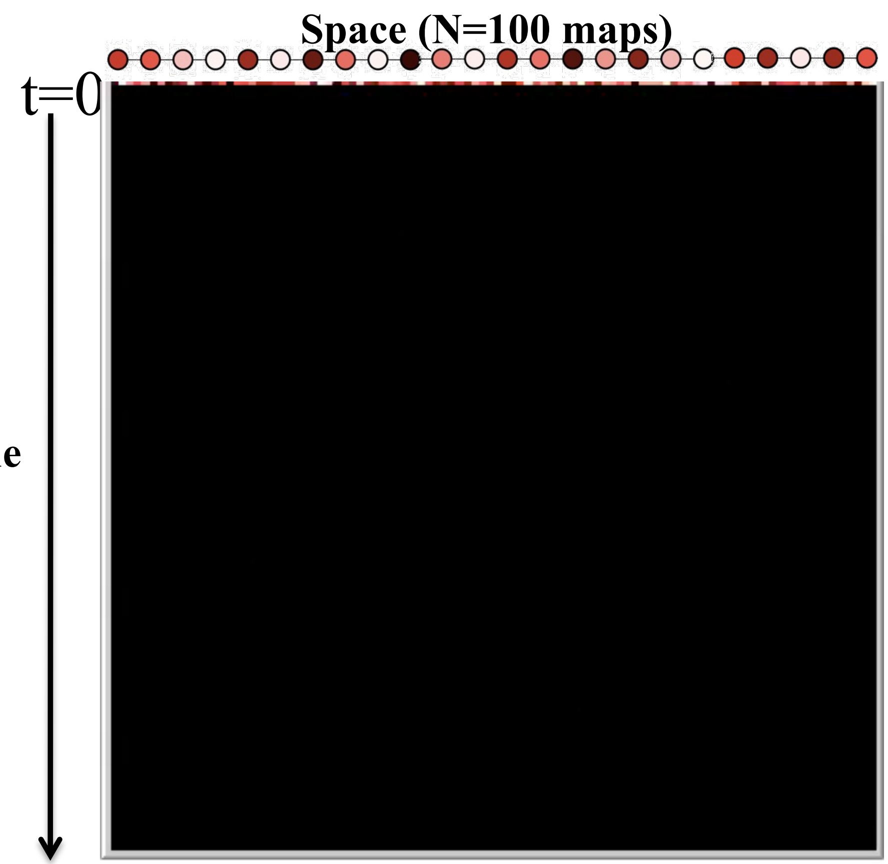
Questo modello è stato particolarmente studiato **in regime di "strong chaos"**, dove le mappe accoppiate mostrano svariati **patterns di sincronizzazione e caos spazio-temporale (fully developed turbulence)** in funzione del parametro di accoppiamento ε.

Caos spazio-temporale e patterns di sincronizzazione nel Modello CML (Coupled Map Lattice)

K. Kaneko , "*Simulating Physics with Coupled Map Lattices*" (World Scientific, Singapore, 1990)

$$\boxed{x_{t+1}^{i} = (1-\epsilon)\, f\left(x_t{}^{i}\right) + \frac{\epsilon}{2}\left[f\left(x_t{}^{i-1}\right) + f\left(x_t{}^{i+1}\right)\right]}$$



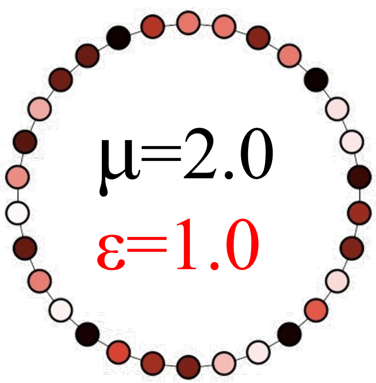


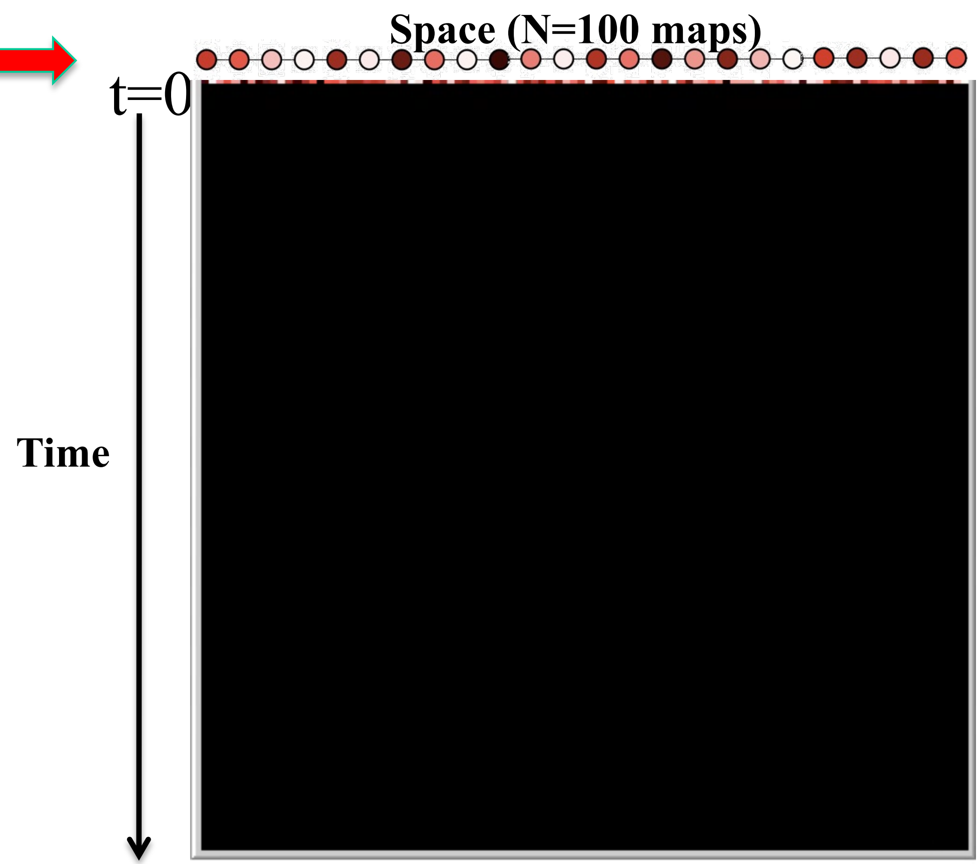
Questo modello è stato particolarmente studiato **in regime di "strong chaos"**, dove le mappe accoppiate mostrano svariati **patterns di sincronizzazione e caos spazio-temporale (fully developed turbulence)** in funzione del parametro di accoppiamento ε.

Caos spazio-temporale e patterns di sincronizzazione nel Modello CML (Coupled Map Lattice)

K. Kaneko , "*Simulating Physics with Coupled Map Lattices*" (World Scientific, Singapore, 1990)

$$\boxed{x_{t+1}^{i} = (1-\epsilon)\, f\left(x_t{}^{i}\right) + \frac{\epsilon}{2}\left[f\left(x_t{}^{i-1}\right) + f\left(x_t{}^{i+1}\right)\right]}$$



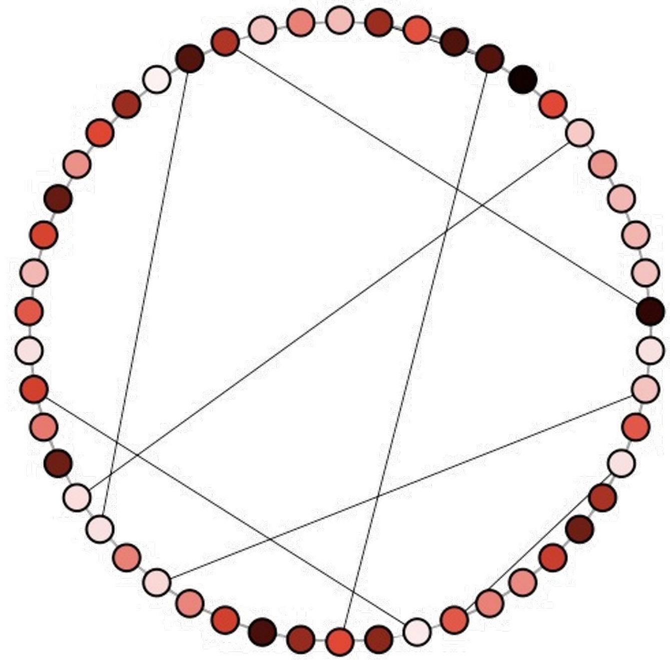


Questo modello è stato particolarmente studiato **in regime di "strong chaos"**, dove le mappe accoppiate mostrano svariati **patterns di sincronizzazione e caos spazio-temporale (fully developed turbulence)** in funzione del parametro di accoppiamento ε.

Intermittenza “on-off” in Reti Small-World di mappe caotiche

C. Li and J. Fang, IEEE 0-7803-8834-8/05 (2005) 288 - 291 Vol. 1

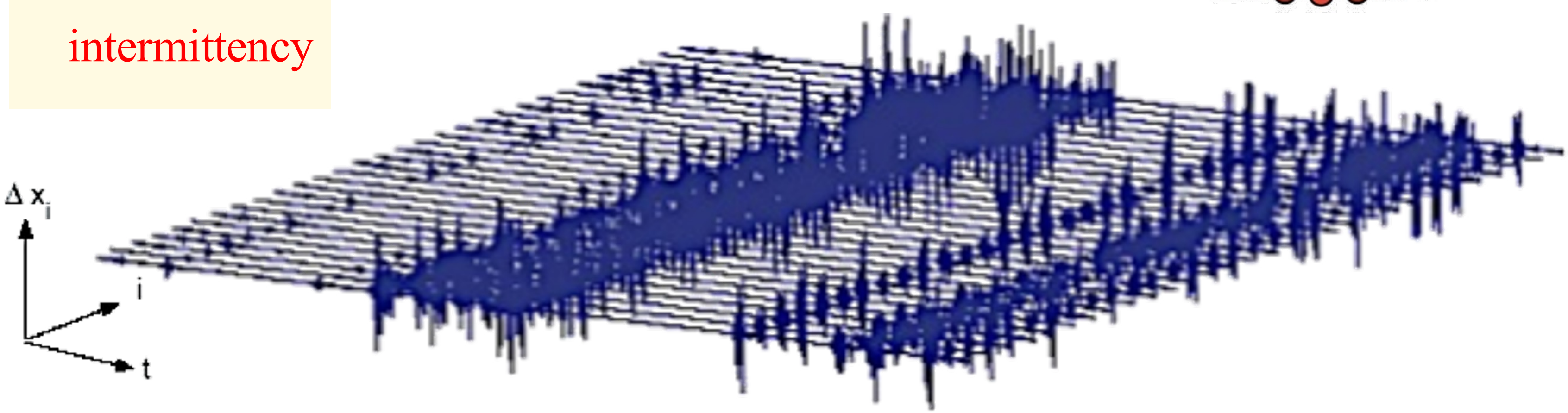
Si è scoperto che trasformando la catena lineare in una rete **Small-World** si influenza il comportamento delle mappe logistiche accoppiate in regime di **strong chaos** in quanto si introducono **correlazioni a lungo raggio** tra le mappe. Ad esempio, per un certo valore dell’accoppiamento ε, quando la **probabilità di rewiring *p*** è **inferiore** a un certo valore critico ($p < 0.29$), lo stato caotico sincrono non è più stabile e appare il fenomeno della cosiddetta **intermittenza “on-off”**.



$\mu=1.9$

$\varepsilon=0.6$

***p* = 0.27**
on-off
intermittency



Noise induced correlations in a lattice of logistic maps at the edge of chaos

A.Pluchino, A.Rapisarda, C.Tsallis, Phys. Rev. E 87, 022910 (2013)

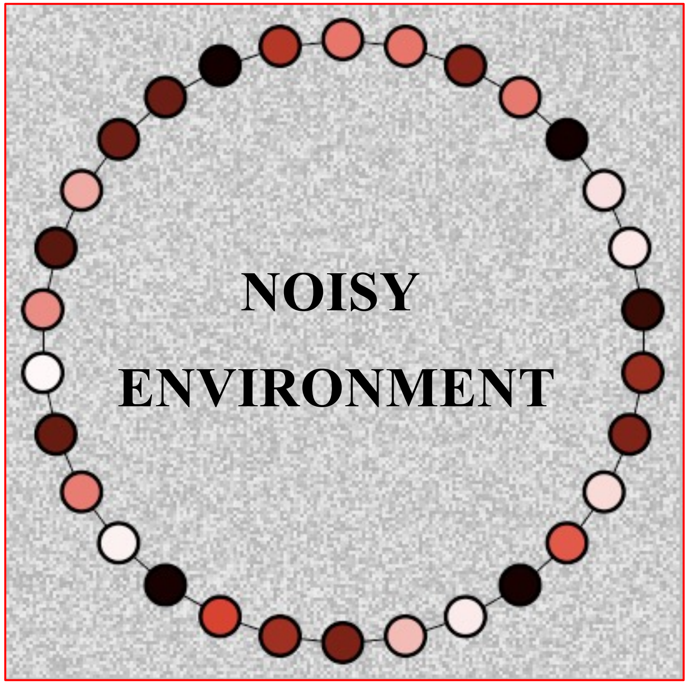
E' stato dimostrato che è possible produrre **correlazioni a lungo raggio e intermittenza** in una catena di mappe logistiche anche lasciandole accoppiate localmente ma **immergendole in un ambiente "rumoroso":**

$$\boxed{x_{t+1}^{i} = (1-\epsilon)\, f\left({x_t}^{i}\right) + \frac{\epsilon}{2}\left[f\left({x_t}^{i-1}\right) + f\left({x_t}^{i+1}\right)\right] + \sigma(t)}$$

$f\left(x_t^i\right)$ taken in module 1 with sign

Il rumore additivo è una variabile casuale estratta con probabilità uniforme nell'intervallo:

$$\sigma(t) \in [0, \sigma_{max}]$$



Noise induced correlations in a lattice of logistic maps at the edge of chaos

A.Pluchino, A.Rapisarda, C.Tsallis, Phys. Rev. E 87, 022910 (2013)

E' stato dimostrato che è possible produrre **correlazioni a lungo raggio e intermittenza** in una catena di mappe logistiche anche lasciandole accoppiate localmente ma **immergendole in un ambiente "rumoroso":**

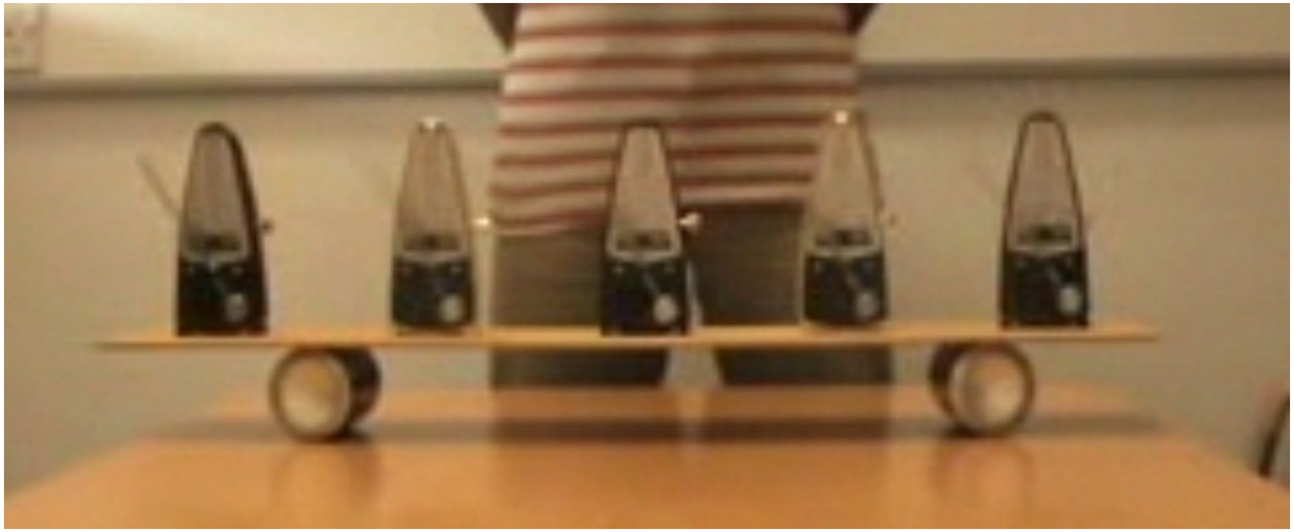
$$\boxed{x_{t+1}^{i} = (1-\epsilon)\, f\left({x_t}^{i}\right) + \frac{\epsilon}{2}\left[f\left({x_t}^{i-1}\right) + f\left({x_t}^{i+1}\right)\right] + \sigma(t)}$$

$f\left(x_t^i\right)$ taken in module 1 with sign

Il rumore additivo è una variabile casuale estratta con probabilità uniforme nell'intervallo:

$$\sigma(t) \in [0, \sigma_{max}]$$

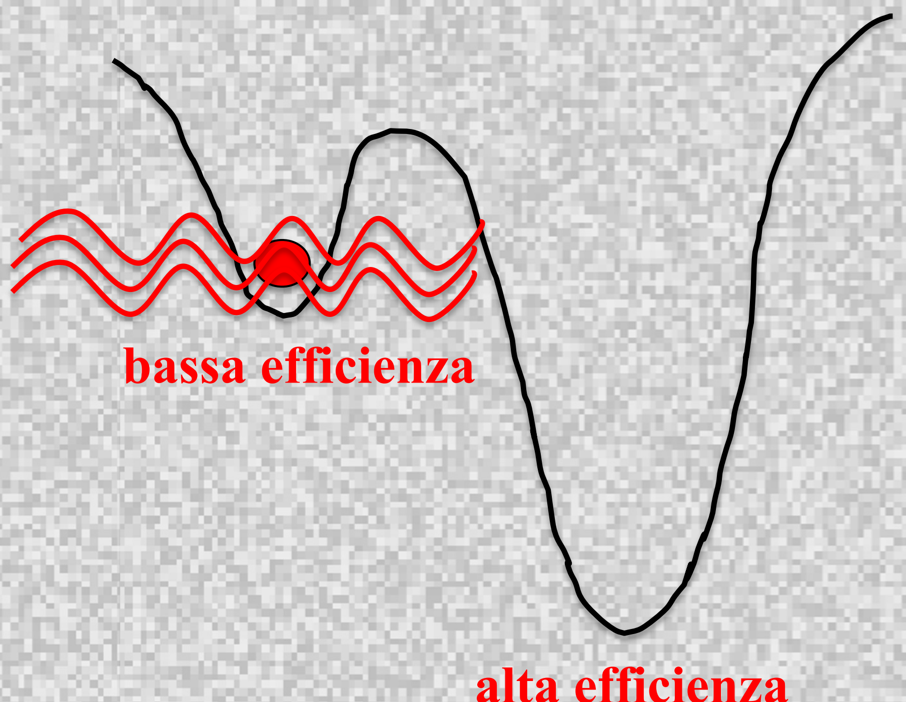
…equivale ancora una volta a mettere i metronomi sull'asse comune, creando così un legame tra gli oscillatori!



Il Ruolo Benefico del Caso (Rumore) nei Sistemi Complessi

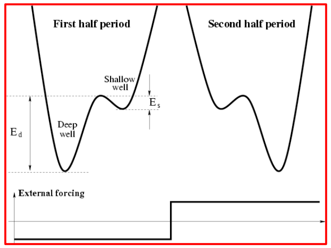
Il Ruolo Benefico del Caso (Rumore) nei Sistemi Complessi

CON RUMORE



Il Ruolo Benefico del Caso (Rumore) nei Sistemi Complessi

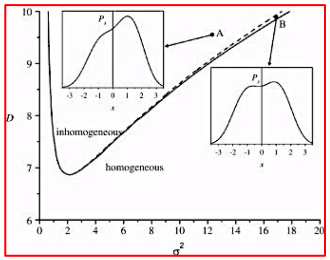
Il ruolo del rumore in fisica e in biologia



STOCASTIC RESONANCE

Un sistema immerso in un **ambiente rumoroso** acquista una migliore sensibilità nei confronti di piccole perturbazioni esterne dipendenti dal tempo.

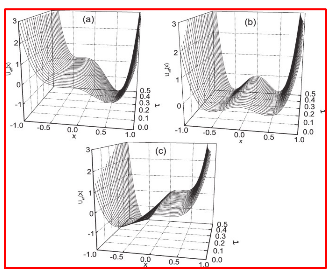
- R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, A. Vulpiani, Tellus 34, 10 (1982)
- L. Gammaitoni, P. H¨anggi, P. Jung and F. Marchesoni, Rev. Mod. Phys. 70, 1 (1998)



NOISE INDUCED NON-EQUILIBRIUM PHASE TRANSITIONS

Il **rumore** genera uno stato ordinato a simmetria spezzata attraverso una genuina transizione di fase del secondo ordine, laddove nessuna transizione si osserva in assenza di rumore.

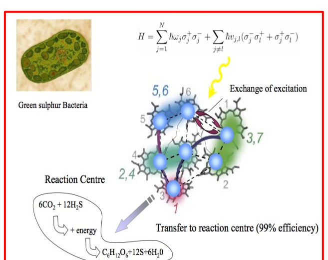
- C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo and R. Toral, Phys. Rev. Lett. 73, 3395 (1994)



NOISE ENHANCED STABILITY

Il **rumore** può stabilizzare uno stato metastabile fluttuante o sottoposto a una forzante periodica in modo che il sistema permanga in tale stato più a lungo che in assenza di rumore.

- R.N. Mantegna and B. Spagnolo, Phys. Rev. Lett. 76, 563 (1996)

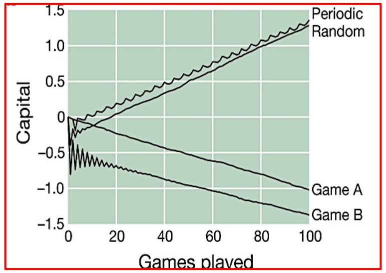


NOISE ASSISTED TRANSPORT IN BIOLOGICAL NETWORKS

Il **rumore** altera i percorsi di trasferimento energetico in reti biologiche complesse, sopprimento percorsi inefficaci e facilitando quelli diretti verso i centri di reazione.

- M.B. Plenio and S.F. Huelga, New J. Phys. 10, 113019 (2008)
- F. Caruso, S.F. Huelga and M.B. Plenio, Phys. Rev. Lett. 105, 190501 (2010)

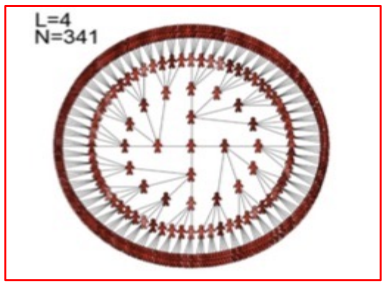
Il ruolo delle strategie casuali nei sistemi sociali ed economici



MINORITY GAMES AND PARRONDO PARADOX

In **Teoria dei Giochi** due strategie perdenti, se giocate alternativamente o in maniera casuale, possono risultare vincenti.

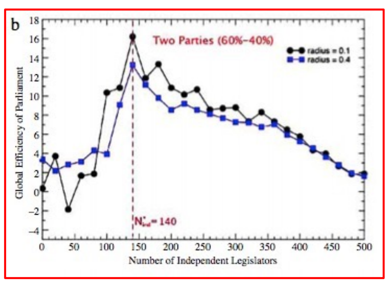
- G.P. Harmer and D. Abbott, Nature 402, 864 (1999)
- J.B. Satinover and D. Sornette, Eur. Phys. J. B 60, 369 (2007)



RANDOM STRATEGIES IN HIERARCHICAL ORGANIZATIONS

Strategie di **promozione casuale** possono aumentare l'efficienza di una organizzazione gerarchica aggirando gli effetti nefasti del Principio di Peter.

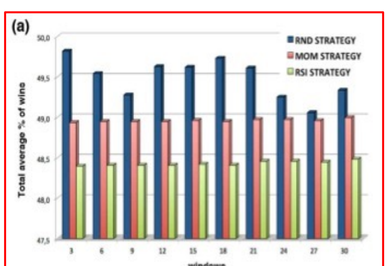
- A.Pluchino, A.Rapisarda and C.Garofalo, Physica A, 389, 467 (2010).
- A.Pluchino, A.Rapisarda and C.Garofalo, Physica A, 390 3496 (2011)
- http://www.pluchino.it/ignobel_new.html



RANDOM STRATEGIES FOR SELECTING LEGISLATORS

L'efficienza di un Parlamento può essere incrementata attraverso l'introduzione di una componente di **legislatori sorteggiati** e quindi indipendenti dai partiti.

- A.Pluchino, C.Garofalo, A.Rapisarda, S.Spagano, M.Caserta, Physica A 390, 3944 (2011).
- M.Caserta, A.Pluchino, A.Rapisarda, S.Spagano, Physica A 565, 125430 (2021).
- http://www.pluchino.it/parliament-ita.html



RANDOM STRATEGIES IN FINANCIAL TRADING

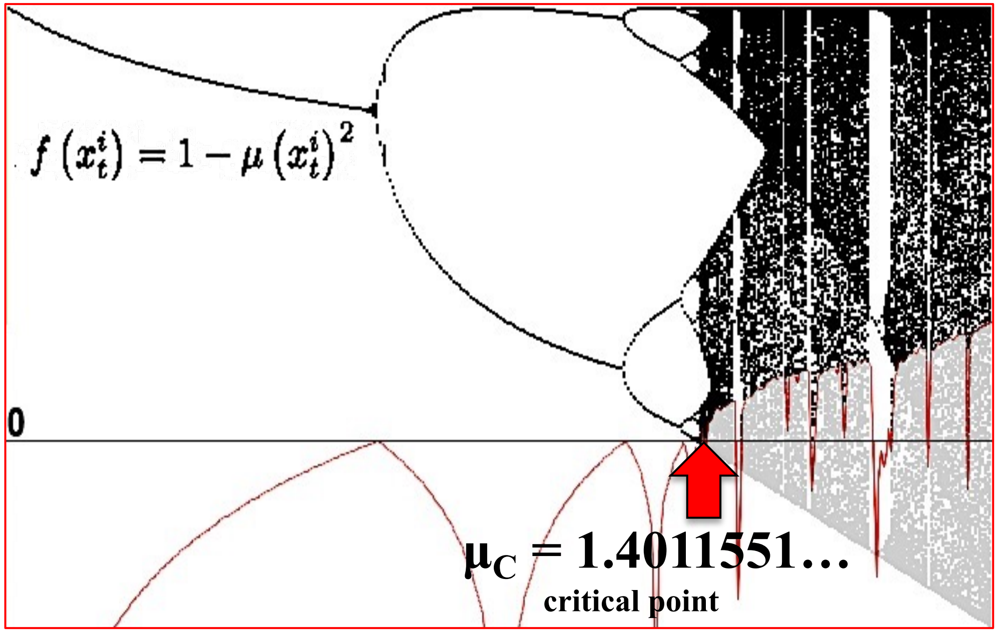
Strategie di **investimenti casuali** sembrano performare altrettanto bene, ma con rischi più contenuti, delle strategie di investimento standard, che sfruttano algoritmi basati sulla storia passata degli indici di mercato.

- A.E.Biondo, A.Pluchino, A.Rapisarda, Journal of Statistical Physics (2013) 151:607-622
- A.E.Biondo, A.Pluchino, A.Rapisarda, D.Helbing (2013) Plos One (2013) 8(7): e68344
- A.E.Biondo, A.Pluchino, A.Rapisarda, D.Helbing (2013) arXiv:1309.3639
- http://www.pluchino.it/financial-markets_ita.html

Noise induced correlations in a lattice of logistic maps at the edge of chaos

A.Pluchino, A.Rapisarda, C.Tsallis, Phys. Rev. E 87, 022910 (2013)

Nella catena di mappe logistiche accoppiate in presenza di rumore le single mappe non sono state regolate però nel regime di strong chaos, come si è visto negli altri modelli, ma sono state poste al punto critico, **al margine del caos**, il che le rende particolarmente sensibili alle correlazioni:



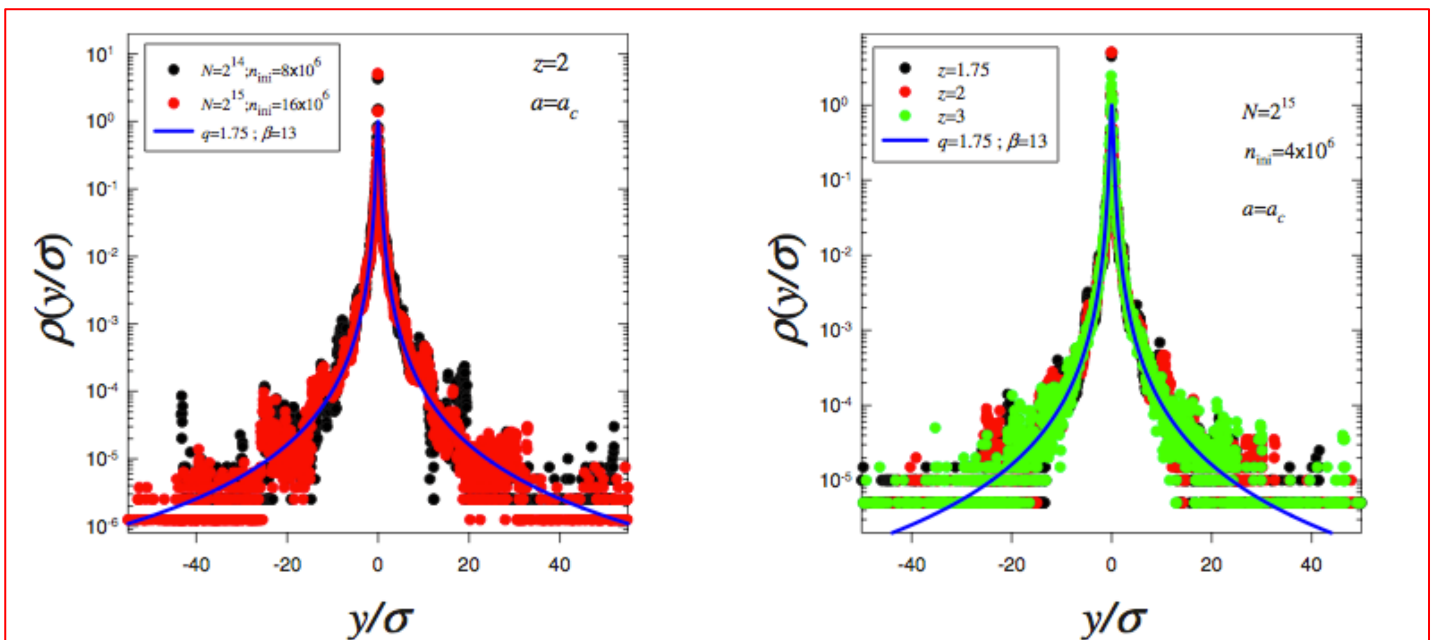
I sistemi biologici complessi operano spesso **al margine del caos e in ambienti "rumorosi"**. Dunque studiare gli effetti di un piccolo rumore in questi "toy models" di sistemi elementari accoppiati può essere utile per capire il modo in cui molte unità interagenti si comportano nei sistemi reali, come per esempio nelle cellule dei sistemi viventi.

See e.g.: - D. Stokic, R. Hanel, S. Thurner, Phys. Rev. E. 77, 061917 (2008)
- R. Hanel, M. Po¨chacker, M. Scholling, S.Thurner, Plos One bf 7, e36679 (2012)

Correlazioni in una singola mappa logistica at the edge of chaos

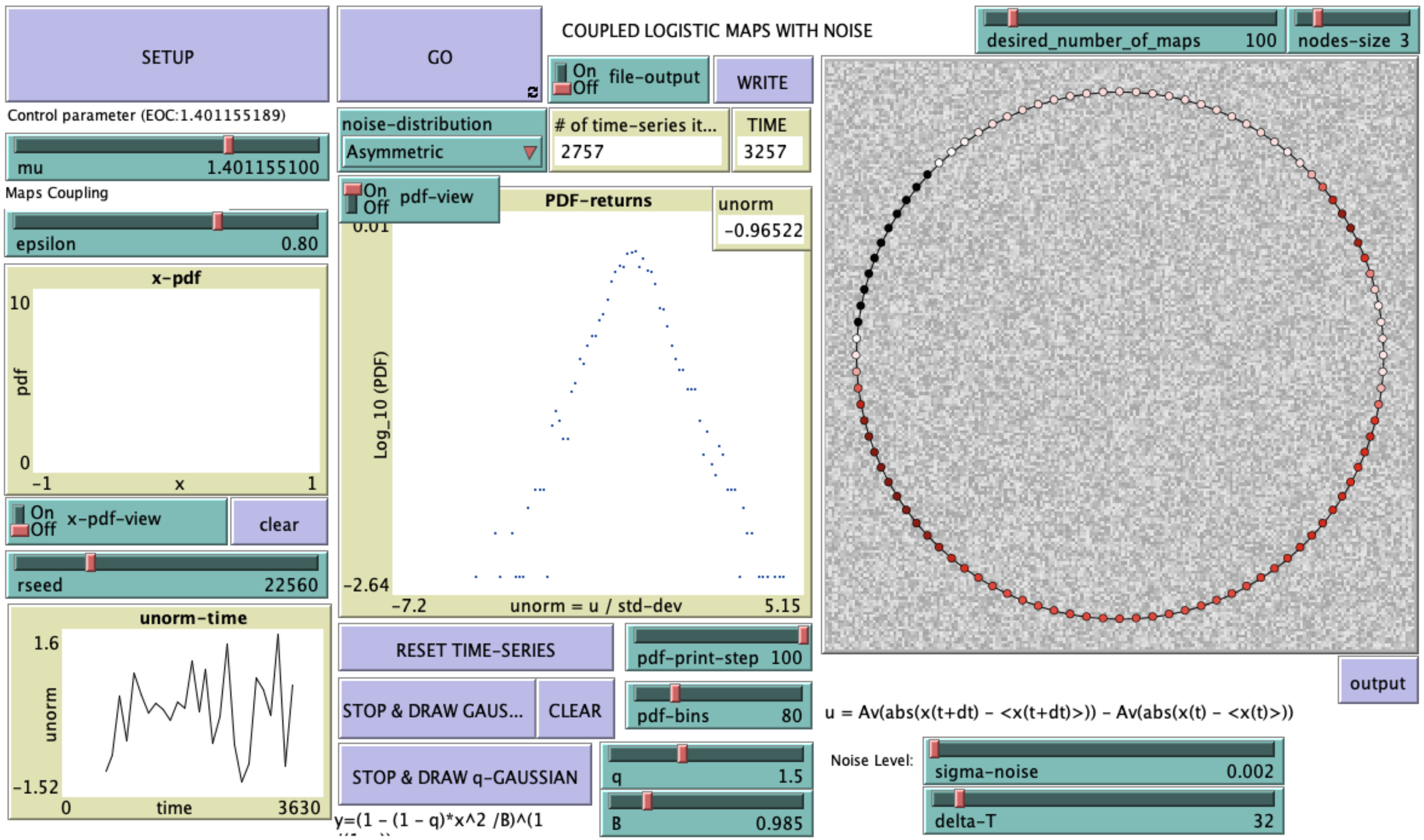
Il comportamento di una **singola mappa logistica at the edge of chaos** è stato largamente investigato in relazione al **Teorema Centrale del Limite** (CLT). Al **punto critico** dell'accumulazione dei raddoppiamenti di periodo **(μ=μ_c)**, il CLT standard non risulta più valido, a causa di **forti correlazioni temporali** tra le iterate. In questo caso, la densità di probabilità converge ad una ***q*-Gaussiana**, in accordo con la **generalizzazione del CLT** nel contesto della **meccanica statistica non estensiva di Tsallis**.

- U.Tirnakli, C.Beck and C.Tsallis, Phys. Rev. E, 75 (2007) 040106 (R)
- U.Tirnakli, C.Tsallis and C.Beck, Phys. Rev. E, 79 (2009) 056209 (R)
- S. Umarov, C. Tsallis, S. Steinberg, Milan J. math.76,307 (2008)



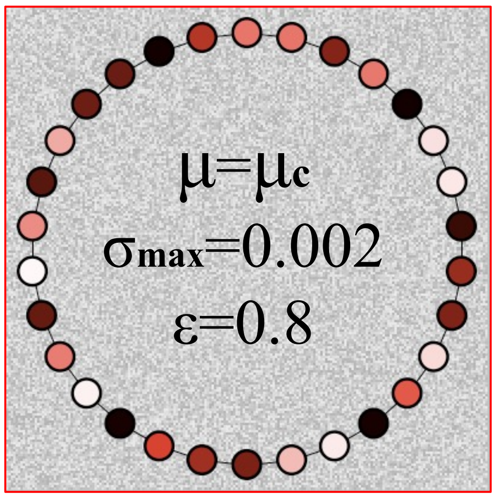
Correlazioni indotte dal rumore in una catena di mappe logistiche at the edge of chaos

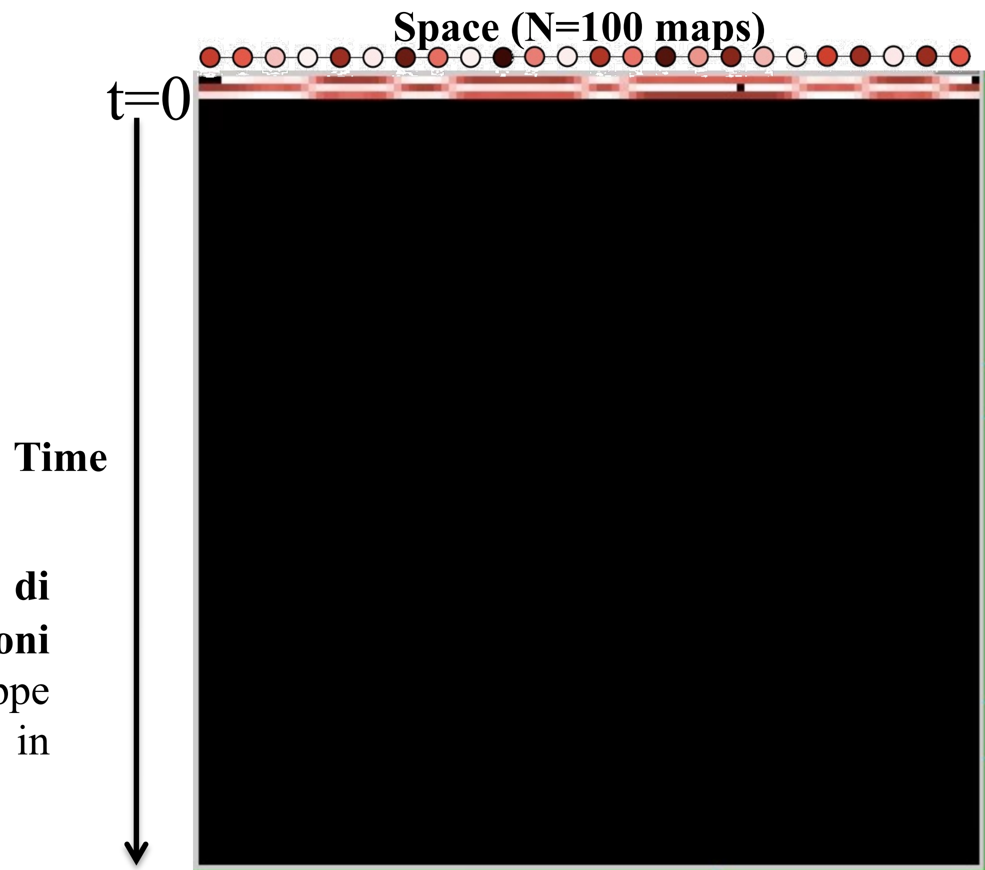
$$x^{i}_{t+1} = (1-\epsilon)\, f\left(x_t{}^{i}\right) + \frac{\epsilon}{2}\left[f\left(x_t{}^{i-1}\right) + f\left(x_t{}^{i+1}\right)\right] + \sigma(t)$$



Correlazioni indotte dal rumore in una catena di mappe logistiche at the edge of chaos

$$x_{t+1}^{i} = (1-\epsilon)\, f\left(x_t{}^{i}\right) + \frac{\epsilon}{2}\left[f\left(x_t{}^{i-1}\right) + f\left(x_t{}^{i+1}\right)\right] + \sigma(t)$$





L'aggiunta di un **piccolo livello di rumore** induce evidenti **correlazioni spatiotemporali** nella catena di mappe logistiche at the edge of chaos, in presenza of **forte accoppiamento**.

A.Pluchino, A.Rapisarda, C.Tsallis, Phys. Rev. E 87, 022910 (2013)

Correlazioni indotte dal rumore in una catena di mappe logistiche at the edge of chaos

Per studiare queste **correlazioni** sottraiamo la componente sincronizzata e teniamo la **parte desincronizzata** di ciascuna mappa considerando, ad ogni iterazione, la differenza tra il valore istantaneo di ogni singola mappa e il valore medio di tutte le mappe a quell'istante. Poi prendiamo la media del valore assoluto di queste differenze per quantificare la **distanza dal regime sincronizzato al tempo t** dell'intero sistema con un'unica variabile:

$$\boxed{d_t = \frac{1}{N}\Sigma_{i=1}^{N}|x_t^i - < x_t^i > |}$$

Quando tutte le mappe sono intrappolate in un qualche **pattern sincronizzato** allora questa quantità rimane vicina allo zero, altrimenti si osservano delle **oscillazioni**.

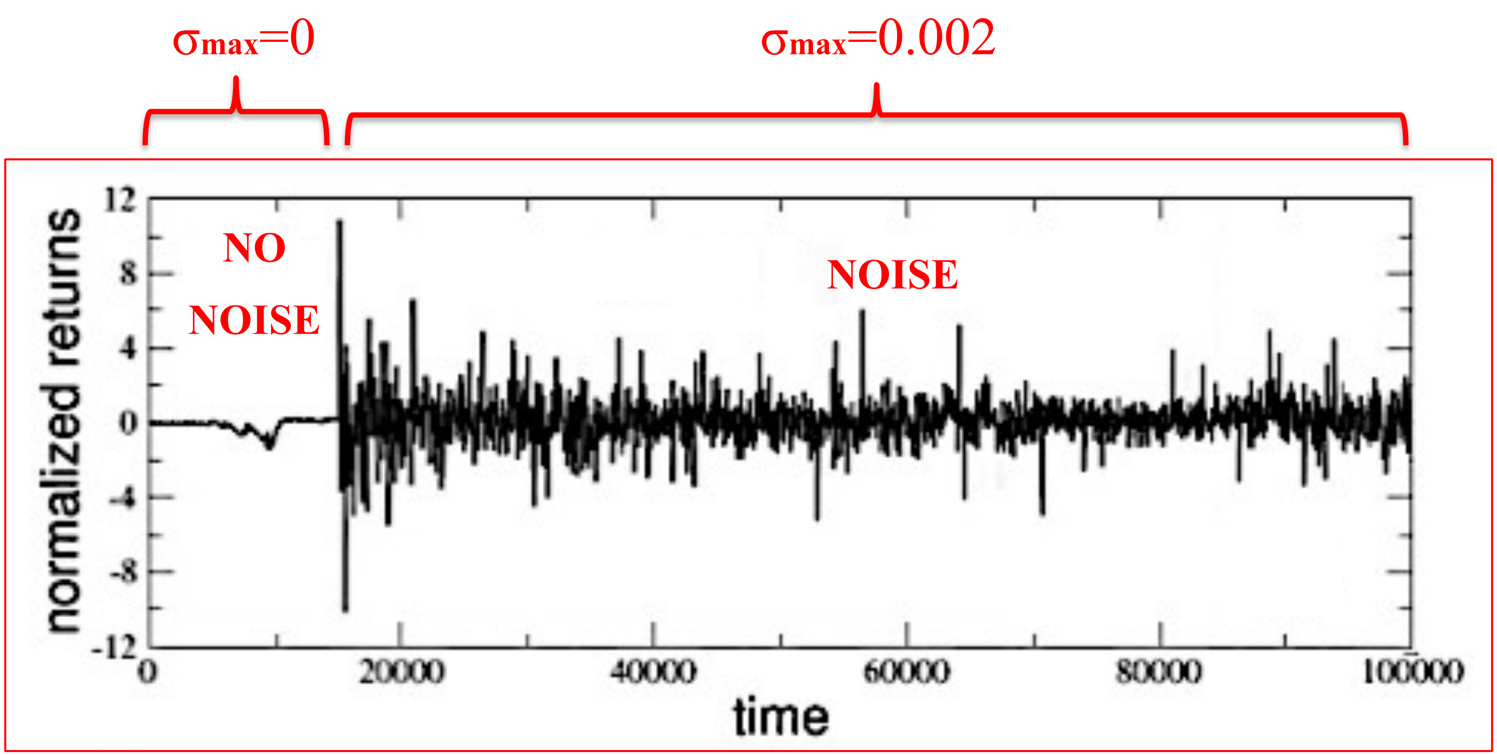
Come si fa abitualmente nello studio della turbolenza nei sistemi fisici o nei mercati finanziari, analizziamo queste oscillazioni considerando i cosiddetti "**ritorni**" a due tempi $\boldsymbol{\Delta d_t}$, con un passo di **$\boldsymbol{\tau}$ iterazioni**, definiti come:

$$\boxed{\Delta d_t = d_{t+\tau} - d_t}$$

- S.Rizzo, A.Rapisarda, "*Application of superstatistics to atmospheric turbulence*" in Complexity, Metastability and Nonextensivity, World Scientific, Singapore (2005) 39
- J. Ludescher, C. Tsallis and A. Bunde, Europhys. Letters 95, 68002 (2011)

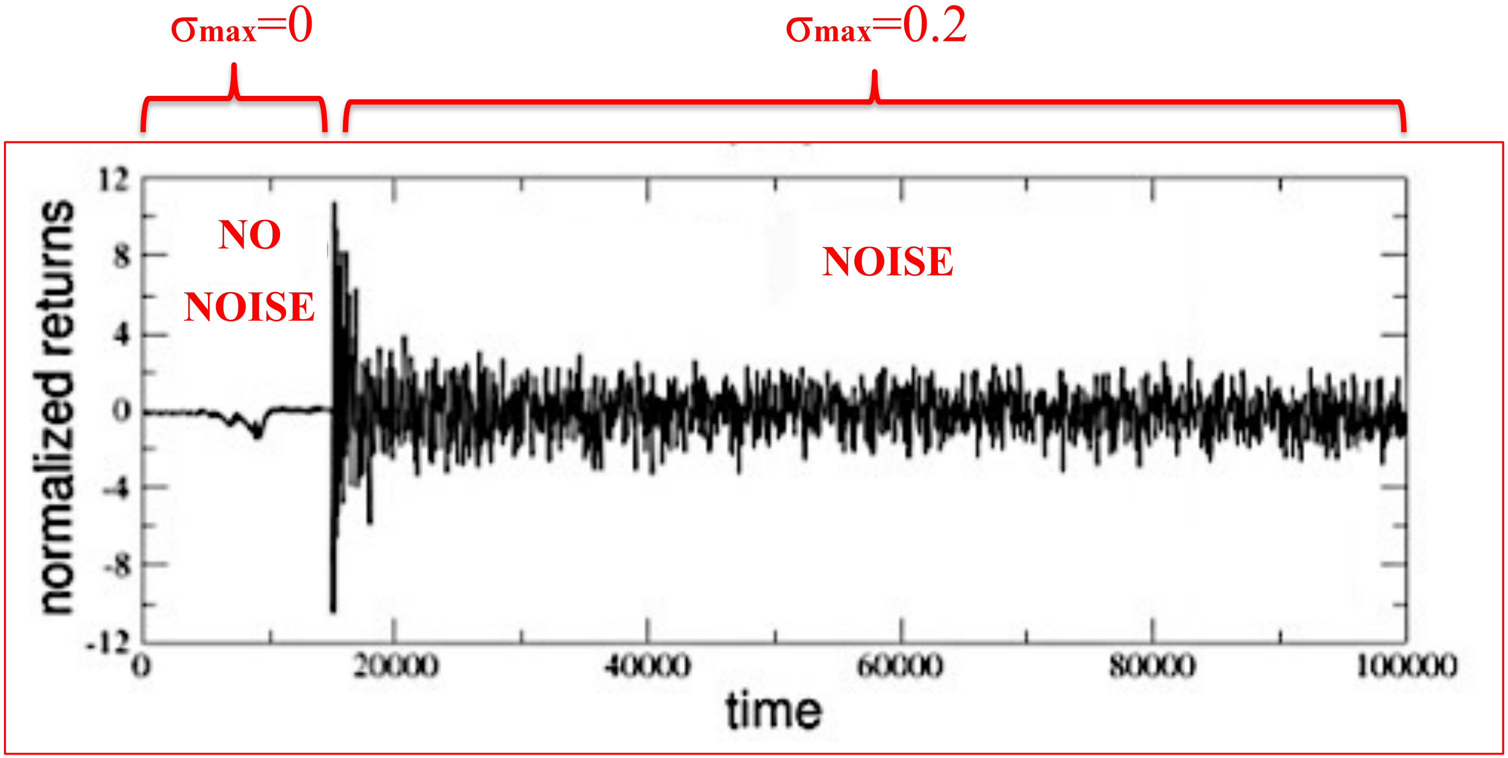
Evoluzione temporale dei ritorni in presenza di “weak noise”

Effetti del <u>rumore</u> sull’evoluzione temporale dei ritorni (normalizzati alla standard deviation della sequenza complessiva) per il caso **$N = 100$, $\mu = \mu_c = 1.4011551...$, $\varepsilon = 0.8$ and $\tau = 32$.** Durante le prime 15.000 iterazioni a **zero noise** (**$\sigma_{max} = 0$**) le mappe restano sincronizzate a causa del forte accoppiamento. A t = 15000 il **noise viene attivato**, con **$\sigma_{max} = 0.002$** (**weak noise**): appare un chiaro **comportamento intermittente**.



Evoluzione temporale dei ritorni in presenza di "strong noise"

Il comportamento intermittente **scompare** se ripetiamo la stessa simulazione ma stavolta con σ_{max} **= 0.2**, cioè in presenza di **strong noise.** In questo caso si osservano solo fluttuazioni **Gaussiane**.



PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore.** Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando σ_{max} < 0.05 e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

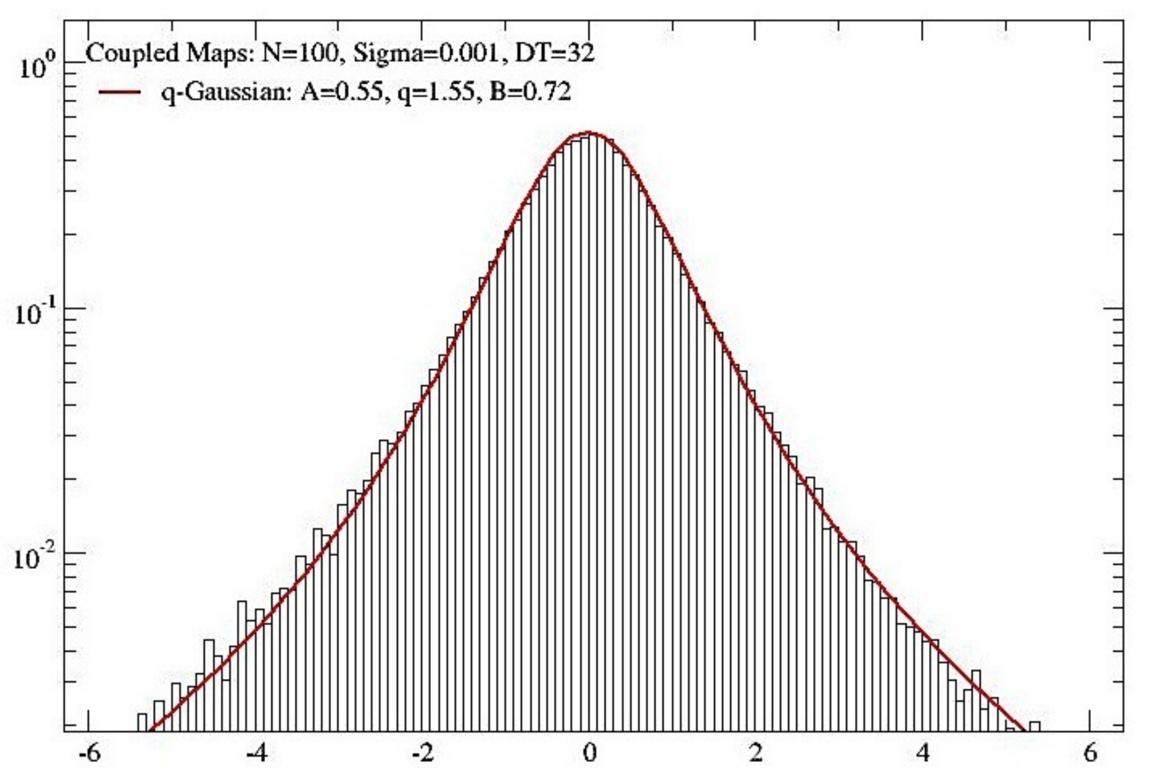
σ_{max}=0.001

q=1.55

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A\left[1-(1-q)\,\beta x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$$

q=1 → Gaussian



normalized returns

PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore.** Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando $\boldsymbol{\sigma_{max}} < 0.05$ e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

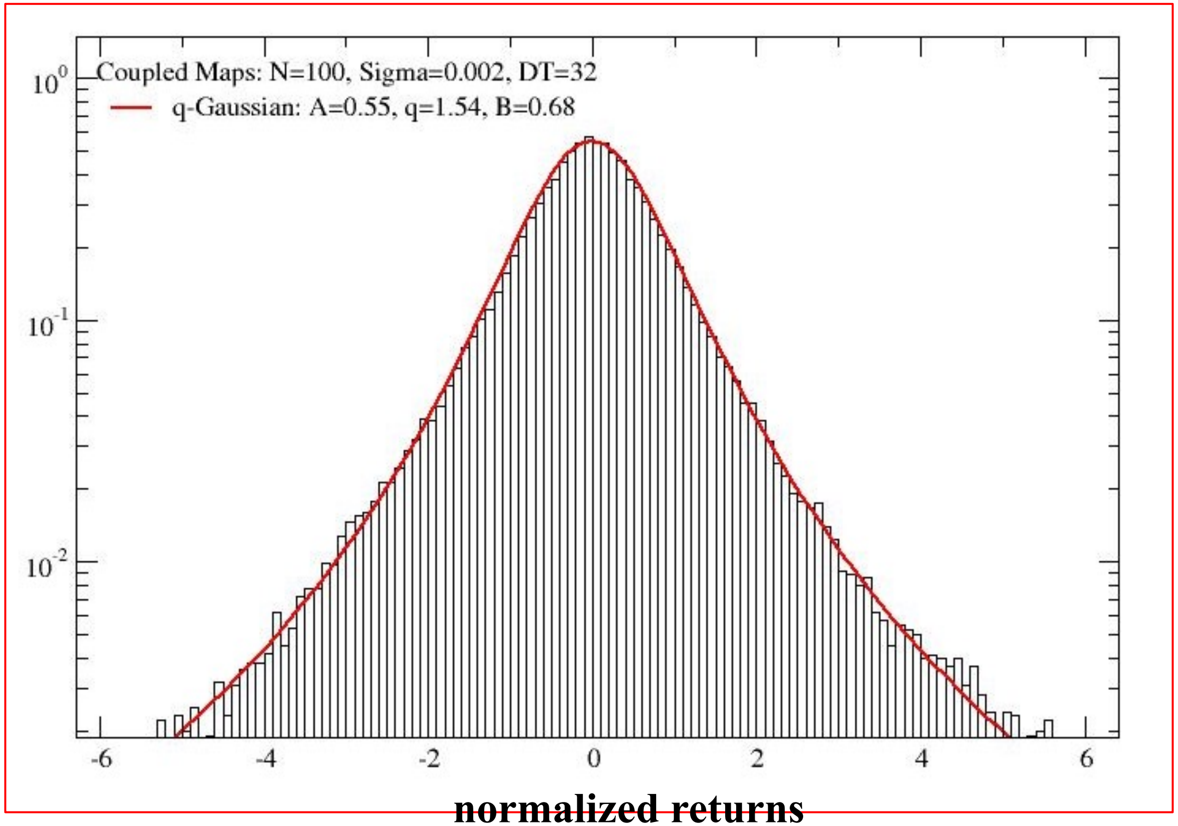
σ_{max}=0.002

q=1.54

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A\left[1-(1-q)\,\beta x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$$

q=1 → Gaussian



PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore.** Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando **σ_{max}** < 0.05 e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

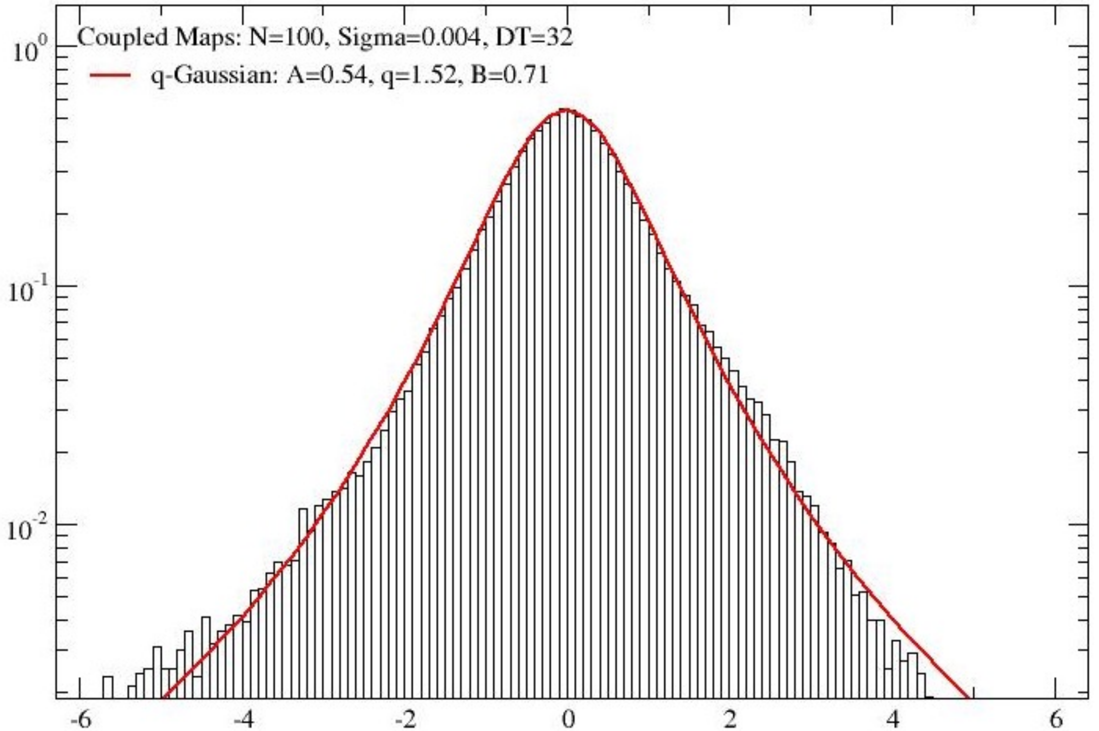
σ_{max}=0.004

q=1.52

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A\left[1-(1-q)\,\beta x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$$

q=1 → Gaussian



normalized returns

PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore.** Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando σ_{max} < 0.05 e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

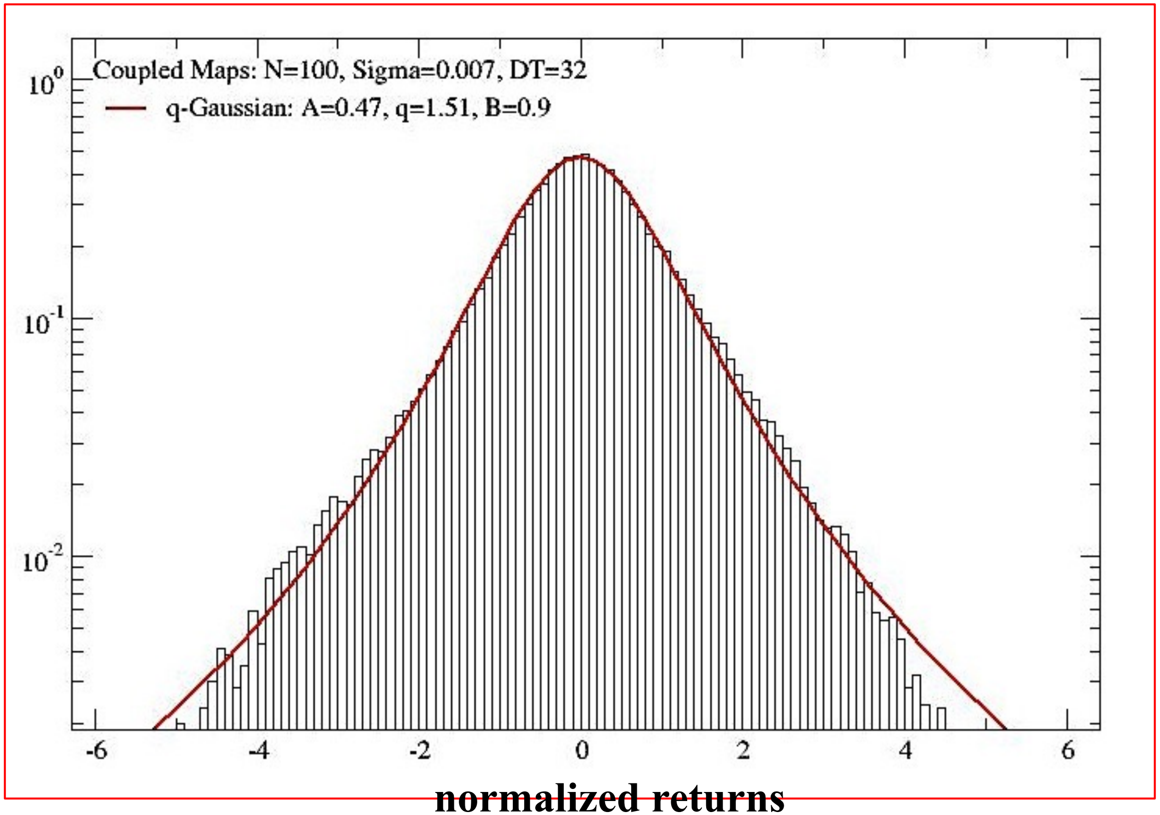
σ_{max}=0.007

q=1.51

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A\left[1-(1-q)\,\beta x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$$

q=1 → Gaussian



normalized returns

PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore.** Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando $\boldsymbol{\sigma_{max}} < 0.05$ e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

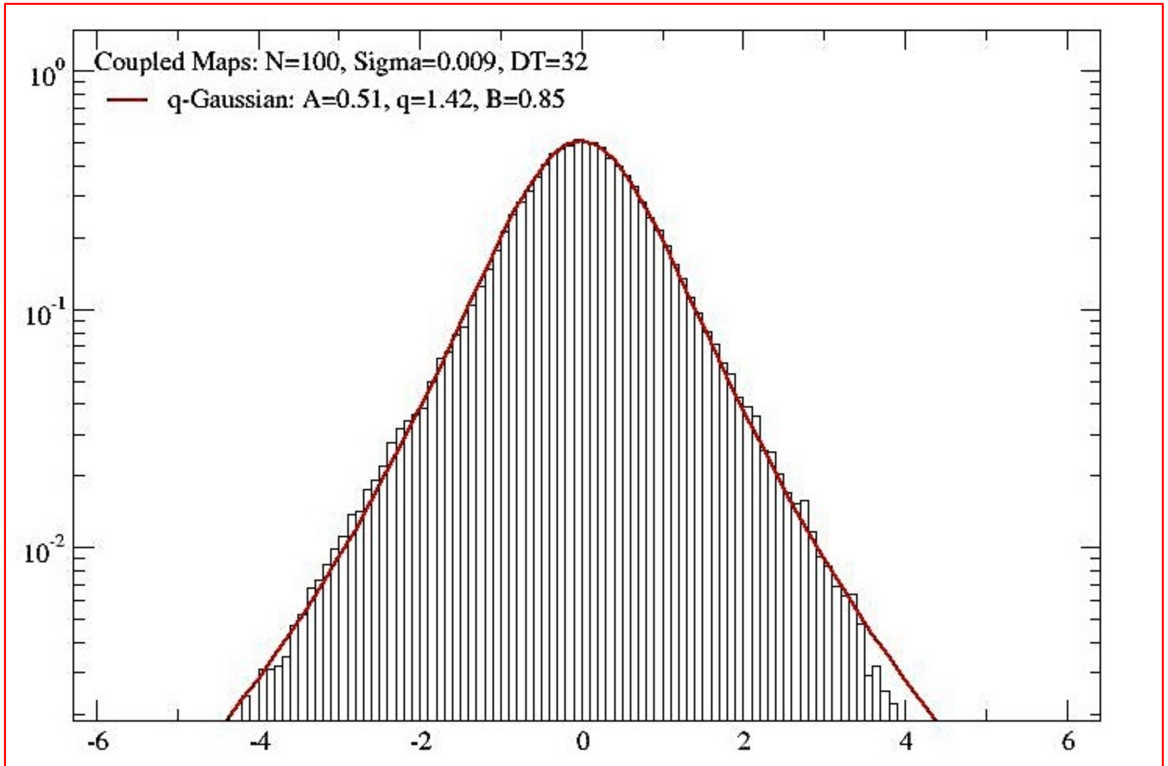
σ_{max}=0.009

q=1.42

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A\left[1-(1-q)\,\beta x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$$

q=1 → Gaussian



normalized returns

PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore.** Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando $\boldsymbol{\sigma_{max}} < 0.05$ e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

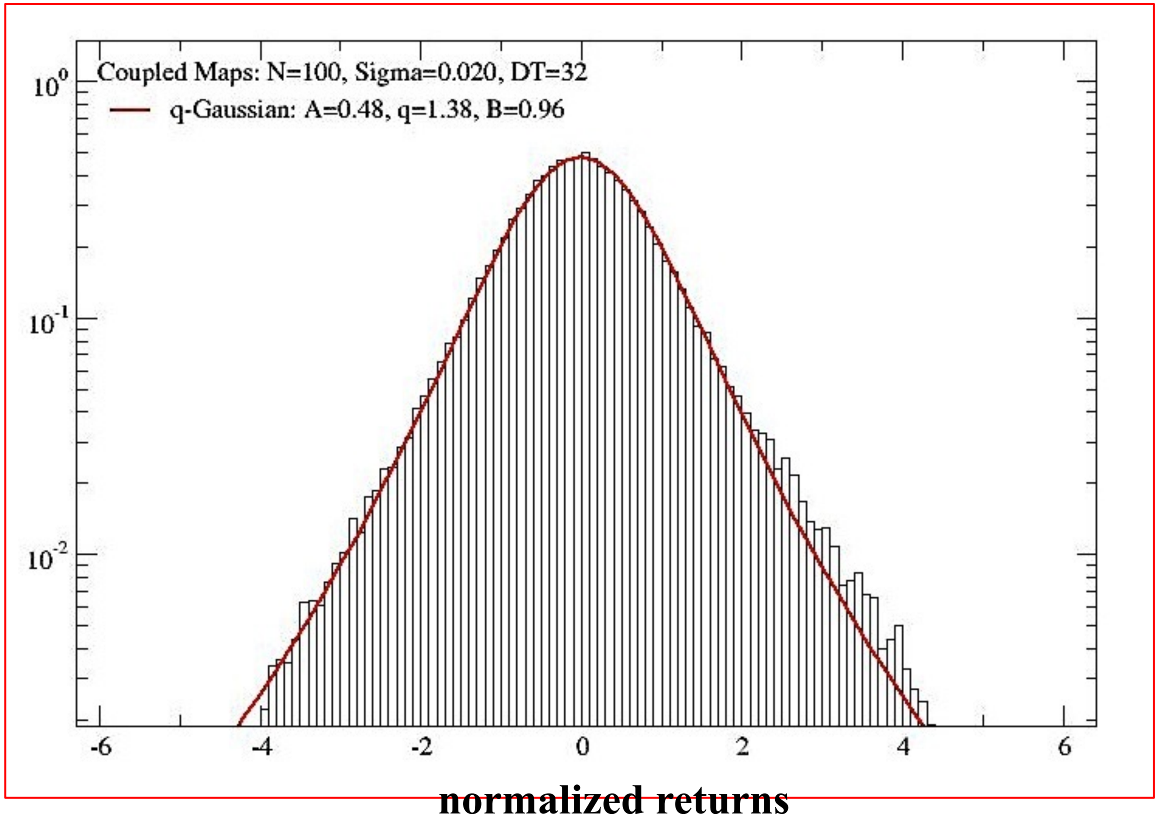
$\sigma_{max}=0.02$

$q=1.38$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A\left[1-(1-q)\,\beta x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$$

q=1 → Gaussian



normalized returns

PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore.** Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando $\boldsymbol{\sigma_{max}} < 0.05$ e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

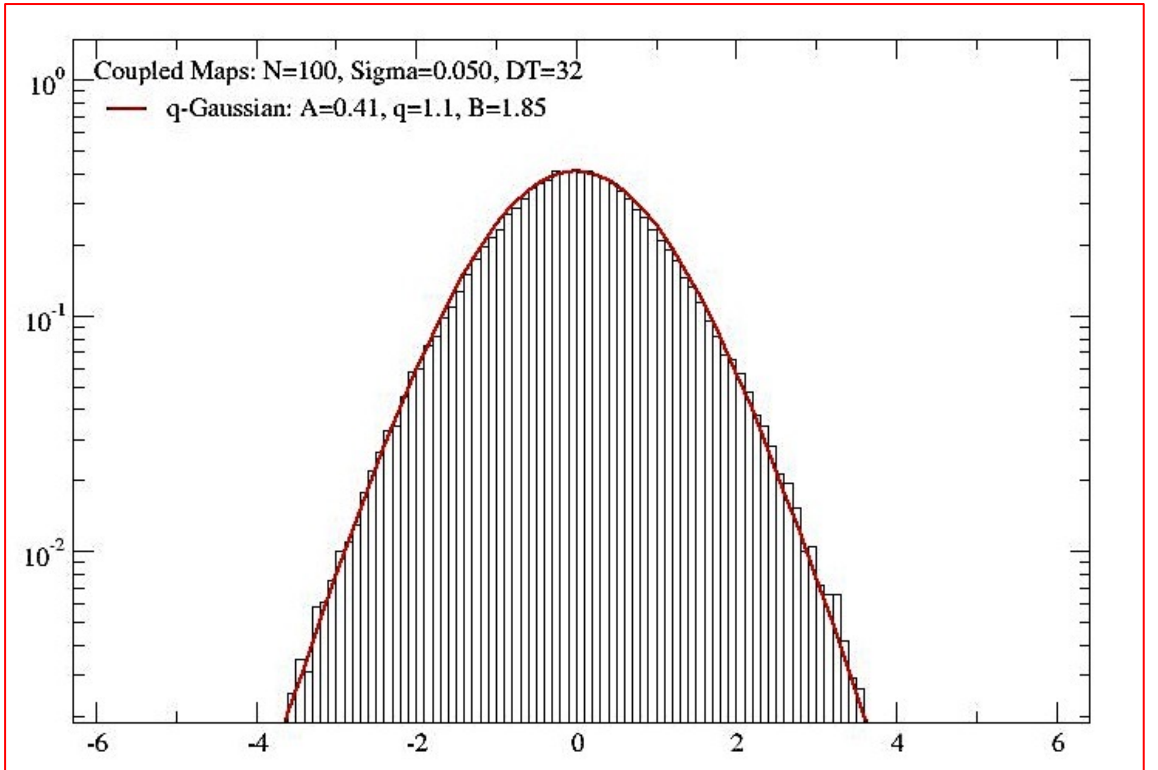
$\sigma_{max}=0.05$

$q=1.10$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A\left[1-(1-q)\,\beta x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$$

q=1 → Gaussian



normalized returns

PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore.** Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando σ_{max} < 0.05 e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

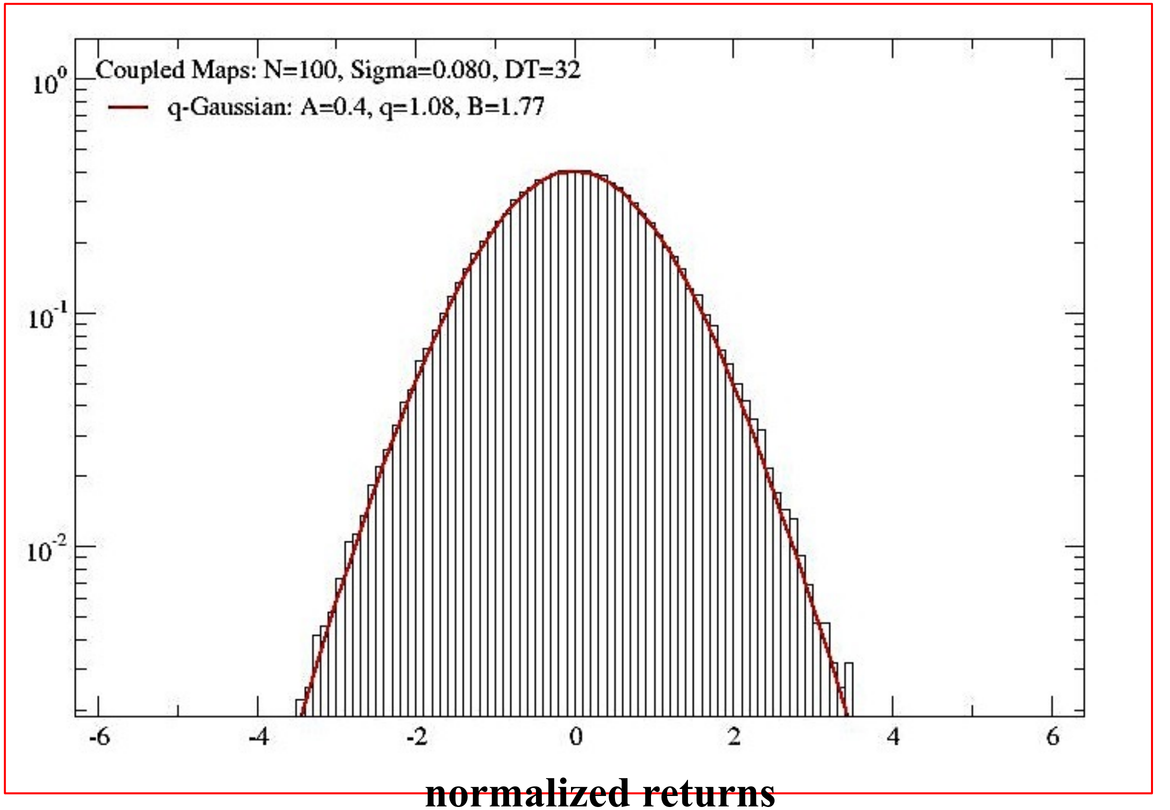
$\sigma_{max}=0.08$

$q=1.08$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A\left[1-(1-q)\,\beta x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$$

q=1 → Gaussian



normalized returns

PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore.** Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando $\boldsymbol{\sigma_{max}} < 0.05$ e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

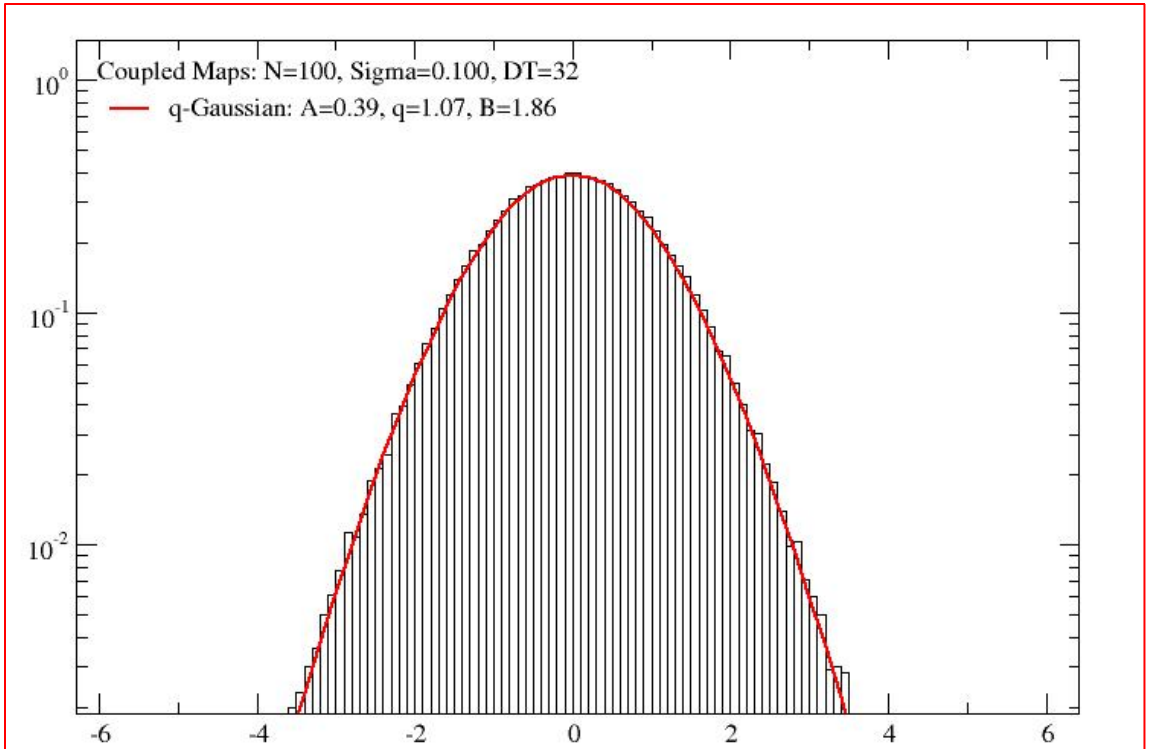
$\sigma_{max}=0.10$

$q=1.07$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A\left[1-(1-q)\,\beta x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$$

q=1 → Gaussian



normalized returns

PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore.** Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando **σ_{max}** < 0.05 e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

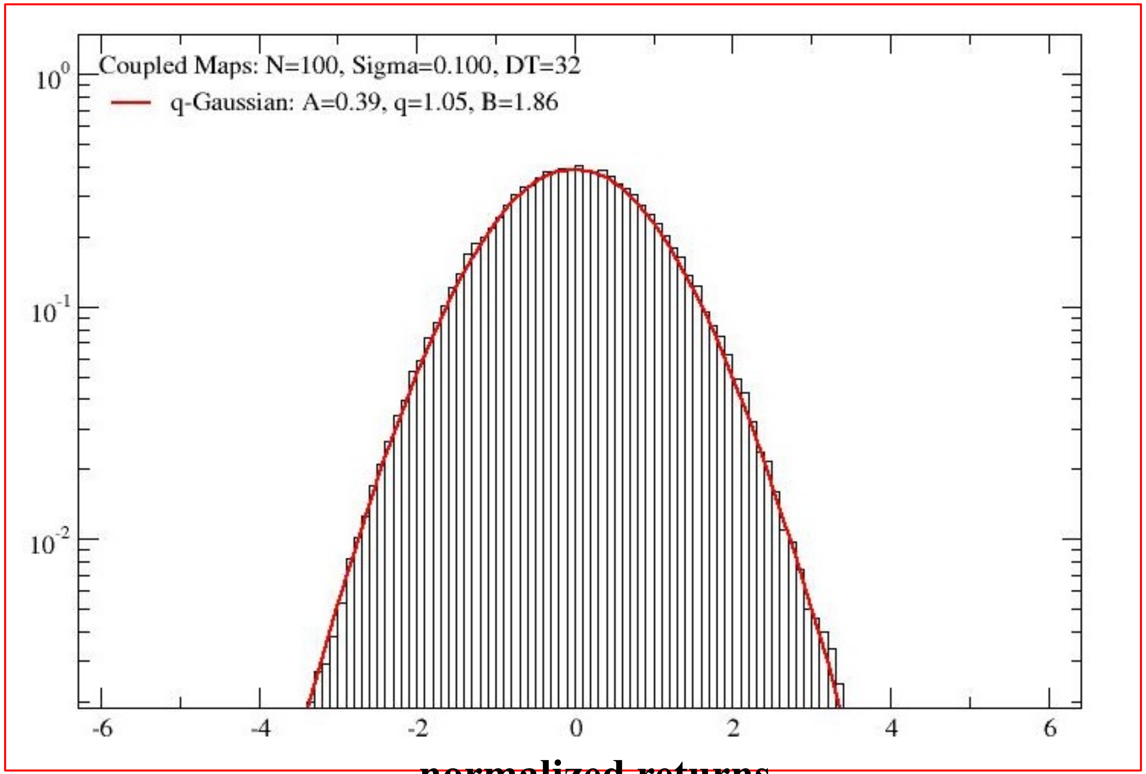
σ_{max}=0.14

q=1.05

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A\left[1-(1-q)\,\beta x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$$

q=1 → Gaussian



normalized returns

PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore.** Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando $\boldsymbol{\sigma_{max}} < 0.05$ e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

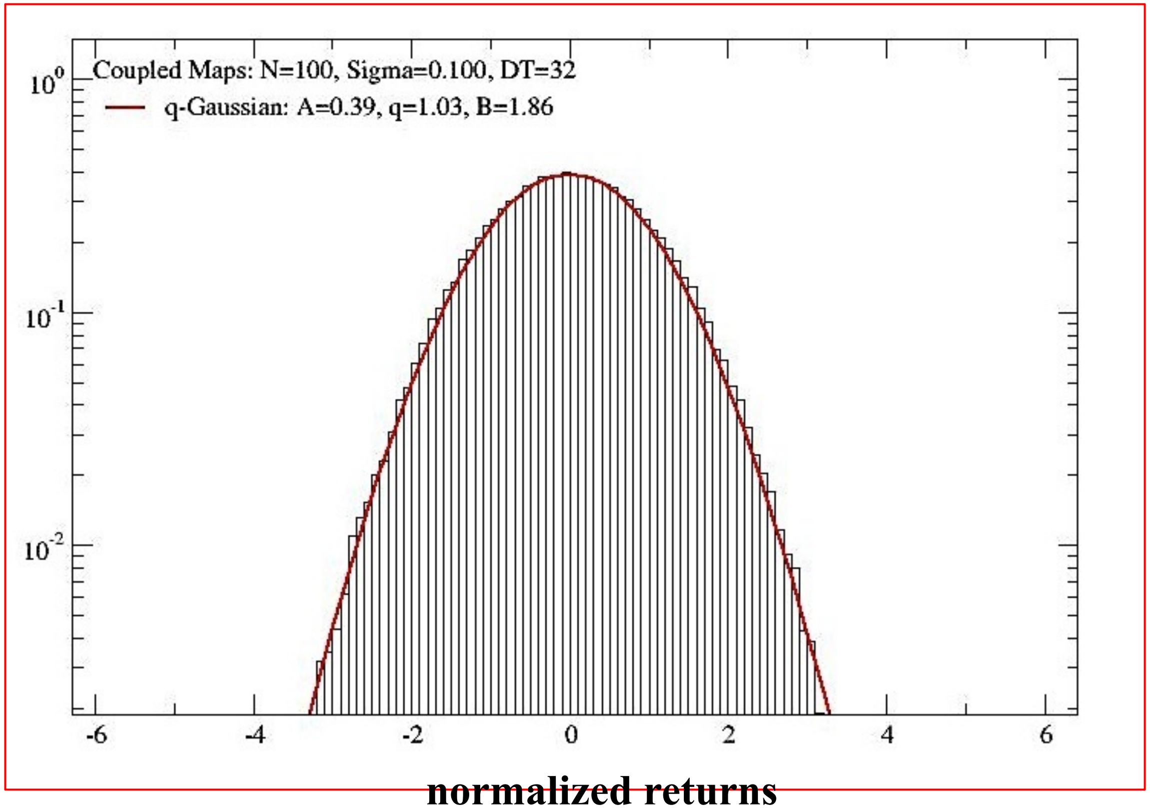
$\sigma_{max}=0.17$

$q=1.03$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A\left[1-(1-q)\,\beta x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$$

q=1 → Gaussian



normalized returns

PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore.** Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando $\sigma_{max} < 0.05$ e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

$\sigma_{max}=0.20$

$q=1.015$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A\left[1-(1-q)\,\beta x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$$

q=1 → Gaussian

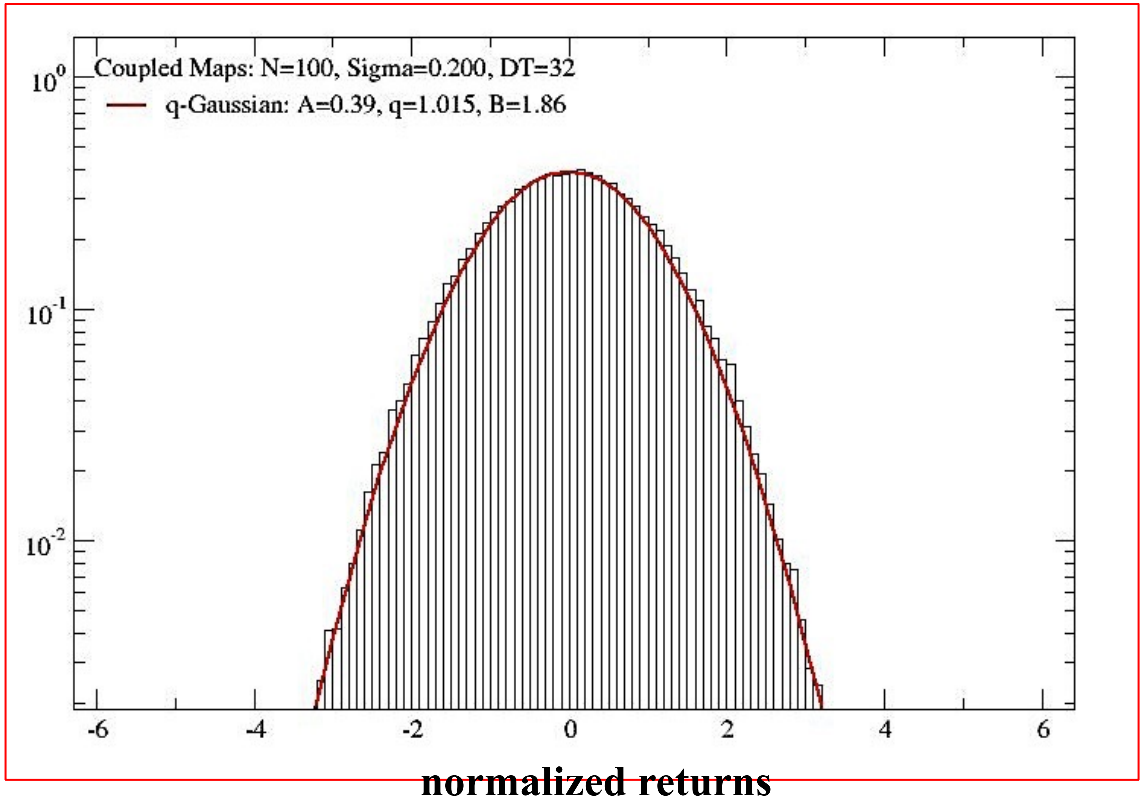
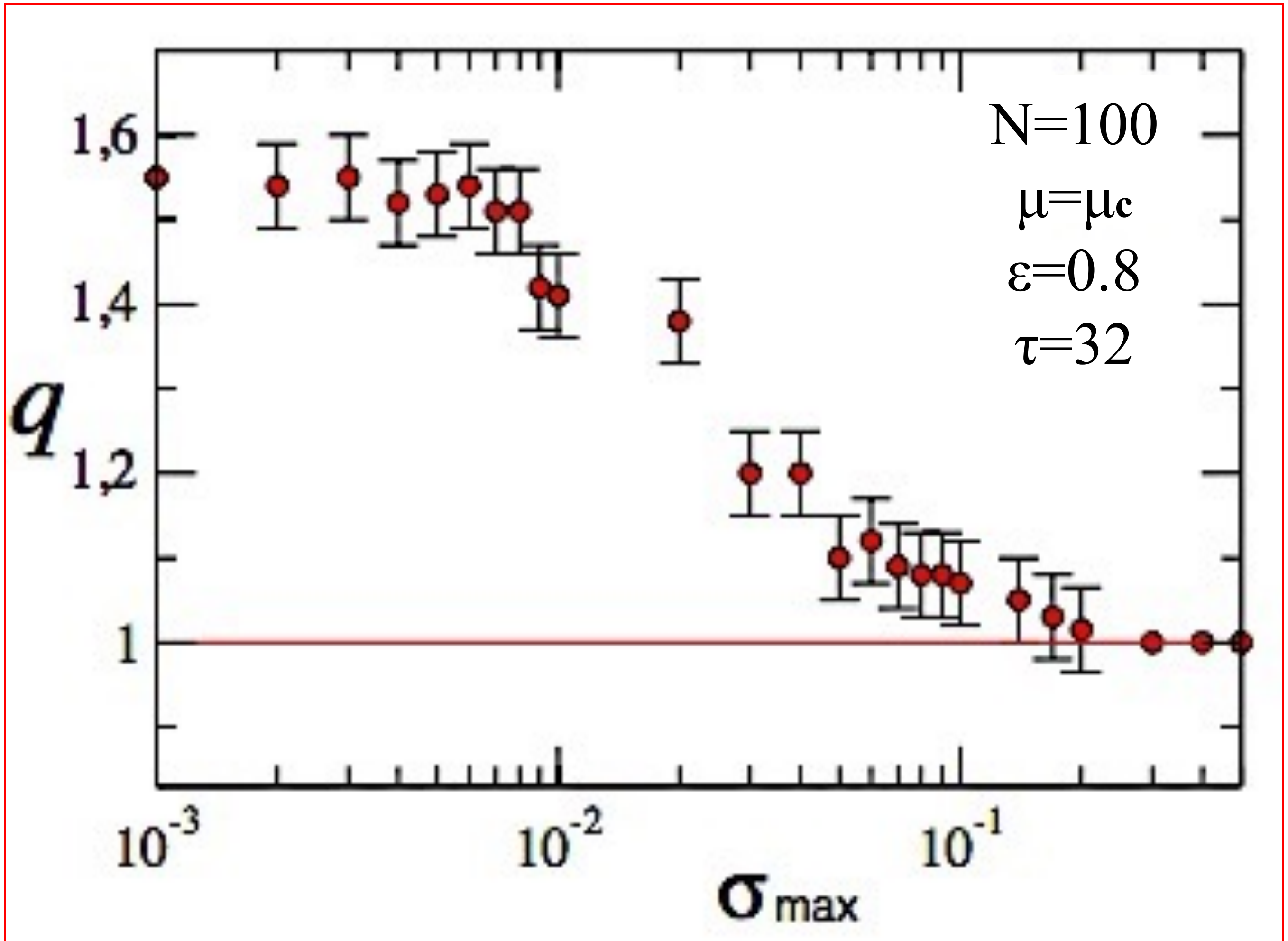


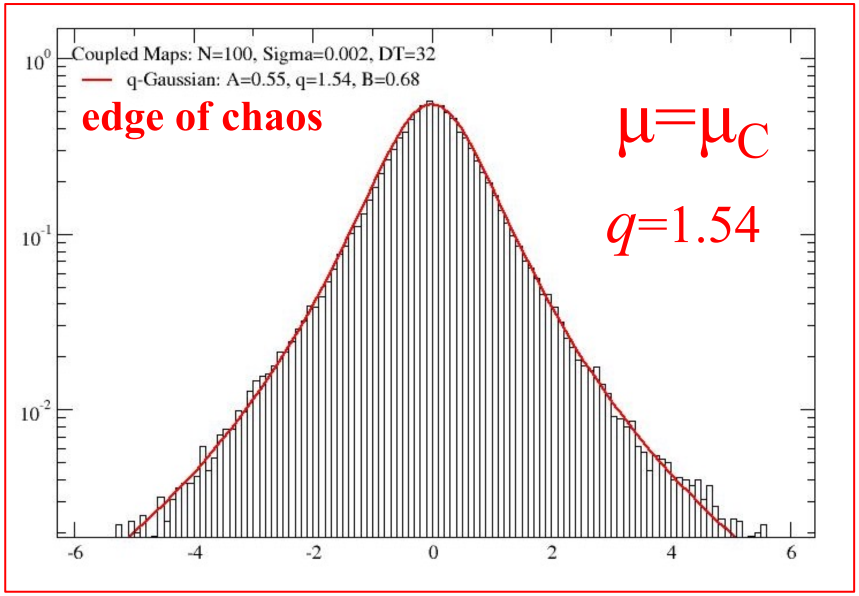
Diagramma q versus σ_{max}

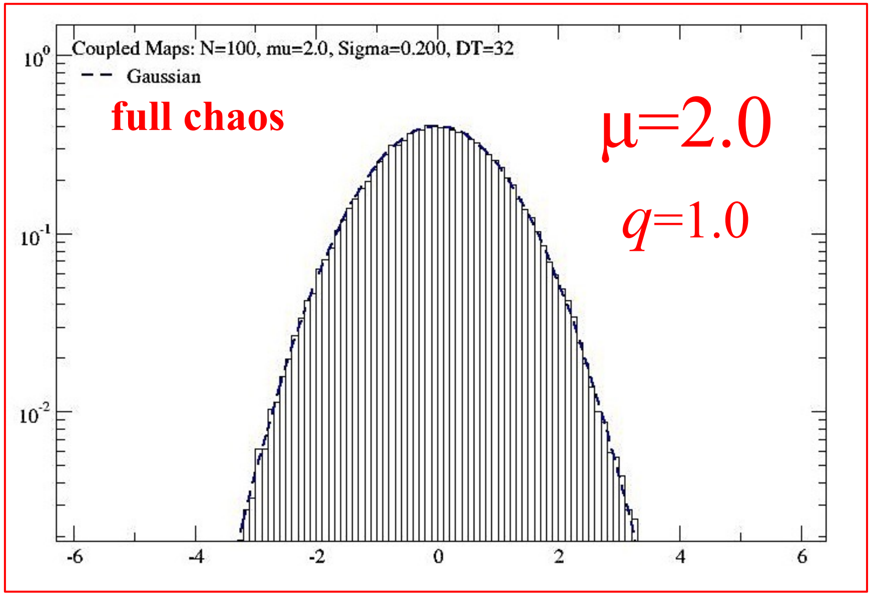


Pdf dei ritorni normalizzati nel regime di "strong chaos"

La condizione di edge of chaos è strettamente necessaria per far emergere l'intermittenza e le forti correlazioni in presenza di bassi livelli di rumore. Infatti, se consideriamo le mappe nel regime di **strong chaos**, cioè con $\mu = 2$ invece di $\mu = \mu_c$, e lasciando invariati tutti gli altri parametri, otteniamo una **Pdf Gaussiana** dei ritorni.

$N=100$, $\sigma_{max}=0.002$, $\varepsilon=0.8$, $\tau=32$

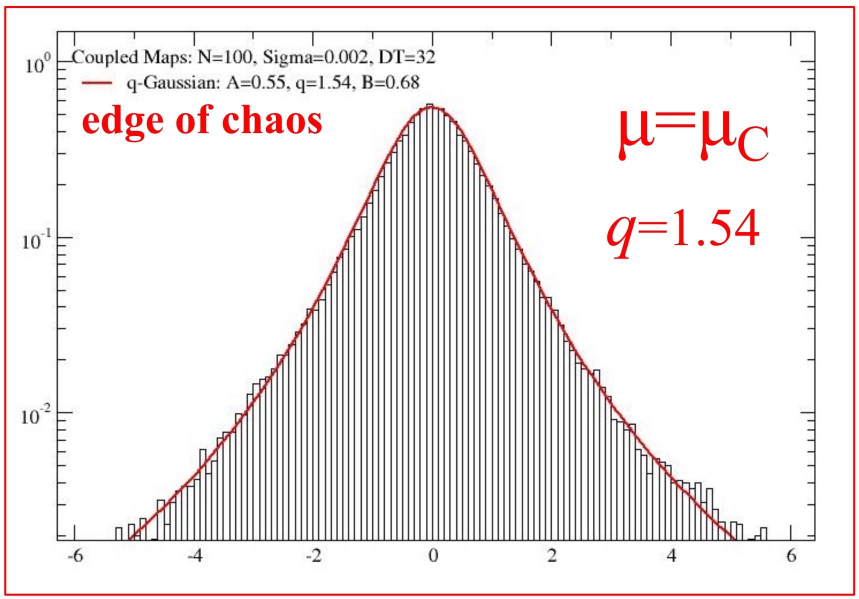


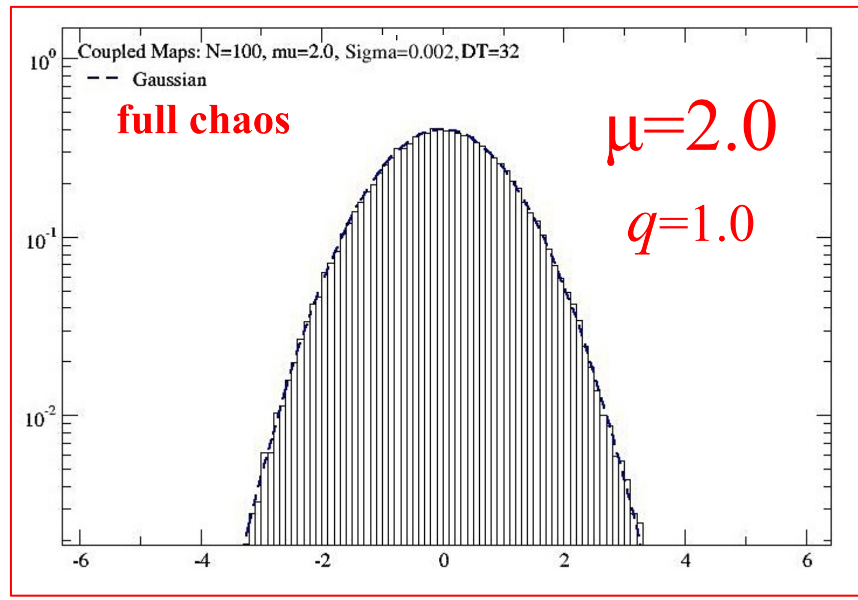


Pdf dei ritorni normalizzati nel regime di "strong chaos"

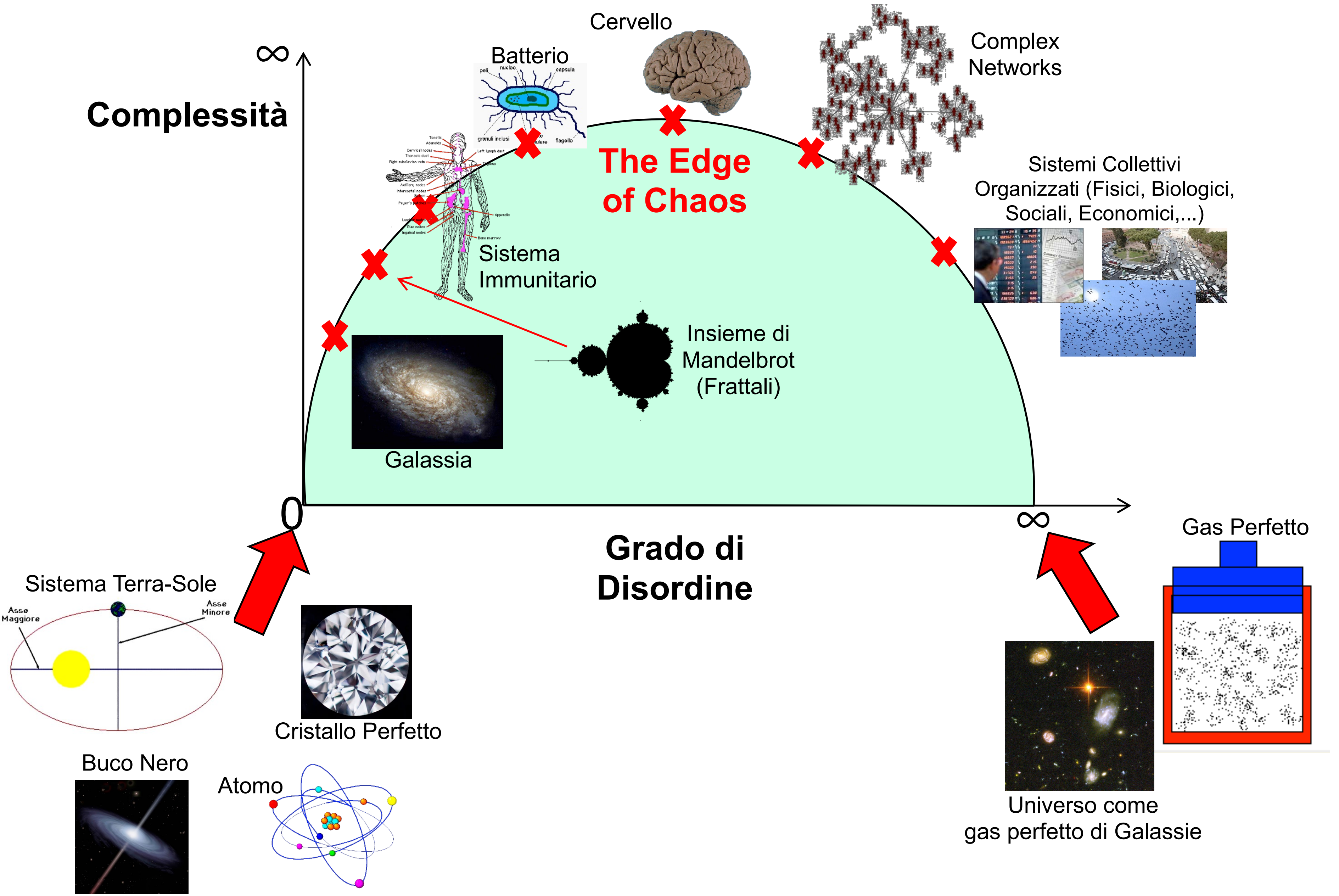
La condizione di edge of chaos è strettamente necessaria per far emergere l'intermittenza e le forti correlazioni in presenza di bassi livelli di rumore. Infatti, se consideriamo le mappe nel regime di **strong chaos**, cioè con $\mu = 2$ invece di $\mu = \mu_c$, e lasciando invariati tutti gli altri parametri, otteniamo una **Pdf Gaussiana** dei ritorni.

N=100, σ_{max}=0.002, ε=0.8, τ=32





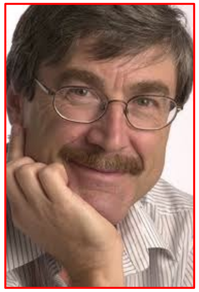
Complessità “at the edge of chaos”



NE RIPARLEREMO NEL SEMINARIO CONCLUSIVO…

L'enigma "Riccioli d'Oro"

Perché viviamo in un universo favorevole alla vita?



Paul Davies

"Io prendo sul serio la vita, la mente e la finalità, e ammetto che l'universo quanto meno sembra progettato con un elevato livello di ingegnosità. Non posso accettare questi aspetti come uno scrigno di meraviglie che ci sono soltanto per caso, che esistono senza una ragione"