

Classificazione dei Sistemi Dinamici

Sistemi dinamici continui (Flussi)

$$\dot{X} = f(X)$$

Flussi Dissipativi

Flussi Hamiltoniani

Attrattori

Orbite

1D

Punto
fisso

2D
Ciclo
Limite

3D

Caotici

Periodiche

Quasi
Periodiche

Caotiche

Sistemi dinamici discreti (Mappe)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Mappe Dissipative

Mappe Conservative
(area-preserving)

Attrattori

Orbite

1D,2D

Punto
fisso

Ciclo
Limite

Caotici

Periodiche

Quasi
Periodiche

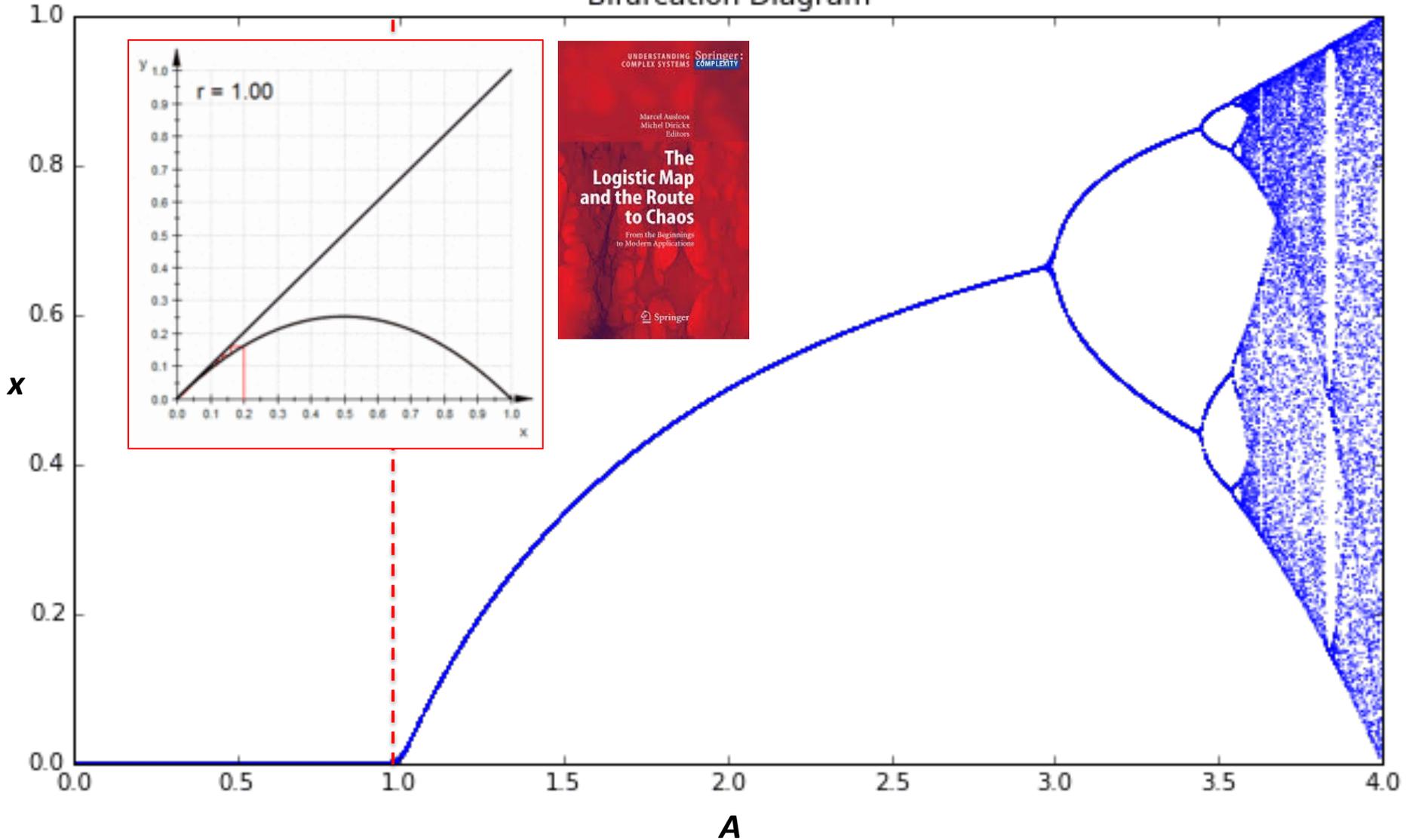
Caotiche

**Mappe dissipative
unidimensionali:
la Mappa Logistica**

Tipologie di attrattori nella Mappa Logistica

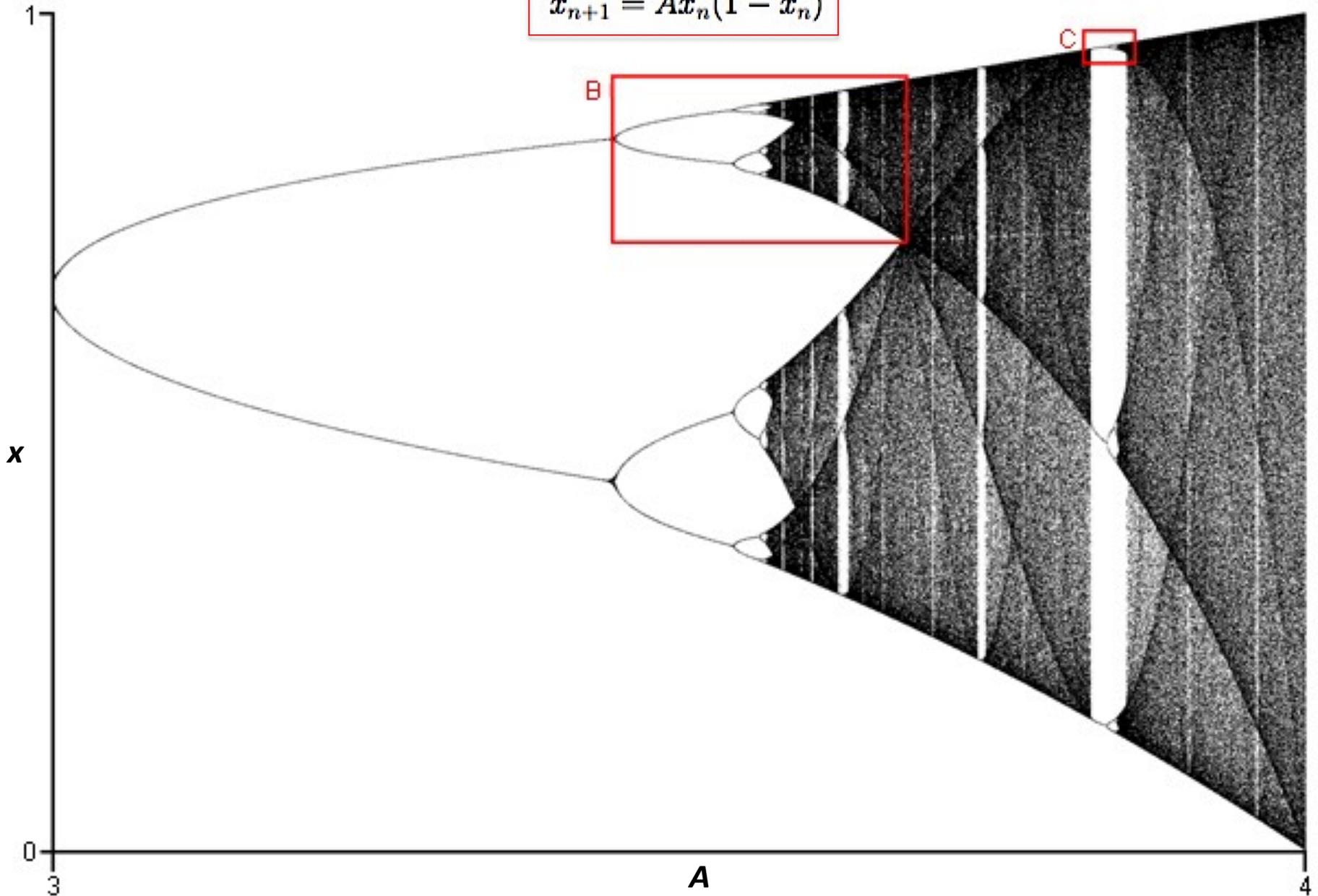
$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$

Bifurcation Diagram



Autosimilarità e caos nella Mappa Logistica

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$

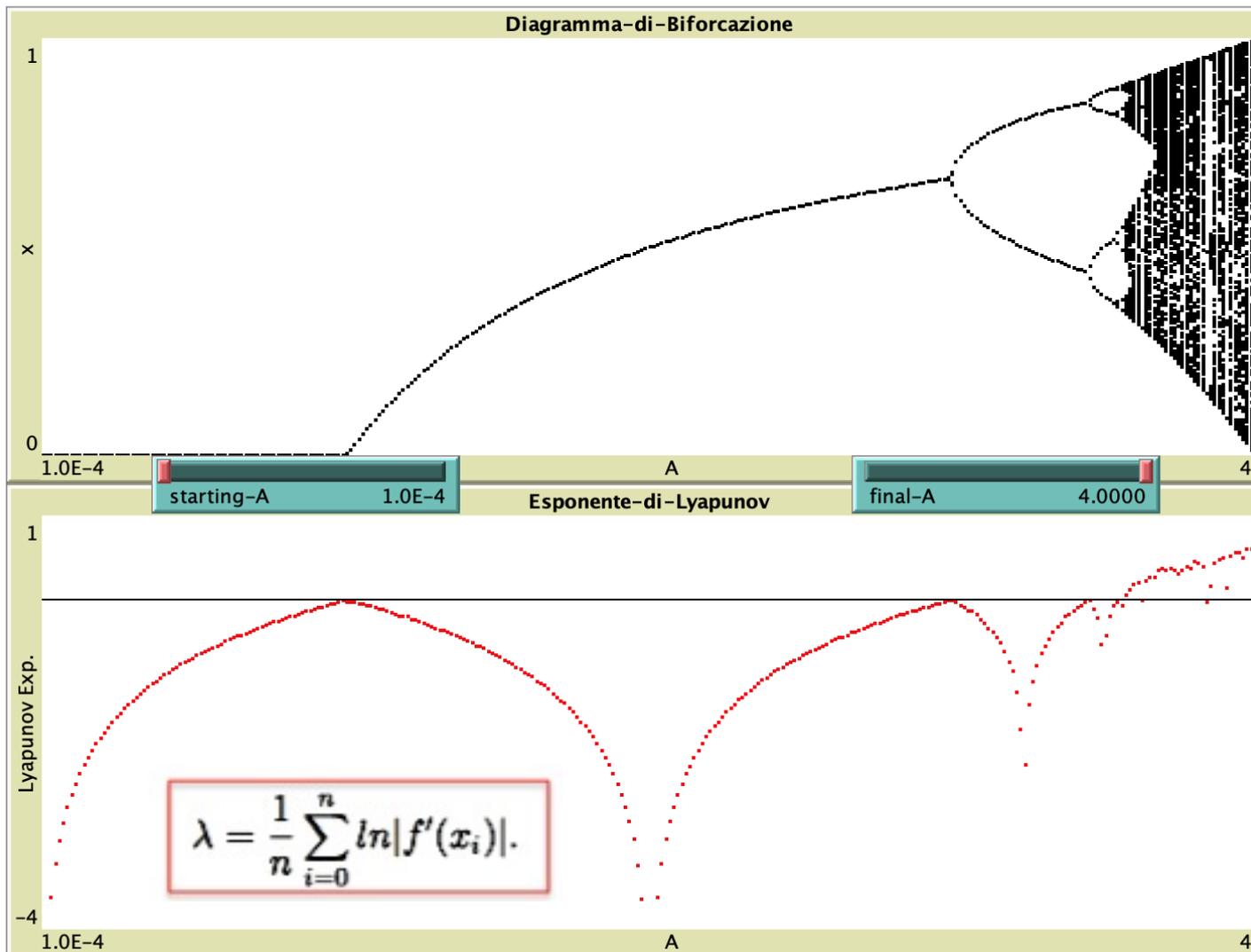


Quantificare il caos dinamicamente: l'Esponente di Lyapunov

PLOT BIFURCATION + LYAPUNOV

MAPPA LOGISTICA:
 $x(n+1) = A x(n) [1 - x(n)]$

$1 < A < 3$ punto-fisso
 $3 < A < 3.56994$ period-doubling
 $3.56994 < A < 4$ caos



Calcolo dell'esponente di Lyapunov nella Mappa Logistica

Passiamo adesso senza ulteriore indugio a quello che probabilmente é il piú importante indice quantitativo del comportamento caotico della mappa logistica, e cioè l'esponente di Lyapunov. Abbiamo già detto in apertura (eq.1.2) - e lo abbiamo ribadito mostrando il plot di Fig.1.9 - che, all'interno del regime caotico, due traiettorie della mappa logistica corrispondenti a due condizioni iniziali che differiscano inizialmente di una quantità anche molto piccola, divergeranno esponenzialmente al crescere del numero delle iterazioni con un rate costante λ chiamato esponente di Lyapunov, il quale, come mostreremo tra un attimo, dipende dal valore del parametro di controllo A . Vediamo adesso di formalizzare meglio questi concetti per ricavare una espressione quantitativa dell'esponente di Lyapunov.

REGIME CAOTICO E SENSIBILITA' ALLE CONDIZIONI INIZIALI

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{\lambda t},$$

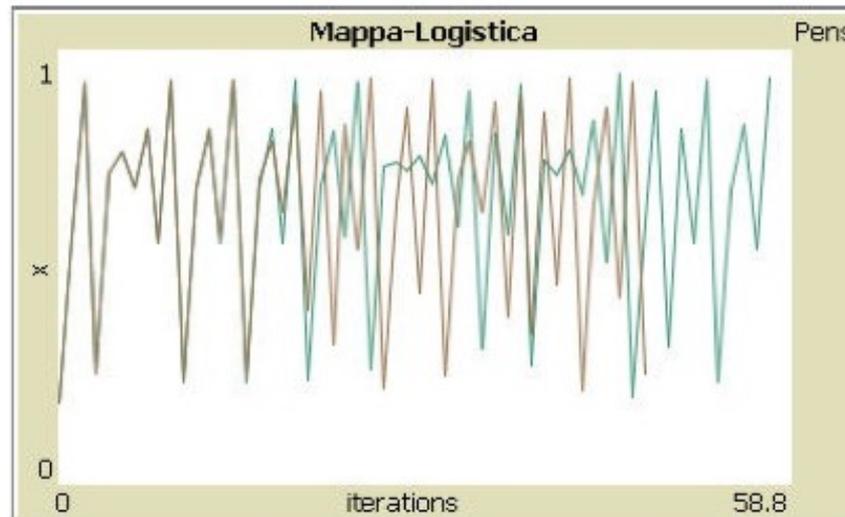


Figura 1.9: Un esempio della sensibilità alle condizioni iniziali delle traiettorie della mappa logistica nel regime caotico: le due traiettorie mostrate in figura sono state ottenute per $A = 3.78$ e per due diversi valori di x_0 , precisamente 0.18450 e 0.18451. Si vede chiaramente che le traiettorie iniziano a divergere dopo circa 17 iterazioni.

Poiché nel caso di un attrattore caotico di un sistema limitato, come quello della mappa logistica, ogni singola traiettoria é costretta ad avvicinarsi ripetutamente ad ogni suo punto precedente, ecco che per calcolare l'esponente di Lyapunov non é necessario prendere in considerazione la divergenza tra due traiettorie distinte ma é bensí sufficiente esaminare la divergenza tra due punti inizialmente molto vicini di una medesima traiettoria al crescere del numero di iterazioni. Se dunque per $n = 0$ consideriamo un punto x_0 dell'attrattore caotico e un punto ad esso vicino $x_0 + \epsilon$, ecco che alla n - *esima* iterazione la distanza tra questi due punti sará diventata

$$\epsilon(n) = |f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)|, \quad (1.7)$$

dove abbiamo indicato con $f^{(n)}(x)$ la n - *esima* iterata della funzione $f(x) = Ax(1 - x)$. Essendo in regime caotico ci aspettiamo che al crescere di n questa distanza cresca esponenzialmente seguendo la versione discreta dell'equazione 1.2, cioé:

$$\epsilon(n) = \epsilon e^{\lambda n}, \quad (1.8)$$

il che significa che l'esponente di Lyapunov λ può essere espresso come:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{|f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\epsilon}. \quad (1.9)$$

É evidente che, per ϵ che tende a zero, l'argomento del logaritmo a secondo membro non é altro che il valore assoluto della derivata rispetto ad x di $f^{(n)}(x)$, ed é possibile dimostrare che quest'ultima può essere riscritta in termini delle derivate prime $f'(x_i)$ calcolate nei punti successivi $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ della traiettoria fino ad x_n [2]. Ne segue che la formula definitiva che permette di calcolare l'esponente di Lyapunov per la mappa logistica (e in realtà per le mappe unidimensionali in generale) sará la seguente:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|. \quad (1.10)$$

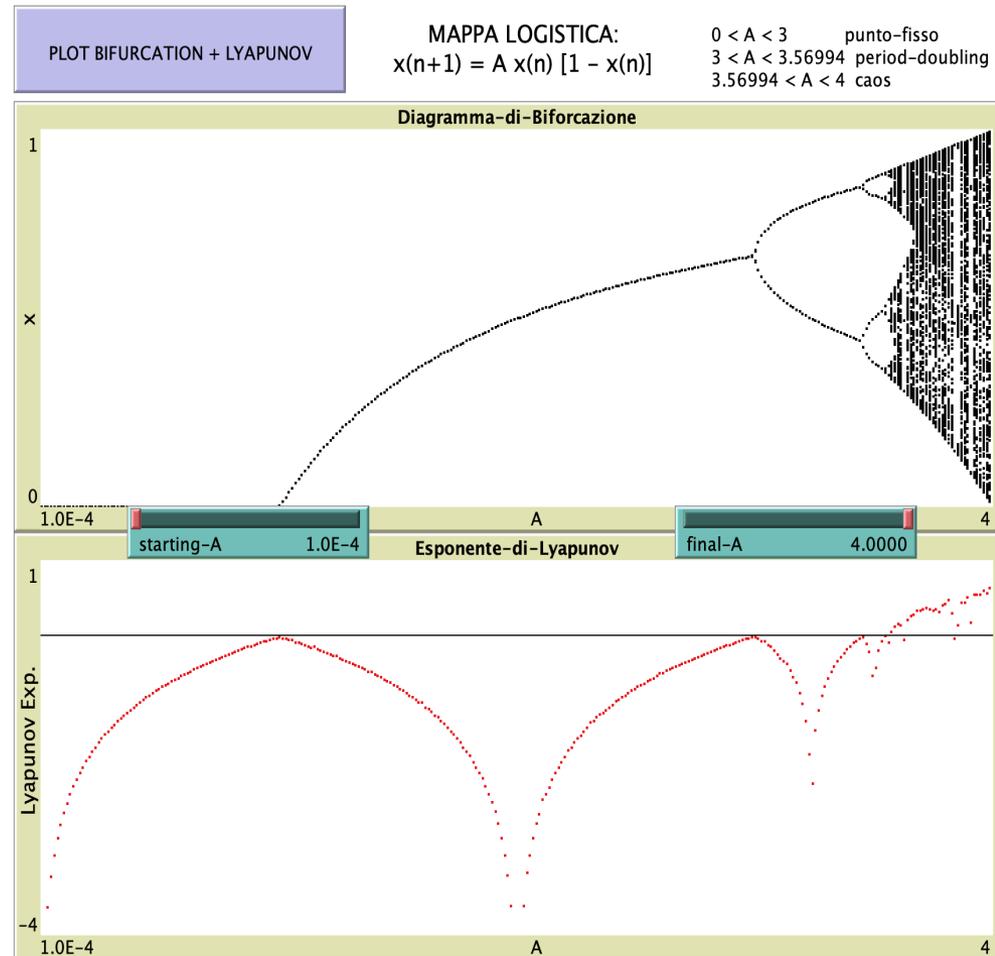
Regola di concatenazione delle derivate:

$$\begin{aligned} \frac{df^{(2)}(x)}{dx} &= \frac{df(f(x))}{dx} \\ &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{f(x)} \left. \frac{df}{dx} \right|_x \end{aligned}$$

mappa-Logistica-Bifurcation+Lyapunov.nlogo

```
set-current-plot "Esponente-di-Lyapunov"
clear-plot
set-current-plot-pen "line"
plotxy 0 0 plotxy 100000 0
set-current-plot-pen "default"
set-plot-x-range starting-A final-A
set-plot-y-range -4 1
```

```
let llyapunov 0
set A1 starting-A
let passo ((final-A - starting-A) / 300)
repeat 300
[
  set-current-plot "Diagramma-di-Biforcazione"
  set-current-plot-pen "default"
  let ll-sum 0
  set cont 1
  set x random-float 1
  repeat 200
  [
    set x (A1 * x * (1 - x))
    set ll-sum (ll-sum + (ln(abs(A1 - 2 * A1 * x))))
    set llyapunov (ll-sum / cont)
    set cont (cont + 1)
  ]
  repeat 200
  [
    set x (A1 * x * (1 - x))
    plotxy A1 x
    set ll-sum (ll-sum + (ln(abs(A1 - 2 * A1 * x))))
    set llyapunov (ll-sum / cont)
    set cont (cont + 1)
  ]
  set-current-plot "Esponente-di-Lyapunov"
  plotxy A1 llyapunov
  set A1 (A1 + passo)
]
```



$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|.$$

$$f(x) = Ax(1-x) \rightarrow f'(x) = A - 2Ax$$

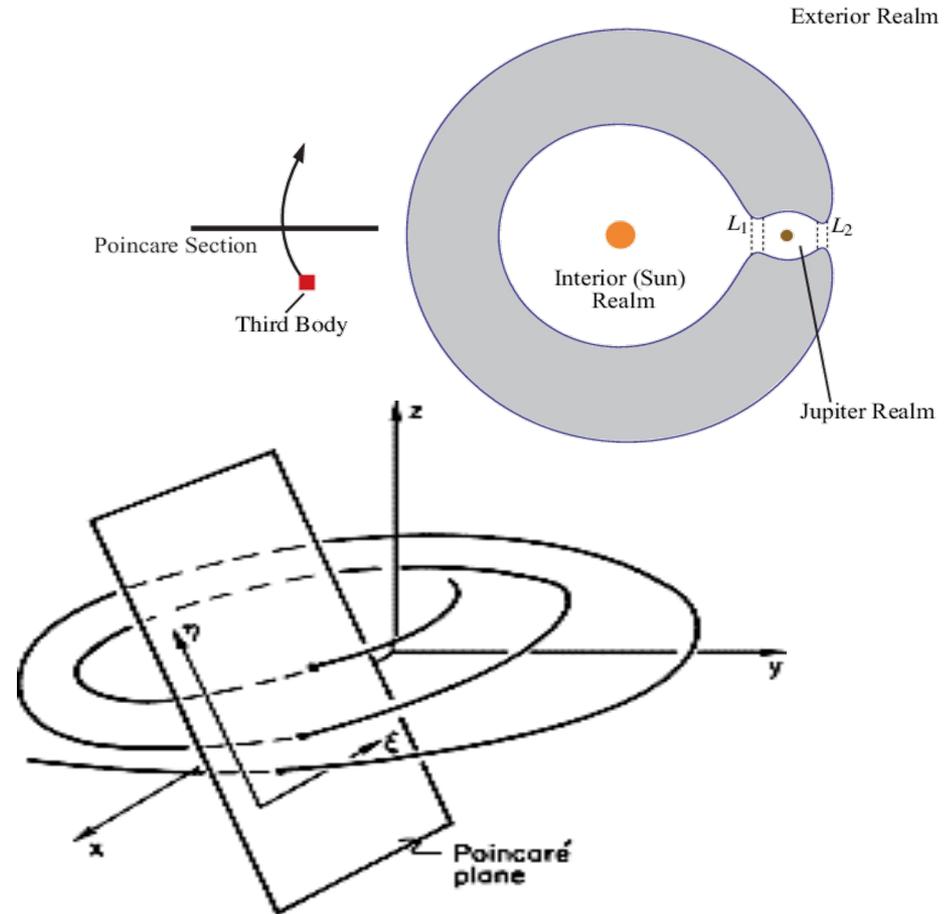
**Mappe dissipative
bidimensionali:
la Mappa di Hénon**

REMINDER: MAPPA DI POINCARÉ' 2D



Nel **1887**, cercando di risolvere il problema dei tre corpi e studiare la stabilità a lungo termine del sistema solare, il giovane Henri Poincaré introdusse il metodo oggi noto come «**sezione di Poincaré**» allo scopo di studiare la stabilità dell'orbita periodica di un **piccolo asteroide** lanciato nel campo gravitazionale del sistema formato, ad esempio, da Giove e dal Sole.

In pratica, invece di seguire la traiettoria dell'asteroide nello spazio tridimensionale, immaginò di “**tagliare**” **trasversalmente quella traiettoria con un piano bidimensionale** – pensate ad esempio ad un enorme foglio di carta di dimensioni analoghe a quelle dell'orbita dell'asteroide – e di esaminare il **comportamento nel tempo dei punti di intersezione della traiettoria con quel piano**, come fossero dei piccoli fori prodotti dall'asteroide ogni volta che attraversa il foglio di carta mentre percorre la sua orbita nel sistema Giove-Sole.

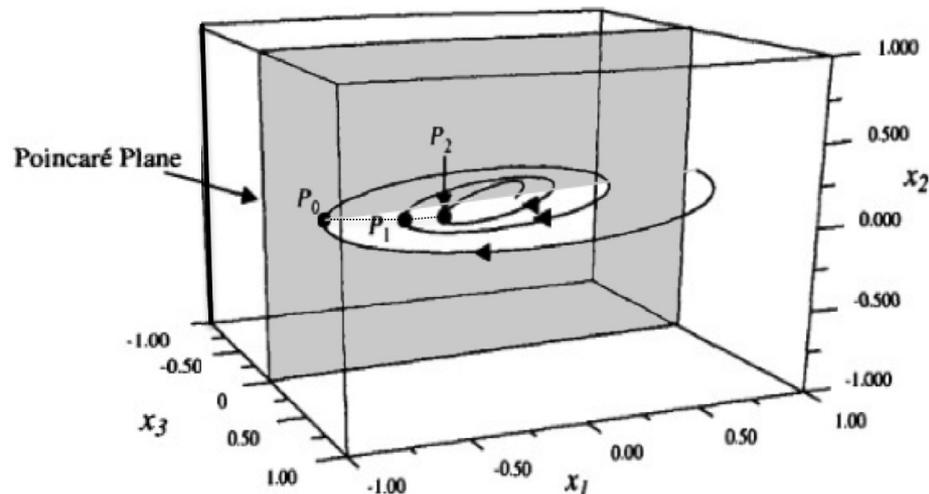


REMINDER: MAPPA DI POINCARÉ' 2D

We now return to the general discussion of limit cycles. The stability of the limit cycle is determined by a generalization of the Poincaré multipliers introduced in the previous chapter. We assume that the uniqueness of the solutions to the equations used to describe the dynamical system entails the existence of a Poincaré map function (or in the present case, a pair of Poincaré map functions), which relate the coordinates of one point at which the trajectory crosses the Poincaré plane to the coordinates of the next (in time) crossing point. (Again we assume we have chosen a definite crossing sense; e.g., from top to bottom, or from left to right.) These functions take the form

$$\begin{aligned} \text{Equazioni della} \quad x_1^{(n+1)} &= F_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \\ \text{mappa:} \quad x_2^{(n+1)} &= F_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \end{aligned} \quad (4.6-1)$$

where the parenthetical superscript indicates the crossing point number.



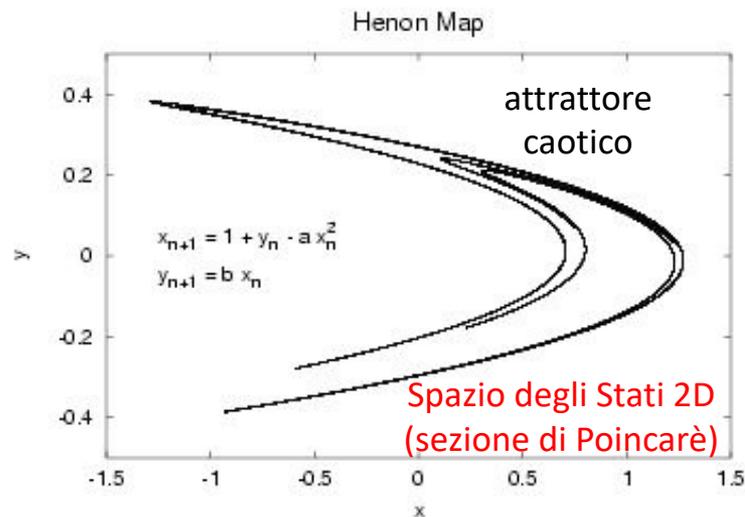
1.1 Introduzione

La mappa di Hénon [1], introdotta per la prima volta da Michel Hénon nel 1976 (lo stesso anno in cui May presentava su Nature il suo studio sulla mappa logistica), é un sistema dinamico discreto dissipativo in due variabili caratterizzato dalle seguenti equazioni accoppiate:

$$x_{n+1} = \cancel{y_n} + 1 - Cx_n^2, \quad y_{n+1} = \cancel{B}x_n \quad (1.1)$$

dove B e C sono due parametri di controllo, entrambi positivi. Si vede subito che per $B = 0$ la mappa di Henon si riduce ad una mappa quadratica unidimensionale, nella cui classe di universalit  rientra la mappa logistica. Per questo motivo la mappa di H non pu  essere considerata la generalizzazione bidimensionale (cio  a due gradi di libert ) della logistica. Vediamo subito come implementare lo studio di questa mappa in ambiente Netlogo, dopodich  utilizzeremo quanto appreso per introdurre un nuovo e fondamentale concetto, quello di 'dimensione frattale'.

Michel H non
(1931-2013)



H non era un astronomo e osserv  che, per determinati valori di energia, le intersezioni tra le orbite degli oggetti celesti ed un piano immaginario davano luogo ad una forma geometrica abbastanza regolare, mentre, per energie pi  elevate, tali orbite erano caotiche.

Mappa-Henon.nlogo

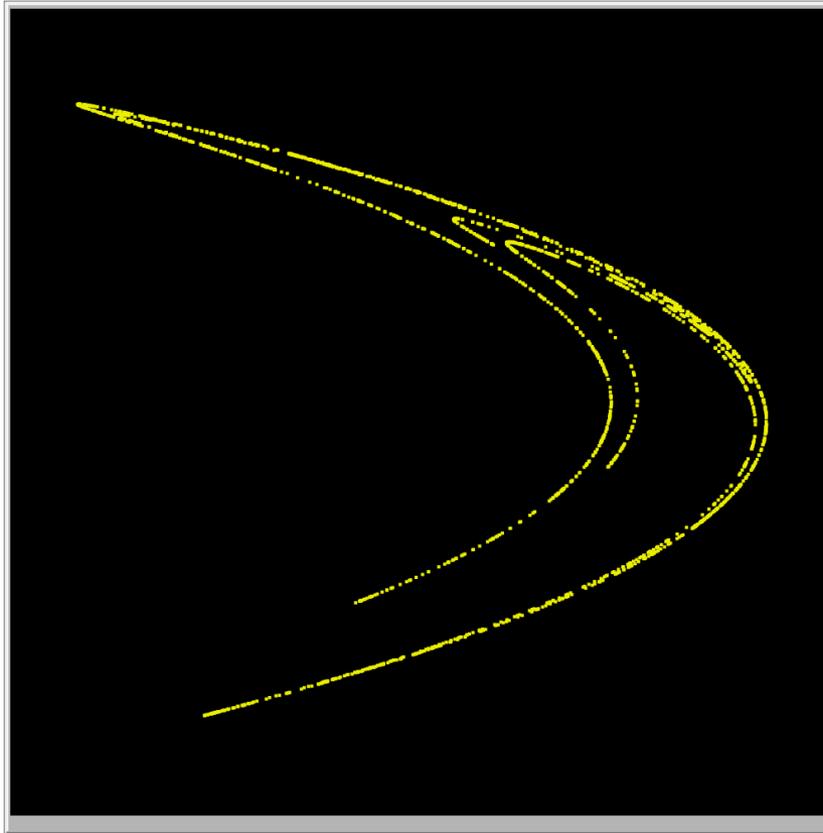
Interface Info Code

Edit Delete Add

normal speed view updates ticks: continuous Settings...

MAPPA DI HENON

$$x(n+1) = y(n) + 1 - C x(n)^2$$
$$y(n+1) = B x(n)$$



iteration 191

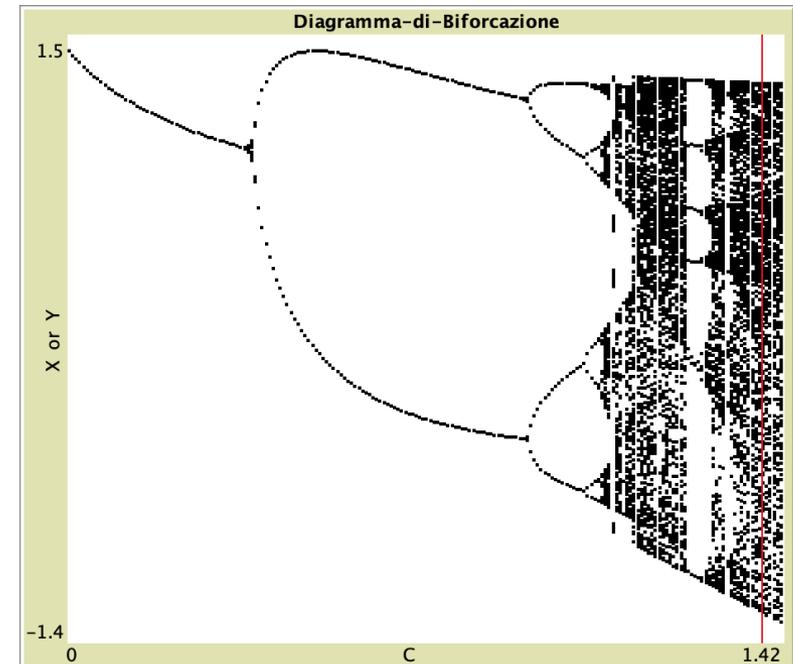
count points 2000

iteration N 2000

B 0.30

BIFURCATION variable x

C 1.377



x-range 1.50

x

y-range 0.50

starting-C 0.000

final-C 1.420

NetLogo



- [Home](#)
- [Download](#)
- [Help](#)
- [Resources](#)
- [Extensions](#)
- [FAQ](#)
- [References](#)
- [Contact Us](#)
- [Donate](#)

- Models:
- [Library](#)
 - [Community](#)
 - [Modeling Commons](#)

- User Manuals:
- [Web](#)
 - [Printable](#)
 - [Chinese](#)
 - [Czech](#)
 - [Japanese](#)
 - [Spanish](#)

[Donate](#)

NetLogo is a multi-agent programmable modeling environment. It is used by many tens of thousands of students, teachers and researchers worldwide. It also powers [HubNet](#) participatory simulations. It is authored by [Uri Wilensky](#) and developed at the [CCL](#). You can download it free of charge. You can also try it online through [NetLogo Web](#).

What can you do with NetLogo? Read more [here](#). Click [here](#) to watch videos.

Join mailing lists [here](#).

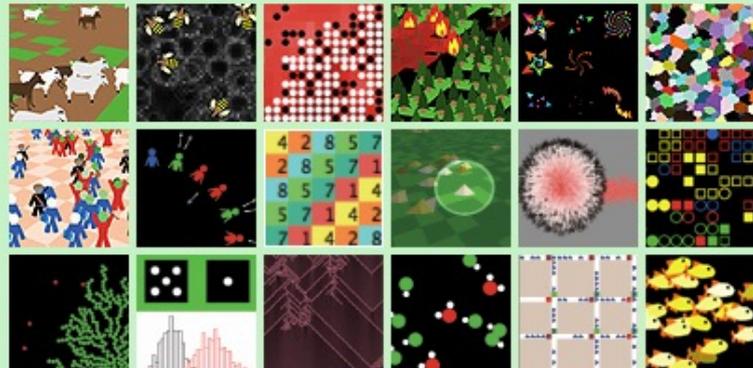
Download NetLogo



Go to NetLogo Web



NetLogo comes with a large library of sample models. Click on some examples below.



NetLogo



- [Home](#)
- [Download](#)
- [Help](#)
- [Resources](#)
- [Extensions](#)
- [FAQ](#)
- [NetLogo Publications](#)
- [Contact Us](#)
- [Donate](#)

- Models:
- [Library](#)
 - [Community](#)
 - [Modeling Commons](#)

[Beginners Interactive](#)
[NetLogo Dictionary](#)

- User Manuals:
- [Web](#)
 - [Printable](#)
 - [Chinese](#)
 - [Czech](#)
 - [Farsi / Persian](#)
 - [Japanese](#)
 - [Spanish](#)
 - [\(intro\)](#)
 - [\(tutorial #1\)](#) [\(#2\)](#) [\(#3\)](#)
 - [\(guide\)](#)
 - [\(dictionary\)](#)

Donate

Download NetLogo

Most computers can run NetLogo (see [system requirements](#)). If you would like to run NetLogo on a Chromebook or in a web browser, please see if [NetLogo Web](#) will meet your needs.

Multiple versions of NetLogo can be installed on the same computer; installing a new one doesn't remove the old one.

Version:

Scegliete la versione

More versions [here](#).

For help using old models with new versions see the [Transition Guide](#).

Name:

Organization:

E-mail:

Comments:

We read these but don't respond directly. For a response, write feedback@ccl.northwestern.edu.

Download

Download trouble? Write bugs@ccl.northwestern.edu

DOWNLOADING NETLOGO: <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>



NetLogo 6.4.0 Downloads

November 16, 2023

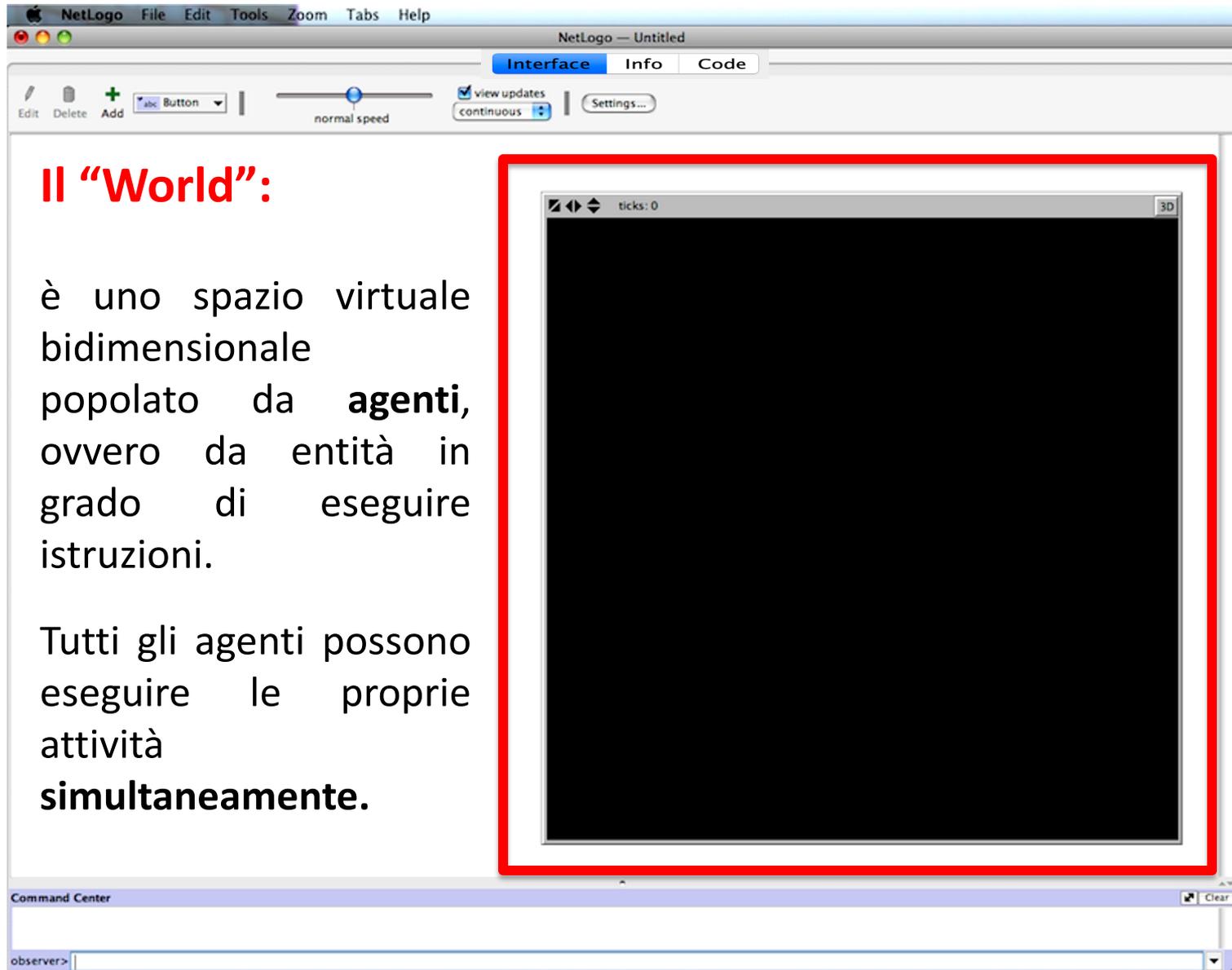
	Mac OS X	Download (346 MB)
	Windows (32-bit)	Download (298 MB)
	Windows (64-bit)	Download (311 MB)
	Linux (32-bit)	Download (332 MB)
	Linux (64-bit)	Download (353 MB)

**Scegliete il
Sistema Operativo**

[sign up for NetLogo community mailing lists](#)
(where many questions can be posted and answered)

NetLogo is free, open source software.
Your donations (tax deductible) will help us continue to maintain and improve it.

NetLogo 6.4.0: prima apertura



The screenshot shows the NetLogo 6.4.0 application window. The title bar reads "NetLogo — Untitled". The menu bar includes "File", "Edit", "Tools", "Zoom", "Tabs", and "Help". The interface has three tabs: "Interface" (selected), "Info", and "Code". The "Interface" tab contains a toolbar with "Edit", "Delete", "Add", a "Button" dropdown, a "normal speed" slider, a "view updates" checkbox, a "continuous" dropdown, and a "Settings..." button. The main area is a large black rectangle representing the "World", which is highlighted with a red border. The "World" area has a "ticks: 0" label and a "3D" button in the top right corner. At the bottom, there is a "Command Center" with a "Clear" button and a text input field containing "observer>".

Il "World":

è uno spazio virtuale bidimensionale popolato da **agenti**, ovvero da entità in grado di eseguire istruzioni.

Tutti gli agenti possono eseguire le proprie attività **simultaneamente**.

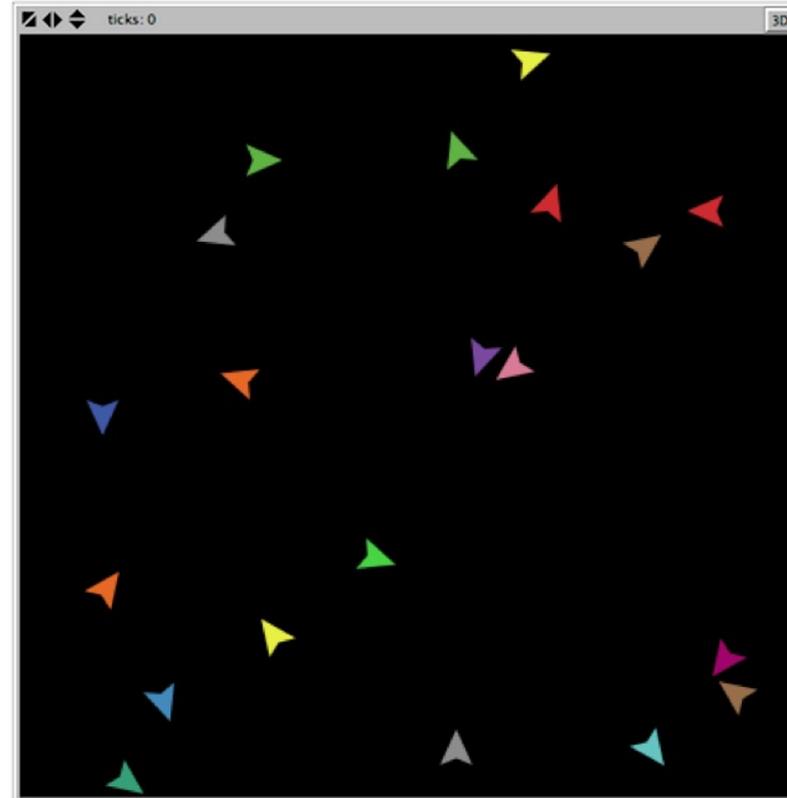
Le principali Categorie di Agenti in NetLogo

Turtles

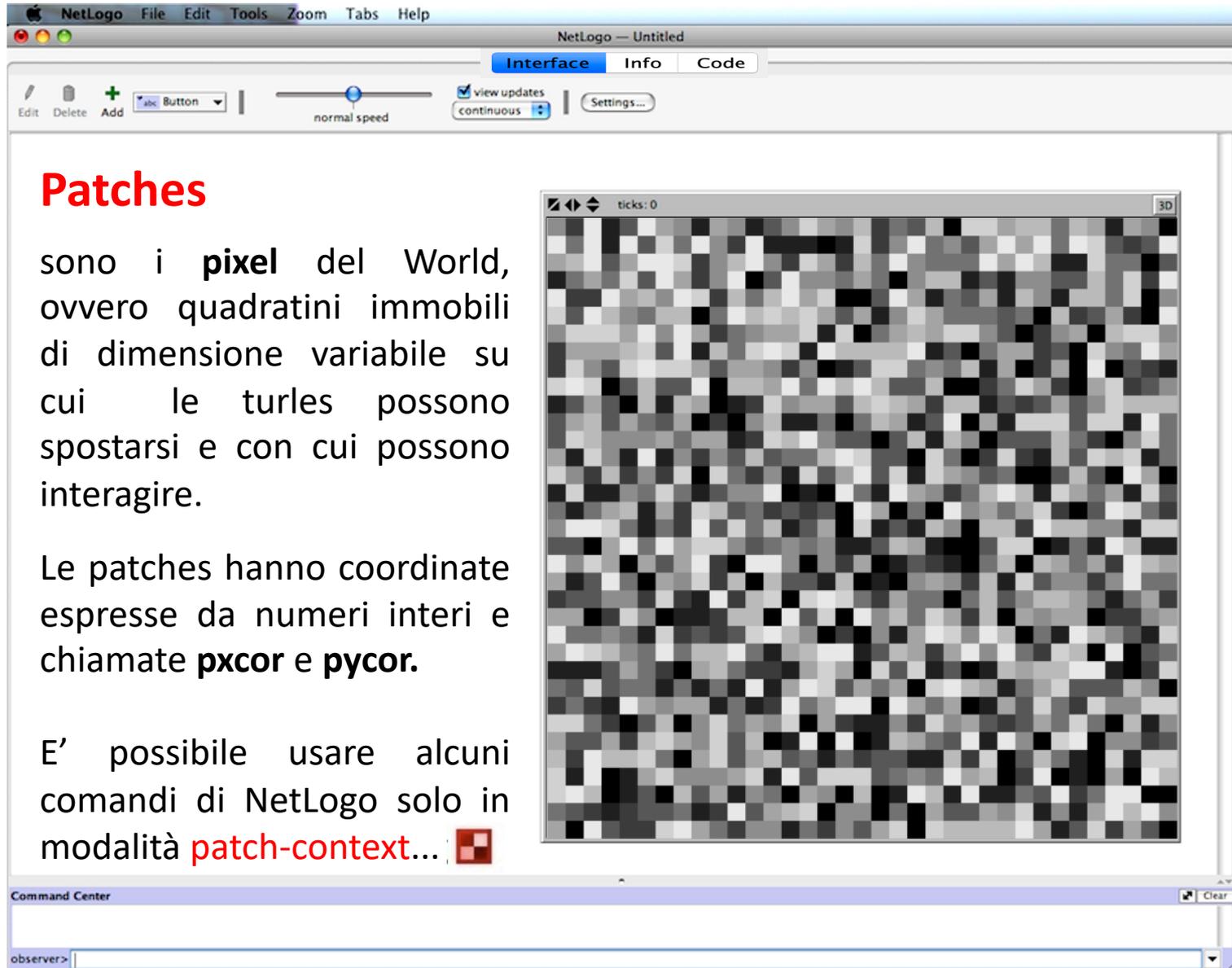
sono agenti in grado di muoversi all'interno del World.

Ogni turtle ha due coordinate **xcor** e **ycor** (numeri reali) e può cambiare **forma** e **colore**.

E' possibile usare alcuni comandi di NetLogo solo in modalità **turtle-context**... 🐢



Le principali Categorie di Agenti in NetLogo



Patches

sono i **pixel** del World, ovvero quadratini immobili di dimensione variabile su cui le turles possono spostarsi e con cui possono interagire.

Le patches hanno coordinate espresse da numeri interi e chiamate **pxcor** e **pycor**.

E' possibile usare alcuni comandi di NetLogo solo in modalità **patch-context...** 

Esempi di variabili proprietarie

turtles-own

who
xcor, ycor
heading
color
shape
size
label
turtles-own [var1 var2 ...]

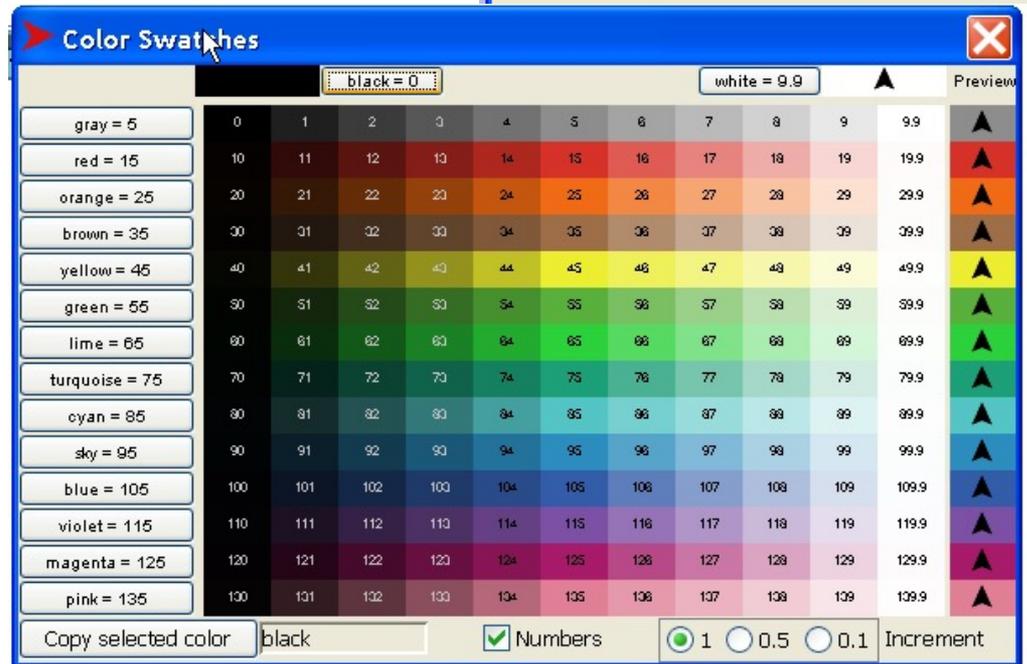
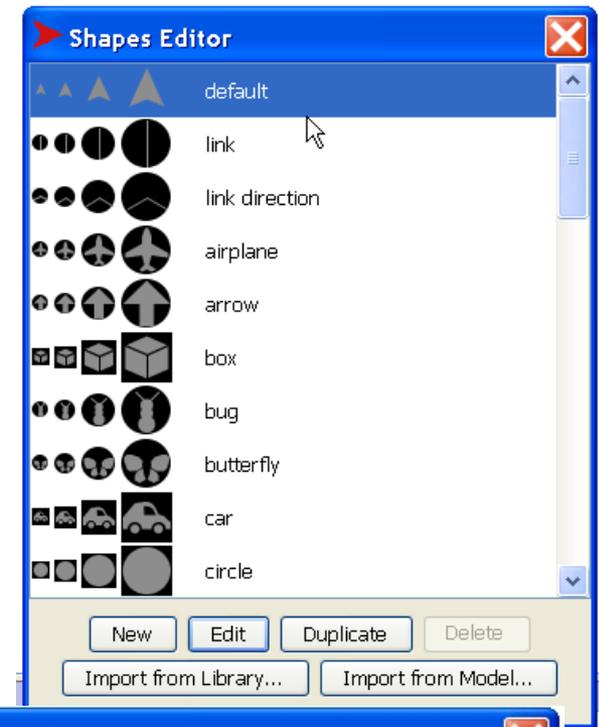
patches-own

pxcor, pycor
pcolor
plabel
plabel-color
patches-own [pvar1 pvar2 ...]

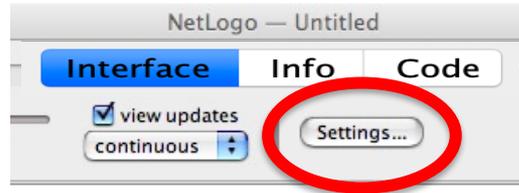
breeds-own

breed [boxes]
breed [cars]

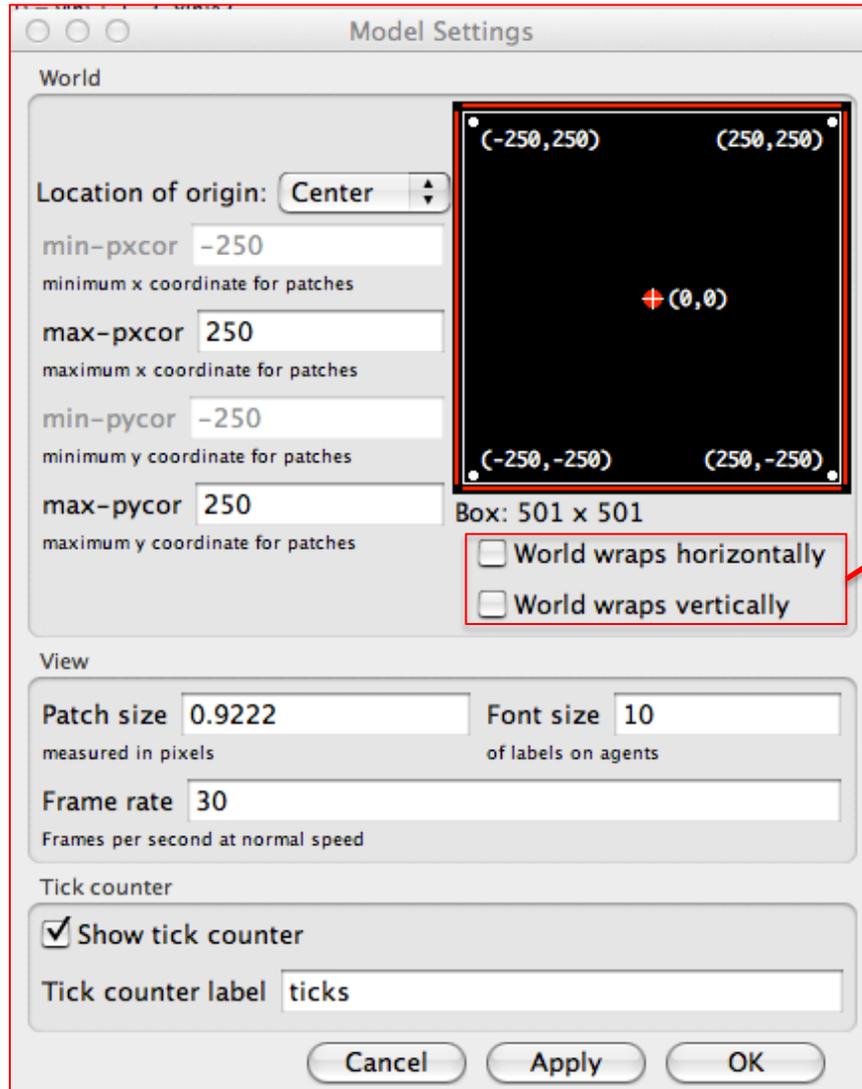
agentset



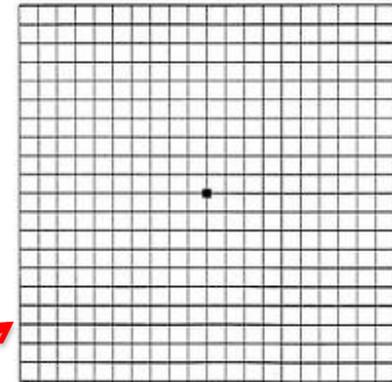
Mappa-Henon.nlogo



World Settings



closed boundary conditions



Mappa-Henon.nlogo

Interface Info Code

```
globals [ C1 itime ]
breed [ mappe mappa]
mappe-own [ x y ]
```

to SETUP

```
ca
set itime 0
set-default-shape mappe "dot"
create-mappe N
[
set size 2 set color yellow
set x (random-float 0.1)
set y (random-float 0.1)
setxy ((x / x-range) * max-pxcor) ((y / y-range) * max-pycor)
]
```

do-bifurcation

end

N 2000

Interface Info Code

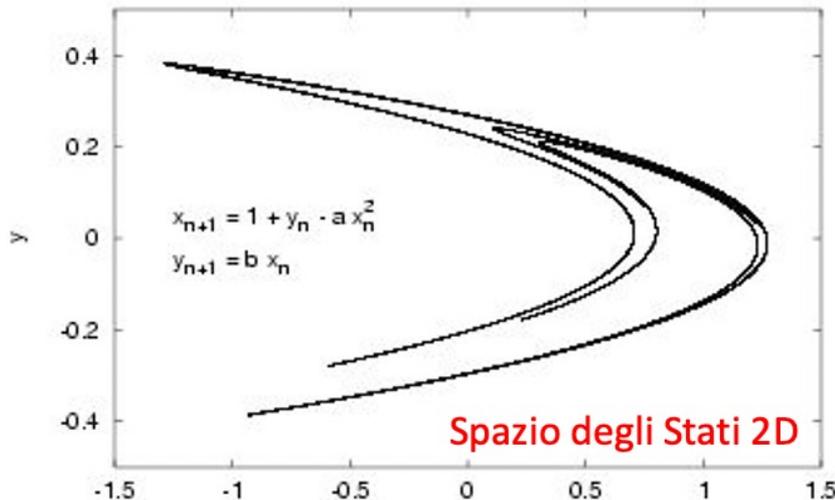
SETUP



x-range 1.50

y-range 0.50

Henon Map



$$x_{n+1} = y_n + 1 - Cx_n^2, \quad y_{n+1} = Bx_n$$

Mappa-Henon.nlogo

Interface Info Code

```
globals [ C1 itime ]  
breed [ mappe mappa ]  
mappe-own [ x y ]
```

to SETUP

```
ca  
set itime 0  
set-default-shape mappe "dot"  
create-mappe N  
[  
  set size 2 set color yellow  
  set x (random-float 0.1)  
  set y (random-float 0.1)  
  setxy ((x / x-range) * max-pxcor) ((y / y-range) * max-pycor)  
]
```

do-bifurcation

end

to GO

```
set itime (itime + 1)  
ask mappe  
[  
  let x-new (y + 1 - (C * x * x) )  
  let y-new (B * x)  
  set x x-new  
  set y y-new  
  let xx ((x / x-range) * max-pxcor) let yy ((y / y-range) * max-pycor)  
  if (abs(xx) < max-pxcor and abs(yy) < max-pycor) [setxy xx yy]  
]
```

```
if (itime mod 15 = 0) [do-bifurcation]
```

end

N 2000

SETUP

Interface Info Code

x-range 1.50

y-range 0.50

GO

$$x_{n+1} = y_n + 1 - Cx_n^2, \quad y_{n+1} = Bx_n$$

B=0.3

0 < C < 1.42

B 0.30

C 1.377



Mappa-Henon.nlogo

BIFURCATION

variable

x

```
globals [ C1 itime ]
breed [ mappe mappa]
mappe-own [ x y ]
```

```
to SETUP
```

```
to GO
```

$$x_{n+1} = y_n + 1 - Cx_n^2, \quad y_{n+1} = Bx_n$$

```
to DO-BIFURCATION
```

```
set-current-plot "Diagramma-di-Biforcazione"
```

```
clear-plot
```

```
set-current-plot-pen "line-pen"
```

```
plotxy C -2 plotxy C 2
```

```
set-current-plot-pen "default"
```

```
set-plot-x-range starting-C final-C
```

```
if-else (variable = "x")
```

```
[set-plot-y-range -1.4 1.5]
```

```
[set-plot-y-range -0.4 0.5]
```

```
set C1 starting-C
```

```
let passo ((final-C - starting-C) / 200)
```

```
repeat 200
```

```
[
```

```
let xx random-float 0.1
```

```
let yy random-float 0.1
```

```
repeat 200 [ let x-new (yy + 1 - (C1 * xx * xx)) let y-new (B * xx)
```

```
set xx x-new set yy y-new ]
```

```
repeat 200 [ let x-new (yy + 1 - (C1 * xx * xx)) let y-new (B * xx)
```

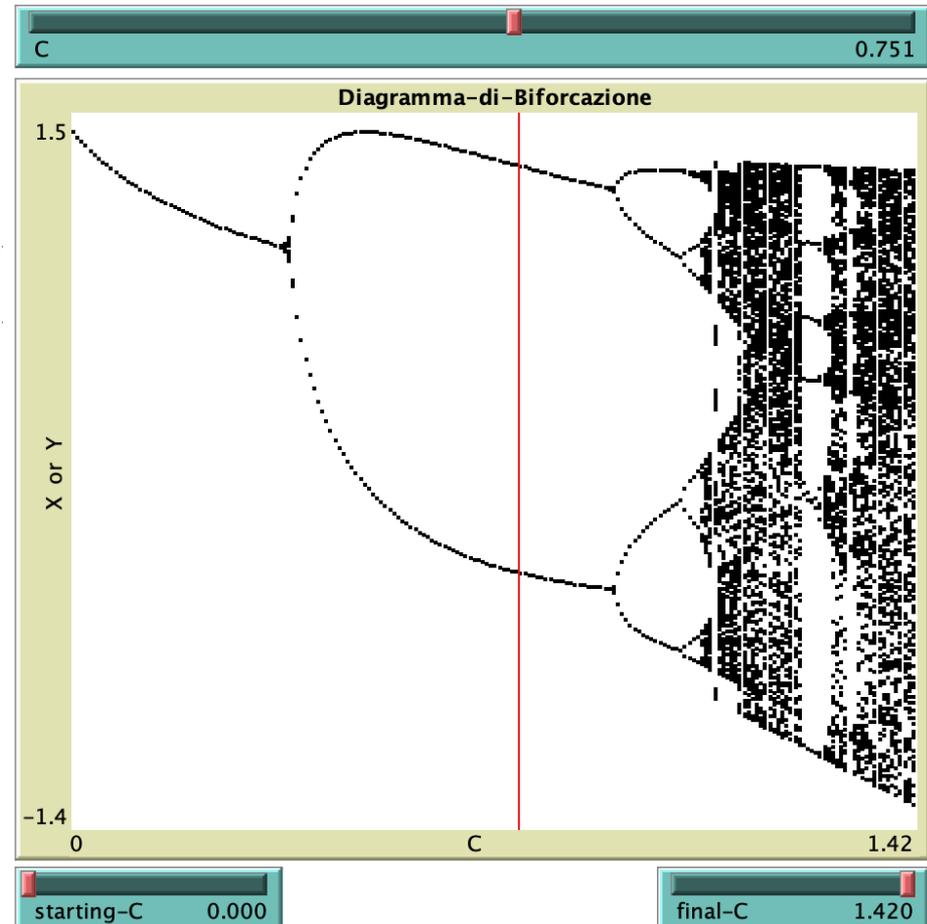
```
set xx x-new set yy y-new
```

```
if-else (variable = "x") [plotxy C1 xx] [plotxy C1 yy] ]
```

```
set C1 (C1 + passo)
```

```
]
```

```
end
```

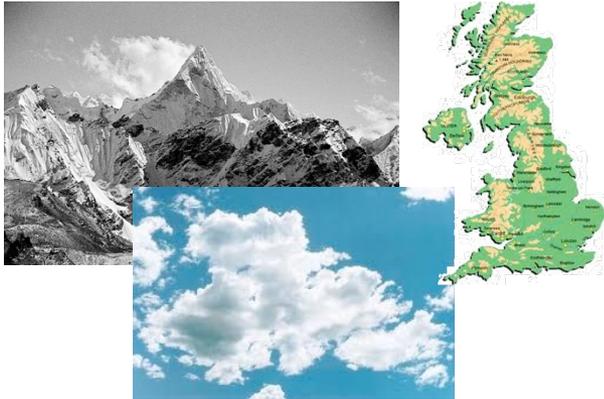


Quantificare il caos geometricamente: la Dimensione Frattale

Abbiamo già visto in dettaglio come il calcolo dell'esponente di Lyapunov costituisca un importante strumento per la valutazione del grado di caoticità nella mappa logistica. Esso appartiene ad una classe di metodi basati essenzialmente sugli aspetti dinamici (cioé dipendenti dal tempo) delle traiettorie seguite dal sistema che si sta studiando. Esiste però un'altra grande categoria di metodi per quantificare il caos, che si basa piuttosto sugli aspetti geometrici degli attrattori e piú in particolare sul calcolo della loro **dimensionalità** [2].

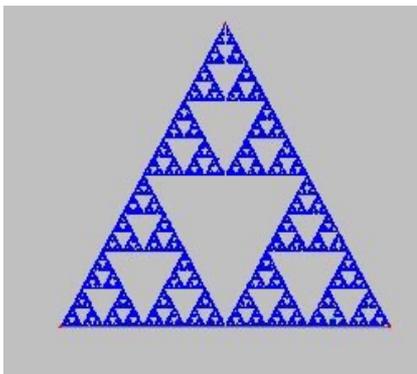
Per un sistema dissipativo la dimensionalità D di un attrattore, che deve ovviamente essere inferiore al numero di dimensioni dello spazio delle fasi in cui vive l'attrattore stesso, é un indicatore molto utile per descrivere il comportamento a lungo termine del sistema, in quanto permette di stimare il numero di gradi di libertà che rimangono effettivamente attivi una volta che il sistema ha raggiunto lo stato asintotico della sua dinamica. É evidente che un attrattore a punto fisso avrà una dimensione $D = 0$, mentre un attrattore a ciclo limite, essendo rappresentato da una linea, avrà dimensione $D = 1$. Meno immediata sembra invece la valutazione della dimensionalità di un attrattore caotico.

Reminder sulla dimensione frattale



Per descrivere matematicamente **oggetti complessi e frastagliati**, come la linea costiera di un'isola, il profilo di una catena montuosa o la struttura di una nuvola, i matematici hanno introdotto il concetto di "frattale".

Più precisamente, il termine "frattale" venne coniato nel 1975 dal matematico francese **Benoît Mandelbrot**, e deriva dal latino **fractus** (rotto, spezzato), così come il termine frazione.

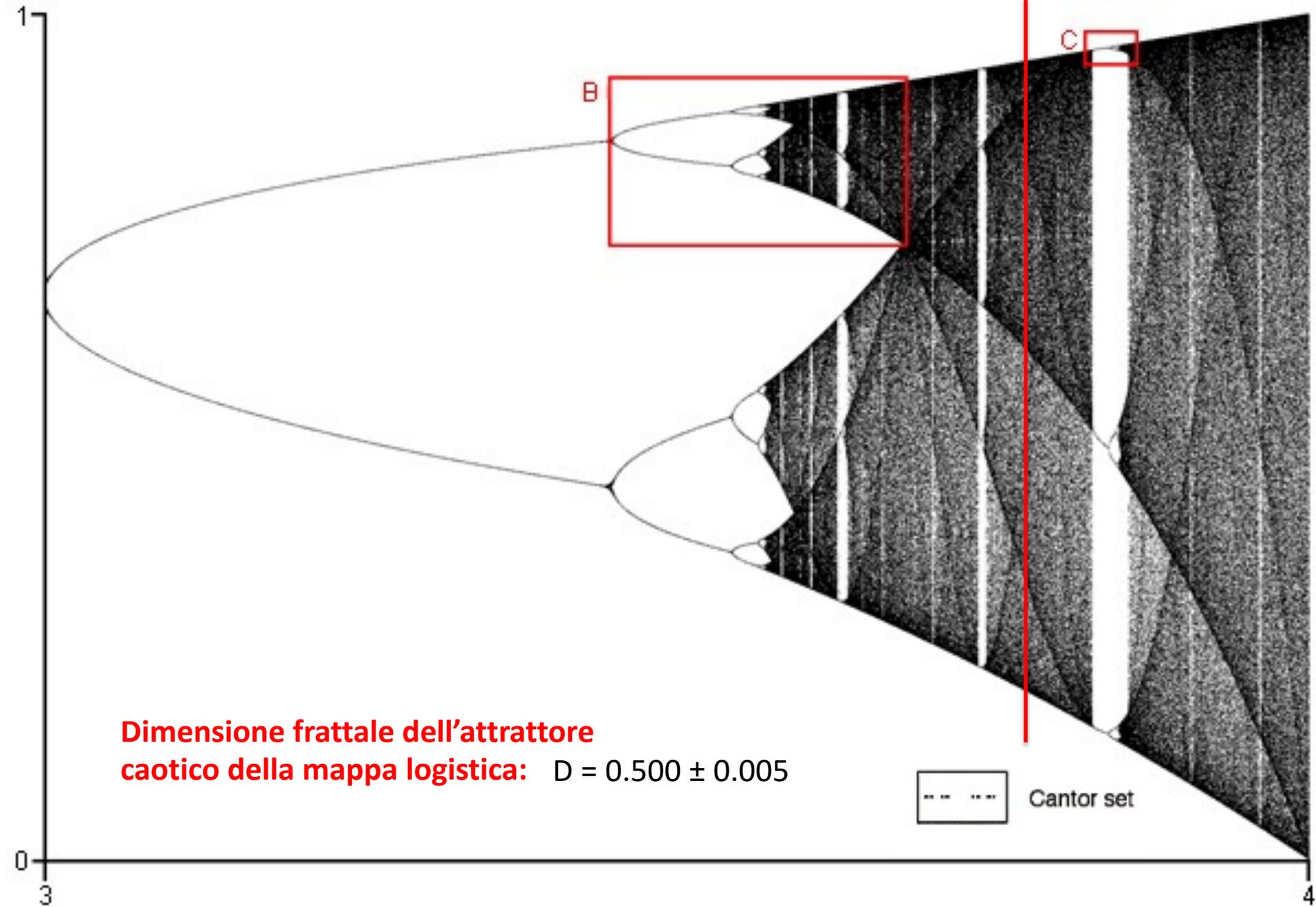


Un **frattale** è un oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale diverse, ovvero che non cambia aspetto anche se visto con una lente d'ingrandimento. In altre parole è un oggetto dotato delle proprietà di **auto-similarità e invarianza di scala**. Ma ha anche la strana caratteristica matematica di possedere una **dimensione frazionaria**.

La dimensione frattale

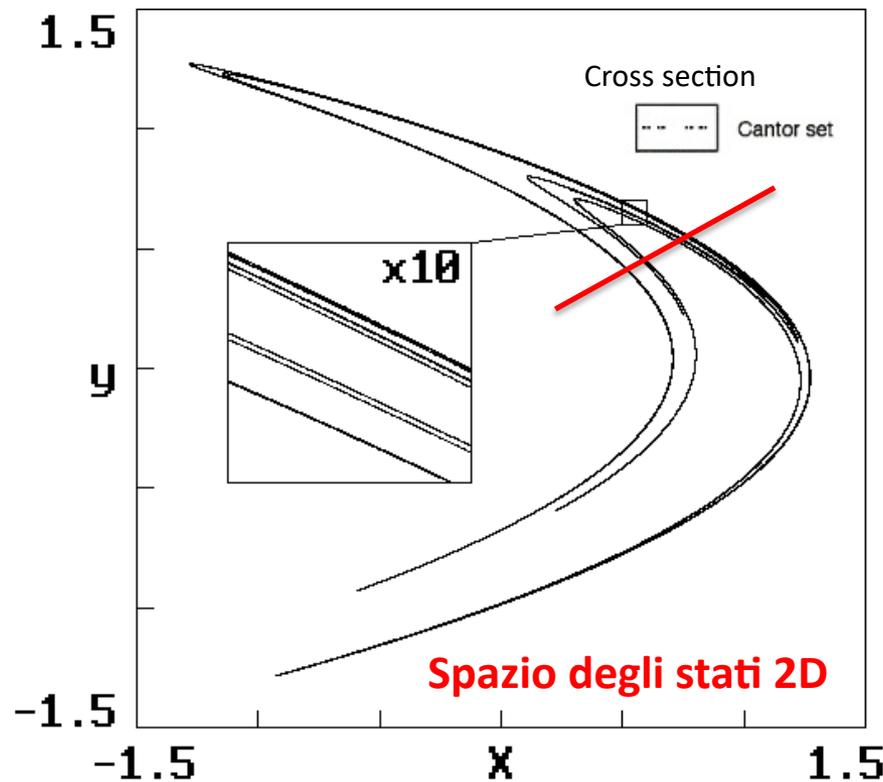


Spazio degli stati 1D



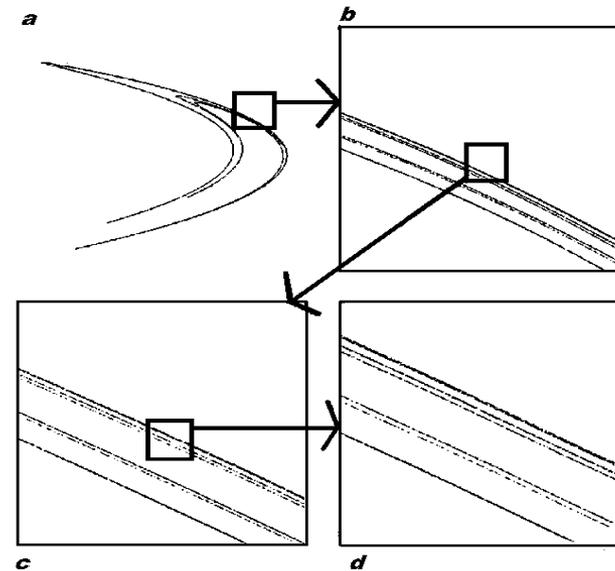
**Dimensione frattale dell'attrattore
caotico della mappa logistica: $D = 0.500 \pm 0.005$**

Se osserviamo infatti l'attrattore della mappa di Hénon mostrato in Fig.1.1, ci rendiamo conto che esso é costituito da un insieme molto fitto di punti che giacciono su delle linee che a loro volta sembrano in qualche modo estendersi sulla tipica superficie a forma di mezzaluna senza però riempirla. Lo stesso Hénon si era quasi subito reso conto del fatto che ciascuna delle linee dell'attrattore caotico, che a prima vista sembrano uniche, una volta ingrandita appariva in realtà costituita da due linee distinte, che a loro volta, ad ingrandimenti maggiori, diventavano prima quattro, poi otto, e così via. Al lettore attento questa peculiarità ricorderà quanto osservato in precedenza parlando del diagramma di biforcazione della mappa logistica: si tratta infatti della cosiddetta autosimilarità, cioè la ripetizione delle medesime configurazioni geometriche a diverse scale di ingrandimento.

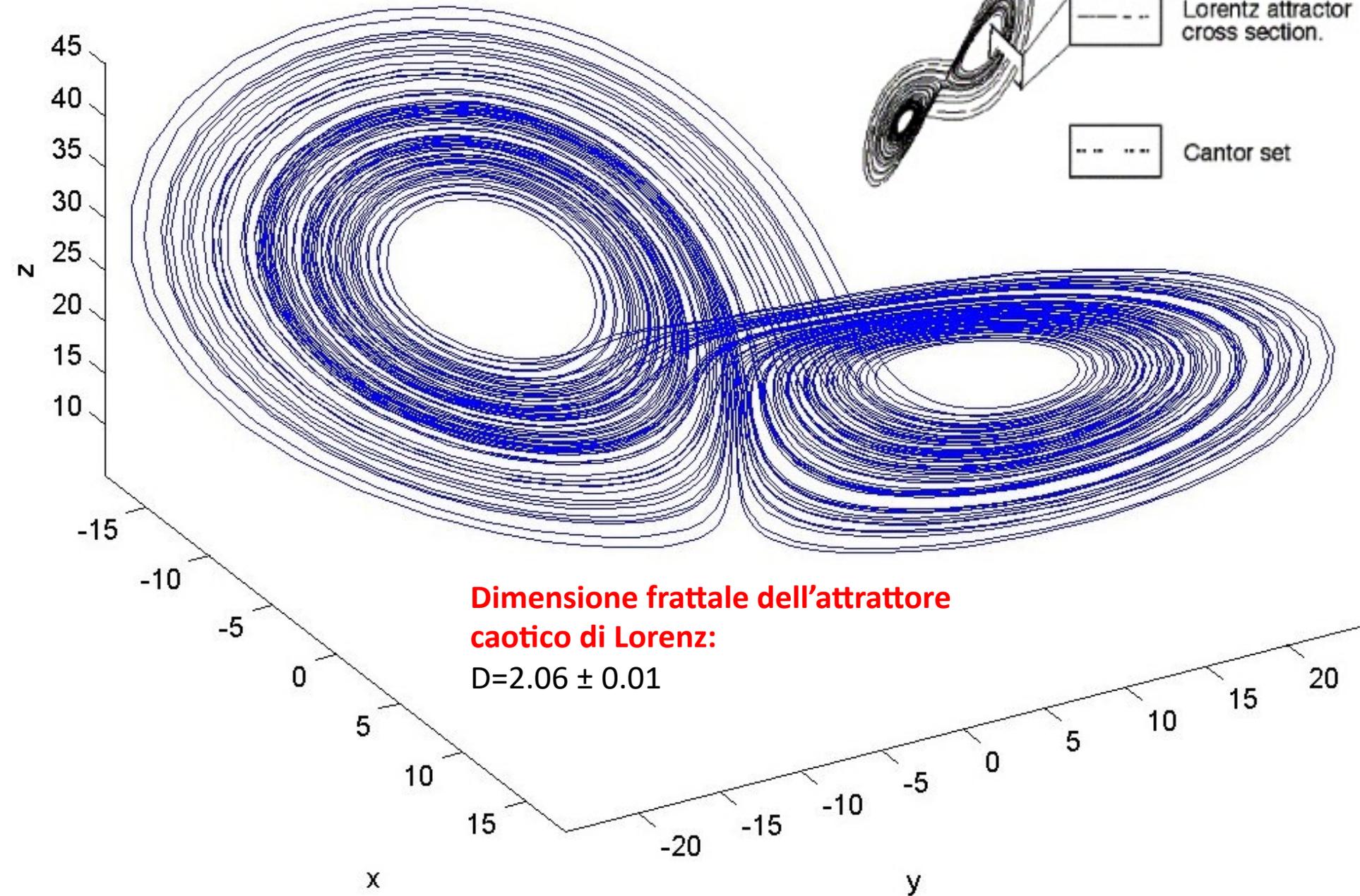


Dimensione frattale dell'attrattore caotico della mappa di Hénon:

$$D = 1.25 \pm 0.02$$



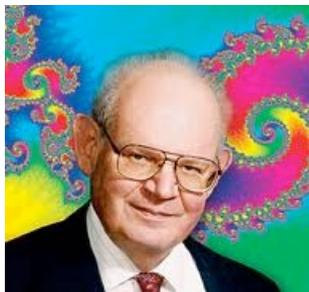
Spazio degli stati 3D



Calcolare la Dimensione Frattale

Queste considerazioni ci spingono con insistenza a porci una domanda fondamentale: qual'è la dimensione di un attrattore caotico? È la stessa domanda che si erano posti i matematici nei primi anni Ottanta, e la risposta a cui arrivarono fu quanto meno sorprendente: gli attrattori caotici sembrano infatti possedere una dimensione frazionaria, una proprietà davvero molto bizzarra, tant'è che spesso ci si riferisce a questo tipo di attrattori chiamandoli **attrattori strani**.

Già nel 1975 il matematico francese (di origine polacca) Benoit Mandelbrot aveva coniato il termine frattali (dal latino 'fractus, che significa 'rotto', 'spezzato') per riferirsi a quella intrigante categoria di oggetti la cui struttura autosimile dava luogo ad una dimensionalità frazionaria [3]. Lo stesso Mandelbrot si cimentò subito nel compito di individuare dei possibili metodi per stimare quella che da quel momento in poi venne chiamata dimensione frattale, la quale, in sostanza, esprimerebbe il grado di irregolarità dell'oggetto frattale. Da allora molti altri metodi sono stati elaborati a questo scopo e ad oggi esistono molte differenti misure della dimensione frattale (non sempre equivalenti) senza che nessuna di esse possa pretendere di rappresentare la dimensione frattale. Una delle misure più note, probabilmente a causa della sua intuitività, è la cosiddetta dimensione di box-counting D_b , che in realtà era stata già introdotta nell'ambito dei sistemi dinamici dal matematico russo Andrej Kolmogorov verso la fine degli anni '50 [4].



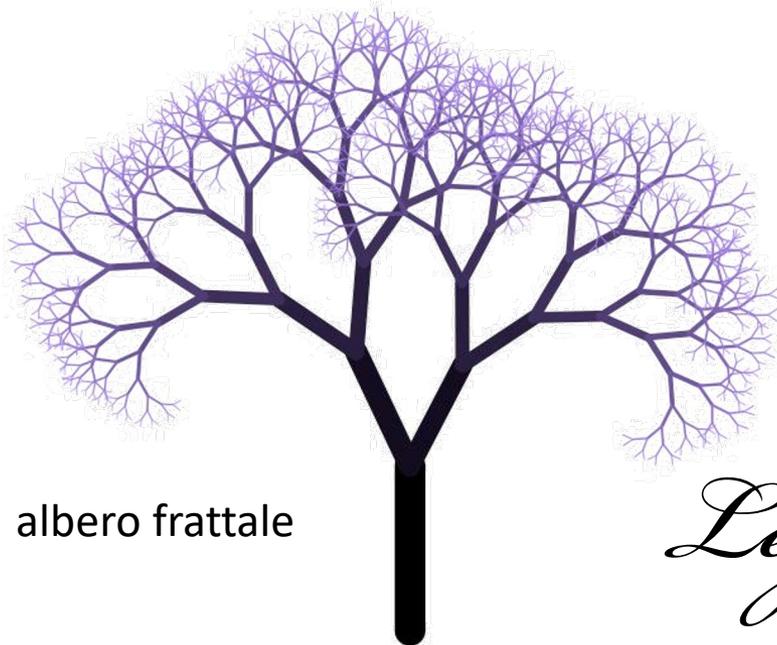
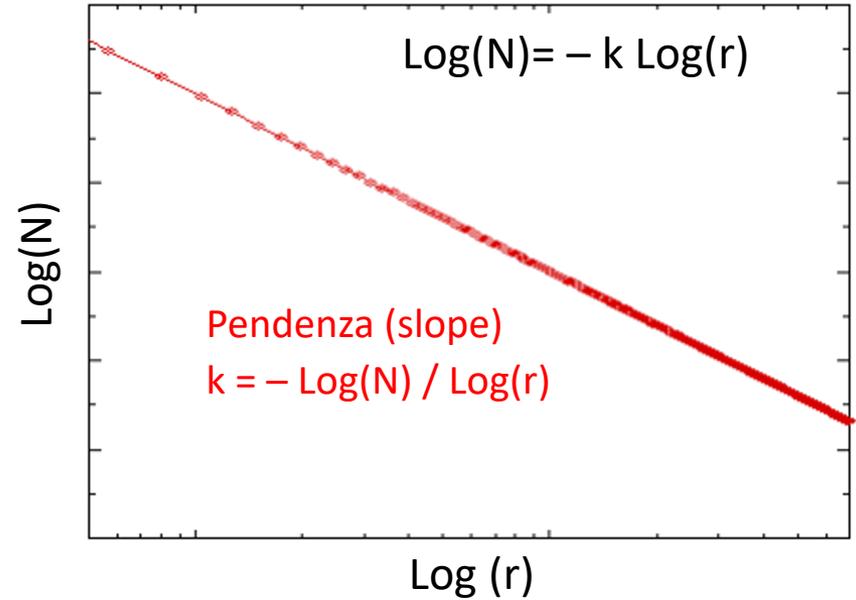
Benoit Mandelbrot (1924-2010)



Andrei Kolmogorov (1903-1987)

Reminder

La 'firma' matematica dell'autosimilarità e della invarianza di scala è la legge di potenza! (power law)



albero frattale

numero di rami

dimensione dei rami

$$N \approx r^{-k}$$

Legge di Potenza



Dimensione Frattale di Box Counting

Il metodo del box-counting si basa sul ricoprimento dello spazio delle fasi in cui si trova l'oggetto frattale, nel nostro caso l'attrattore strano, per mezzo di un certo numero di cellette ('boxes') di lato R . Nel caso unidimensionale queste cellette saranno dei segmenti, in 2 dimensioni dei quadrati, in 3 dei cubi e così via. A questo punto, per un valore fissato di R , basta contare il numero di cellette $N(R)$ necessario a contenere tutti i punti dell'attrattore e studiare come questo numero varia al variare di R . É evidente che riducendo R , e dunque la dimensione delle cellette, il numero $N(R)$ tenderá ad aumentare in quanto saranno necessarie sempre piú cellette per ricoprire l'attrattore. La dimensione di box-counting sará dunque definita in modo da soddisfare la relazione

$$N(R) = \lim_{R \rightarrow 0} kR^{-D_b}, \quad \text{power law} \quad (1.2)$$

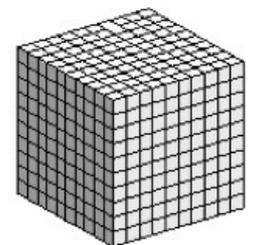
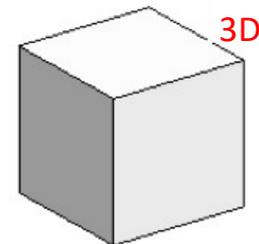
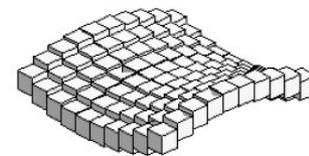
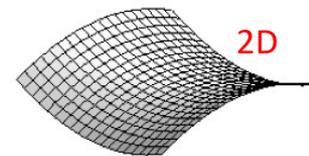
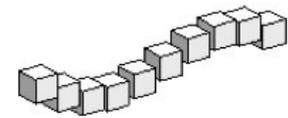
con slope negativa

dove k é una costante di proporzionalitá. Prendendo il logaritmo di entrambi i membri e trascurando i termini che svaniscono per R che tende a zero, si ottiene subito l'espressione finale di D_b :

$$\left(\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log k}{\log R} \rightarrow 0 \right)$$

$$D_b = - \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log N(R)}{\log R} \quad (1.3)$$

la quale, come é semplice verificare, produce come risultato 0 se applicata ad un punto, 1 se applicata a un segmento, e cosí via. Questo dimostra che si tratta di una misura affidabile della dimensionalitá di un oggetto, e dunque che puó essere ragionevolmente utilizzata anche per la valutazione di dimensioni frazionarie.



$$D_b = - \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log N(R)}{\log R}$$

Alcuni esempi:

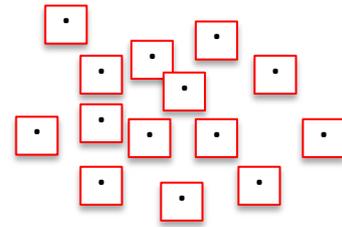
To gain some confidence that Eq. (9.7-3) gives a reasonable definition of dimension, let us apply it to some simple examples. First, consider a two-dimensional space and let the geometric object be a point. In this case, the box is just a square of side R . Only one box is needed to contain the point; therefore, we have $N(R) = 1$ for all values of R . Using this result in Eq. (1.3) gives $D_b = 0$, just as we would expect for a point.

1 punto



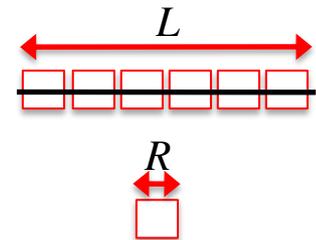
What happens if the object consists of a number of isolated points? The answer is that D_b is still equal to 0. To see how this comes about, let N be the number of isolated points. When R is small enough (smaller than the smallest distance between neighboring points), we will have one box around each point. When R gets smaller than this value, the numerator in Eq. (1.3) stays fixed while the denominator grows (more negative) without limit. So again we have $D_b = 0$.

N punti isolati



As a second example, let us use a line segment of length L as the geometric object. In this case we need $N(R) = L/R$ boxes to cover the segment. [When N is sufficiently large, we can safely ignore any fraction of a box in counting $N(R)$.] We now use this value in Eq. (1.3) to find

1 segmento



$$D_b = - \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log(L/R)}{\log R} = - \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log L - \log R}{\log R} = 1 \quad (9.7-4)$$

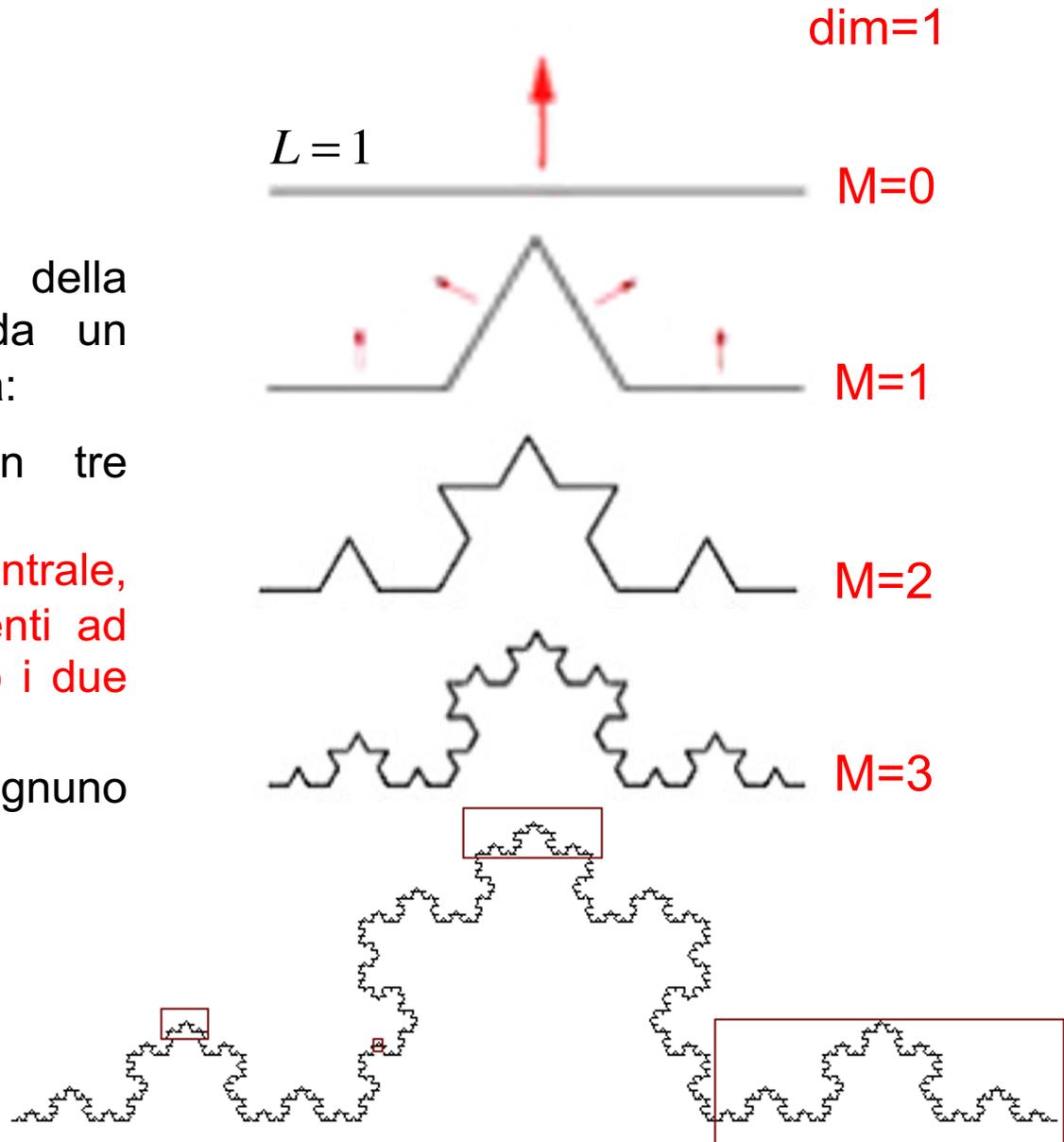
$$R = \frac{1}{6}L \rightarrow N(R) = 6$$

As we expect, the box-counting dimension of a line segment is equal to 1.

La curva di Koch

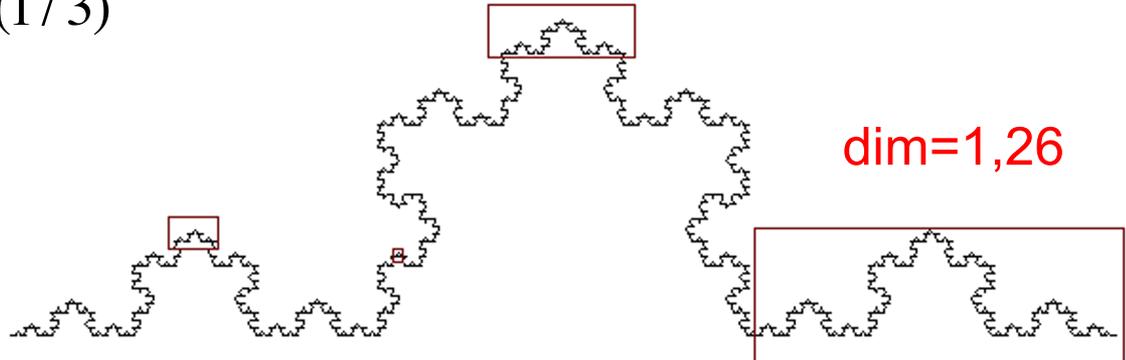
Procedura di generazione della curva di Koch a partire da un segmento di lunghezza unitaria:

1. dividere il segmento in tre segmenti uguali;
2. cancellare il segmentino centrale, sostituendolo con due segmenti ad esso identici che costituiranno i due lati di un triangolo equilatero;
3. tornare al punto 1 per ognuno degli attuali segmenti.



La curva di Koch

dim=1



Si noti che al passo **M-esimo** si hanno **$N=4^M$** segmentini, ciascuno di lunghezza **$R=(1/3)^M = 3^{-M}$** ($M \rightarrow \infty \Rightarrow R \rightarrow 0$).

Immaginando di coprire ogni segmentino con una celletta, sostituiamo questi valori, rispettivamente, ad **$N(R)$** ed **R** nell'Eq.(1.3):

$$D_b = -\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log N(R)}{\log R} = -\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\log 4^M}{\log (1/3)^M} =$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M \log 4}{M \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26\dots$$

Dimensione Frattale di Correlazione

Nonostante la sua ragionevolezza e semplicitá, però, l'applicazione pratica del metodo del box-counting é abbastanza dispendiosa dal punto di vista computazionale, in quanto il numero di operazioni da eseguire cresce esponenzialmente con le dimensioni dello spazio delle fasi in cui l'oggetto frattale é situato. É per questo motivo che, soprattutto per la caratterizzazione degli attrattori caotici, spesso si preferisce utilizzare un'altro metodo, introdotto da Grassberger e Procaccia nel 1983 [5], basato sul calcolo della cosiddetta somma di correlazione. Si tratta di una tecnica che conta direttamente i punti di un attrattore senza richiedere il partizionamento dello spazio delle fasi, e dunque permette di giungere molto piú rapidamente alla valutazione della sua dimensione frattale, che in questo caso prende il nome di dimensione di correlazione. Sarà proprio di questa tecnica che ci serviremo per stimare la dimensione frattale dell'attrattore strano di Hénon. Passiamo subito, quindi, ad esaminarla in dettaglio [2].



Peter Grassberger (1940)



Itamar Procaccia (1949)

Dimensione di Correlazione di un attrattore (traiettoria) formato da N punti



L'idea di Grassberger e Procaccia consiste nel calcolare, per ogni punto P_i dell'attrattore, il numero $N_i(R)$ di punti che si trovano all'interno di una circonferenza di raggio R centrata sul punto P_i (escludendo quest'ultimo) e di ottenere da questa la quantità $p_i(R) = N_i(R)/(N - 1)$, che rappresenta quindi **la frazione** di punti situati ad una distanza dal punto P_i inferiore ad R . A questo punto la somma di correlazione $C(R)$ si definisce semplicemente come:



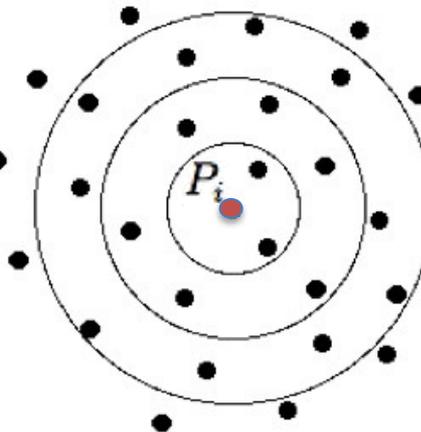
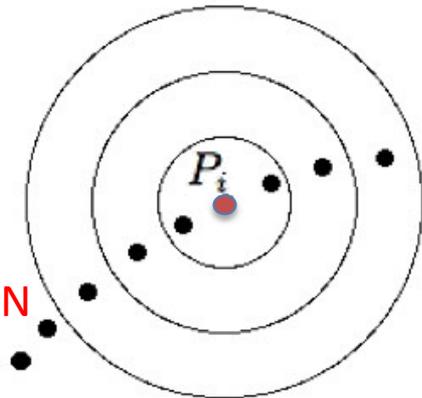
$$C(R) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i(R), \quad (1.4)$$

e risulta compresa tra 0 e 1 (due situazioni limite che corrispondono, rispettivamente, ai due casi in cui R è piú piccolo della distanza minima tra due punti qualunque dell'attrattore o è piú grande di quella massima).

$C(R)=1$: tutti i punti cadono dentro la circonferenza

$C(R)=0$: nessun punto cade dentro la circonferenza

Traiettoria formata da N punti



Attrattore formato da N punti

In analogia a quanto visto nel caso della dimensione di box-counting, la dimensione di correlazione D_c risulta allora definita come quel numero che soddisfa la relazione

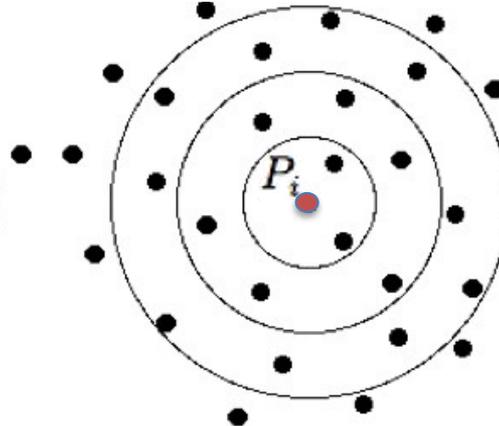
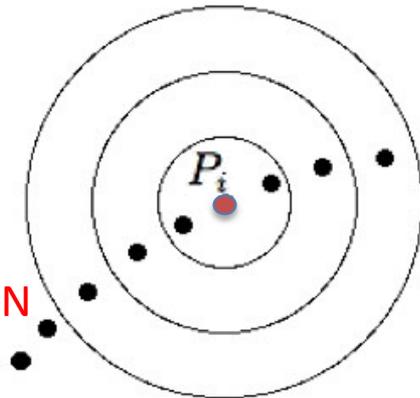
$$C(R) = \lim_{R \rightarrow 0} kR^{D_c}, \quad \text{power law con slope positiva} \quad (1.6)$$

da cui, passando ai logaritmi, avremo finalmente:

$$D_c = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log C(R)}{\log R}. \quad (1.7)$$

A volte la dimensione di correlazione 1.7 viene chiamata anche correlation scaling index, in quanto ci dice proprio come la somma $C(R)$ scala con il raggio R . In pratica, poiché evidentemente è impossibile nei calcoli al computer far tendere R a zero, si preferisce calcolare la $C(R)$ all'interno di un certo range $[R_{\min}, R_{\max}]$ e plottare il $\log C(R)$ in funzione del $\log(R)$ in quel range: il valore di D_c si ricaverà dalla pendenza di questa curva nella regione in cui essa segue un andamento approssimativamente lineare. E questo è esattamente quello che faremo tra un attimo, applicando l'intera procedura appena descritta all'attrattore strano della mappa di Hénon.

Traiettoria formata da N punti



Attrattore formato da N punti

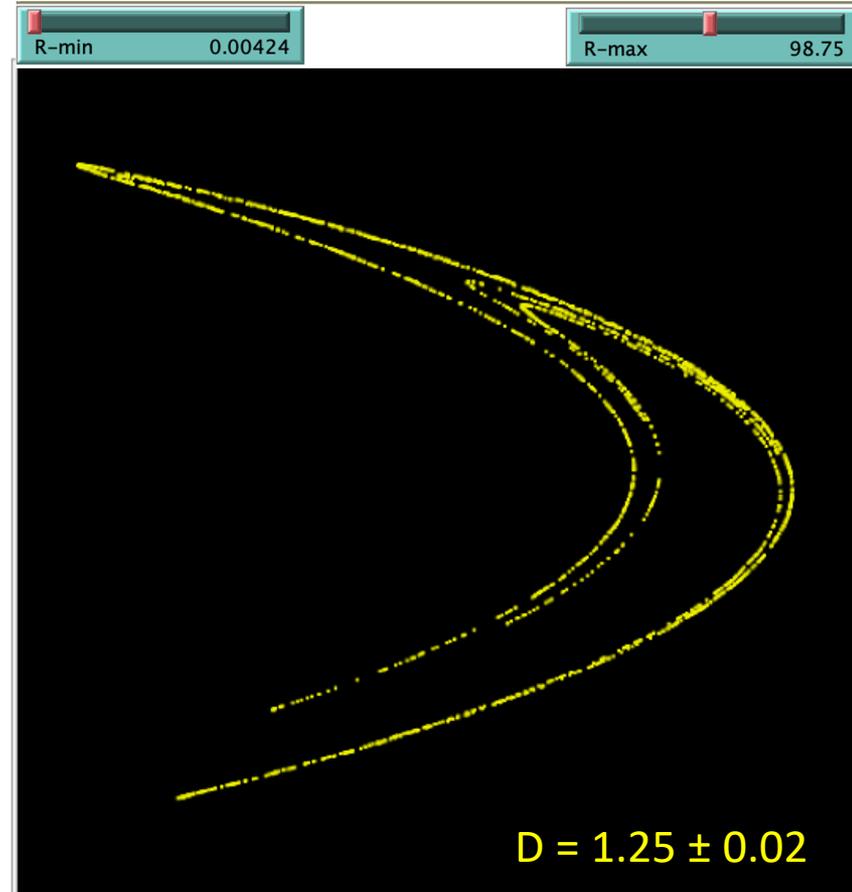


Mappa-Henon-Corrdim.nlogo

to CALCULATE-CORRELATION-DIMENSION

```
set iter 1
set scaling-index 0
let C-min 100 let C-old 0
let R-step 0 let R-old R-min let R R-min
while [R <= R-max]
[
  if (R >= 1.0E-4 and R < 1.0E-3) [set R-step 1.0E-4 ]
  if (R >= 1.0E-3 and R < 1.0E-2) [set R-step 1.0E-3 ]
  if (R >= 1.0E-2 and R < 1.0E-1) [set R-step 1.0E-2 ]
  if (R >= 1.0E-1 and R <= 1 ) [set R-step 1.0E-1 ]
  if (R >= 1 and R <= 10 ) [set R-step 1 ]
  if (R >= 10 and R <= 100 ) [set R-step 10 ]

  let C-sum 0
  ask mappe
  [
    let t-cont (count (mappe in-radius R))
    set C-sum (C-sum + (t-cont / (N - 1)))
  ]
  set C-sum (C-sum / N)
  if (R = R-min) [set C-old C-sum]
  set-current-plot "Correlation-Sum-Plot"
  plotxy log R 10 log C-sum 10
  if (R > R-min)
  [
    set scaling-index ((log C-sum 10 - log C-old 10) / (log R 10 - log R-old 10))
    set-current-plot "Correlation-Scaling-Index-Plot"
    plotxy (log R 10) scaling-index
    set R-old R
    set C-old C-sum
    set iter (iter + 1)
  ]
  set R (R + R-step)
]
end
```

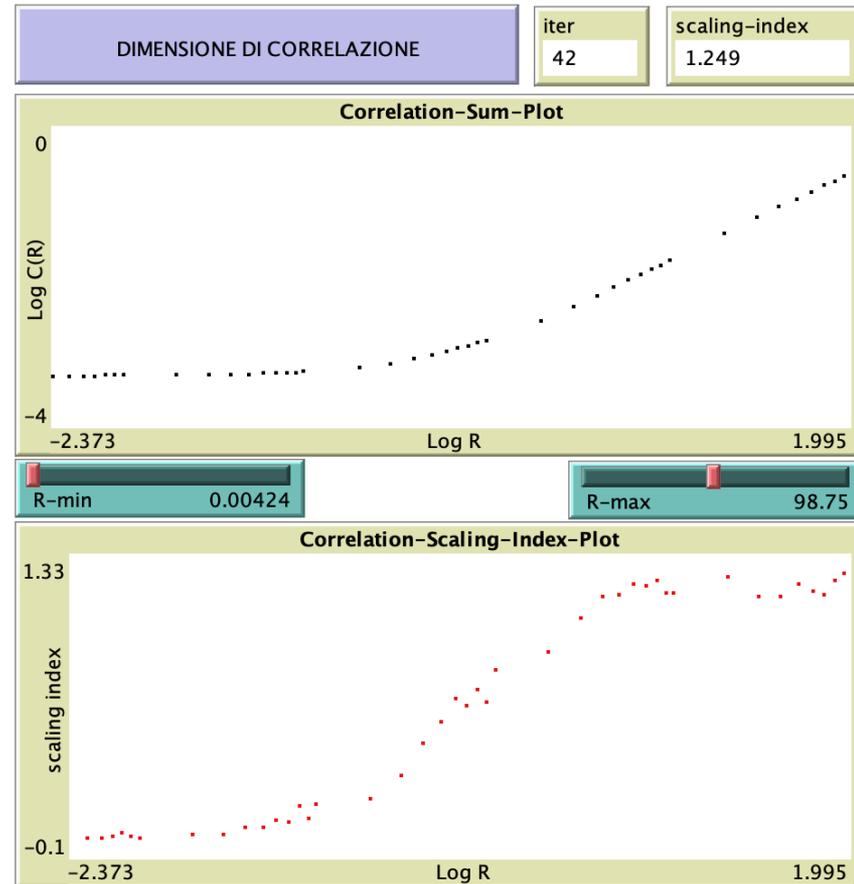


Mappa-Henon-Corrdim.nlogo

to CALCULATE-CORRELATION-DIMENSIONION

```
set iter 1
set scaling-index 0
let C-min 100 let C-old 0
let R-step 0 let R-old R-min let R R-min
while [R <= R-max]
[
  if (R >= 1.0E-4 and R < 1.0E-3) [set R-step 1.0E-4 ]
  if (R >= 1.0E-3 and R < 1.0E-2) [set R-step 1.0E-3 ]
  if (R >= 1.0E-2 and R < 1.0E-1) [set R-step 1.0E-2 ]
  if (R >= 1.0E-1 and R <= 1 ) [set R-step 1.0E-1 ]
  if (R >= 1 and R <= 10 ) [set R-step 1 ]
  if (R >= 10 and R <= 100 ) [set R-step 10 ]

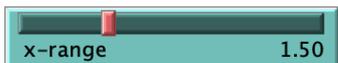
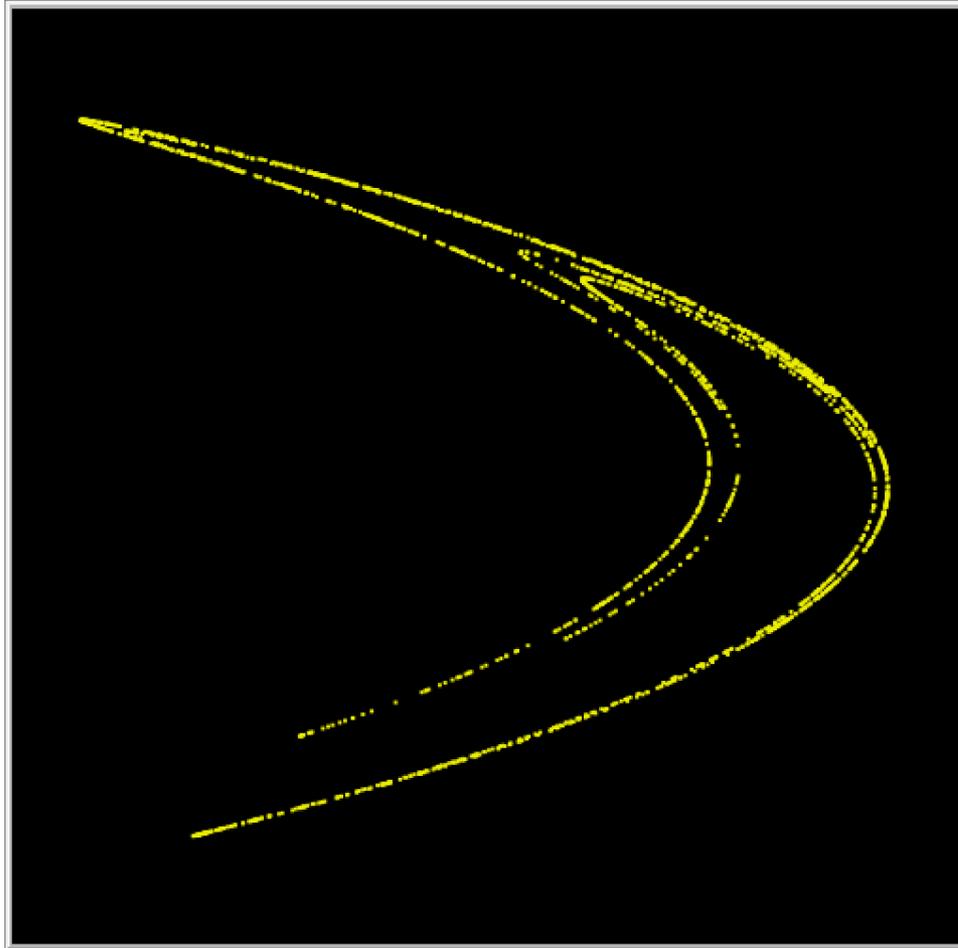
  let C-sum 0
  ask mappe
  [
    let t-cont (count (mappe in-radius R))
    set C-sum (C-sum + (t-cont / (N - 1)))
  ]
  set C-sum (C-sum / N)
  if (R = R-min) [set C-old C-sum]
  set-current-plot "Correlation-Sum-Plot"
  plotxy log R 10 log C-sum 10
  if (R > R-min)
  [
    set scaling-index ((log C-sum 10 - log C-old 10) / (log R 10 - log R-old 10))
    set-current-plot "Correlation-Scaling-Index-Plot"
    plotxy (log R 10) scaling-index
    set R-old R
    set C-old C-sum
    set iter (iter + 1)
  ]
  set R (R + R-step)
]
end
```



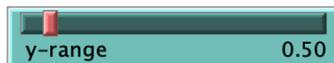
Mappa-Henon-Corrdim.nlogo

MAPPA DI HENON

$$x(n+1) = y(n) + 1 - C x(n)^2$$
$$y(n+1) = B x(n)$$



x



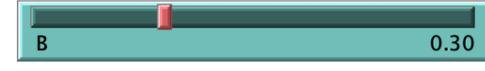
SETUP

iteration
321



GO

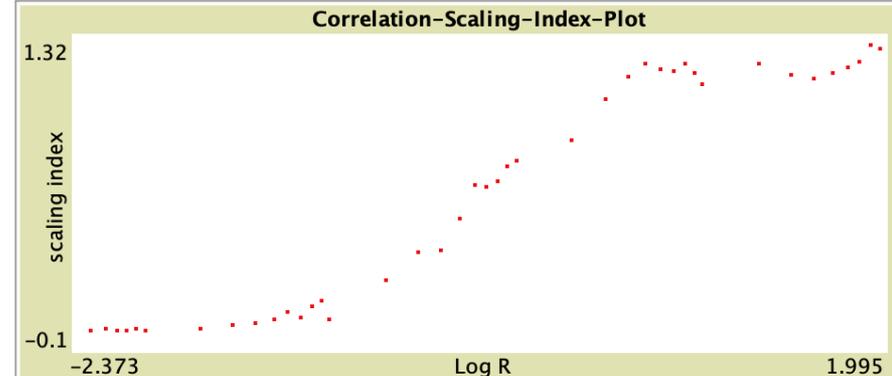
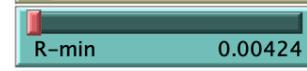
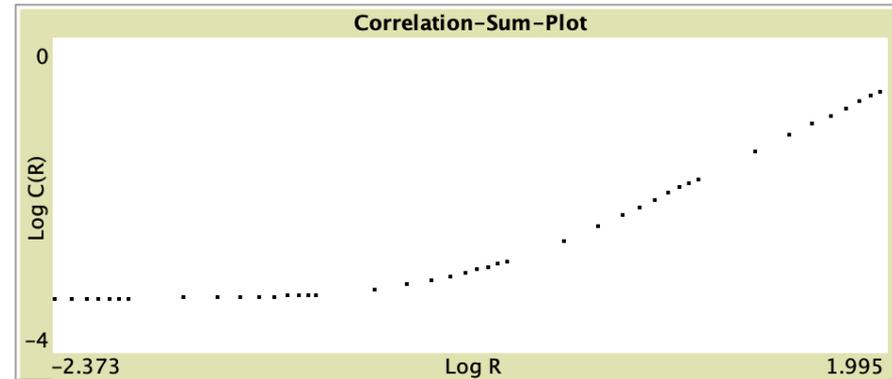
count points
2000



DIMENSIONE DI CORRELAZIONE

iter
42

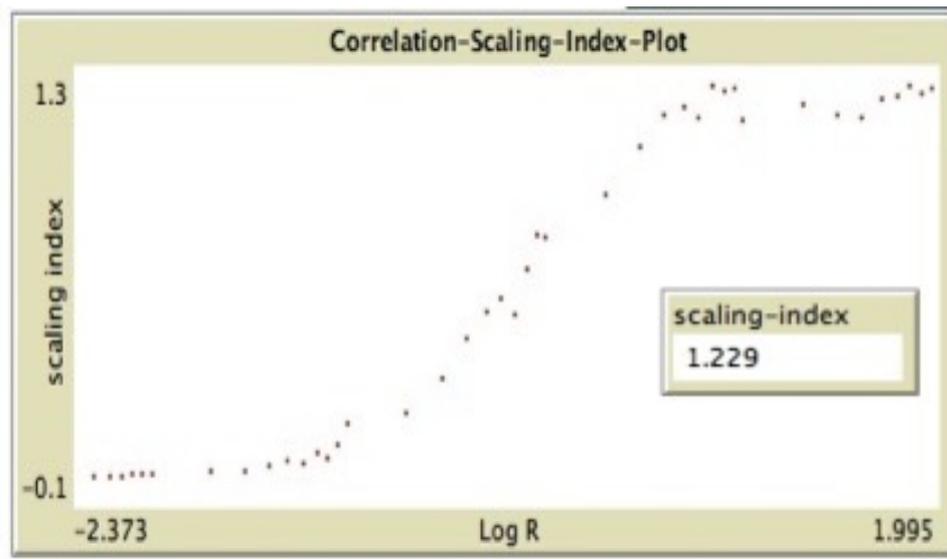
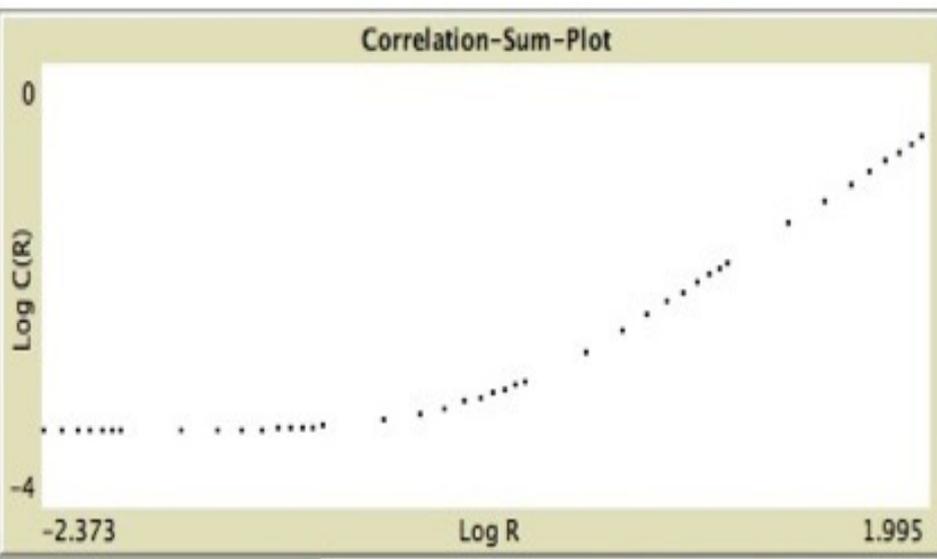
scaling-index
1.263



I valori scelti per $R - min$ (dell'ordine di 10^{-3}) ed $R - max$ (dell'ordine di 10^2) sono abbastanza tipici e possono essere utilizzati per esplorare il comportamento asintotico dell'indice di scaling al variare del parametro di controllo C , e dunque del tipo di attrattore. Fissato al solito $B = 0.3$, per $C = 1.4$ troviamo l'attrattore strano di Fig.1.4 e dal relativo plot si vede chiaramente che l'indice di scaling, che poi non é nient'altro che la dimensione di correlazione, si assesta attorno al valore 1.23 (mostrato anche nella casella del monitor **scaling-index** in alto a destra): come ci si aspettava, la dimensione dell'attrattore strano risulta essere frazionaria e compresa tra 1 e 2. Il valore trovato risulta anche in buon accordo con il valore della cosiddetta dimensione di Hausdorff (introdotta nel 1918 dal matematico tedesco Felix Hausdorff per misurare la dimensionalità di spazi metrici arbitrari, e che poi si é rivelata molto utile anche come dimensione frattale), che per l'attrattore caotico di Hénon é circa 1.26.



Felix Hausdorff
(1868-1942)



Per valori di C inferiori a $C \sim 1.06$ (come si vede anche in Fig.1.1) gli attrattori della mappa di Hénon sono di tipo punto fisso o ciclo limite, quindi le mappe si concentreranno in punti isolati sullo schermo (in numero pari al periodo del ciclo limite, ovvero numero di rami della biforcazione corrispondente). Ad esempio, in Fig.1.5 é mostrato il calcolo della dimensione di correlazione nel caso $C = 0.43$ (sempre per $B = 0.3$), dove l'attrattore é un ciclo limite di periodo due: nel World sono visibili solo due punti, e la somma di correlazione rimane costantemente nulla, cosí come l'indice di scaling. La dimensione dell'attrattore é dunque 0, come anche in questo caso ci si aspettava trattandosi di punti isolati.

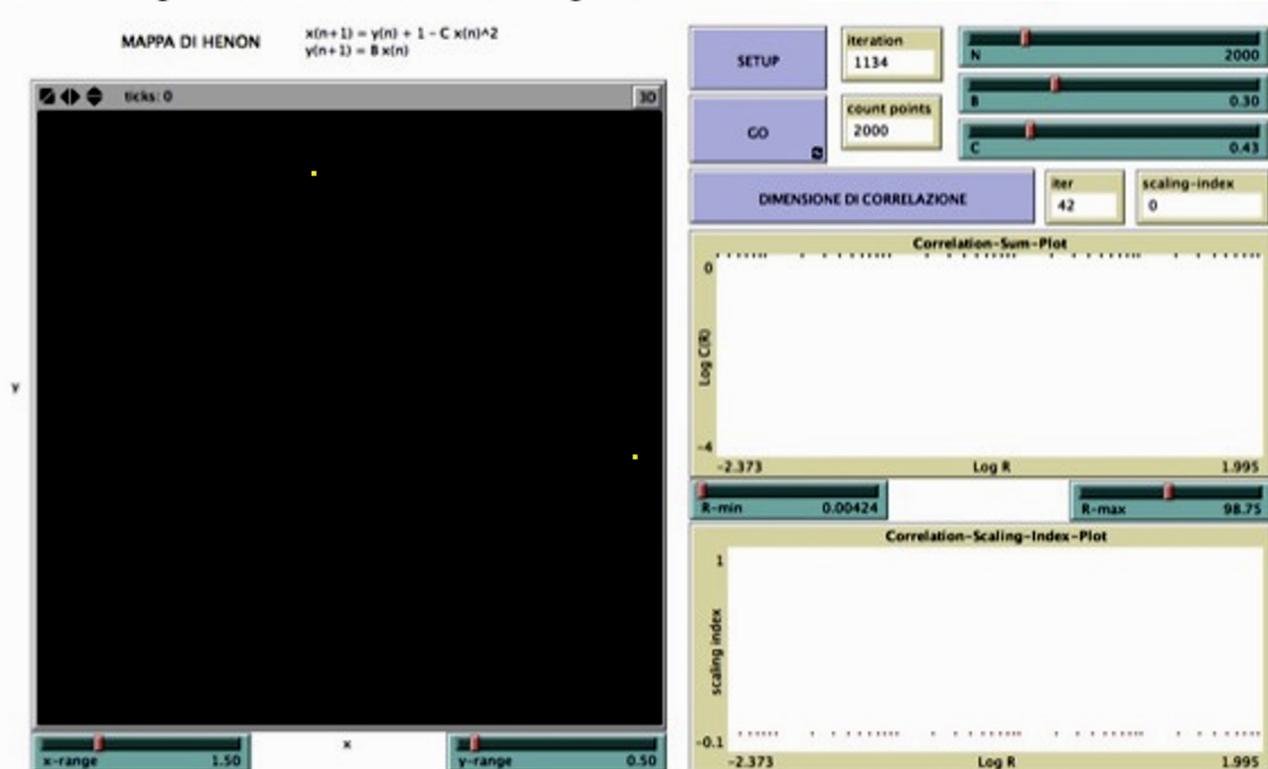


Figura 1.5: Calcolo della dimensione di correlazione di un attrattore a ciclo limite della mappa di Hénon, di periodo 4.

Se invece andiamo a calcolare la dimensione di correlazione del quadrato delle condizioni iniziali che abbiamo finora utilizzato per studiare l'evoluzione delle mappe di Hénon, e che in Fig.1.6 appare come un rettangolo a causa del differente rapporto di scala dei due assi del World ($x - range \neq y - range$), vediamo come l'indice di scaling si assesti rapidamente sul valore 1.912, molto vicino a 2 in quanto le mappe ricoprono quasi uniformemente la superficie bidimensionale 0.1×0.1 .

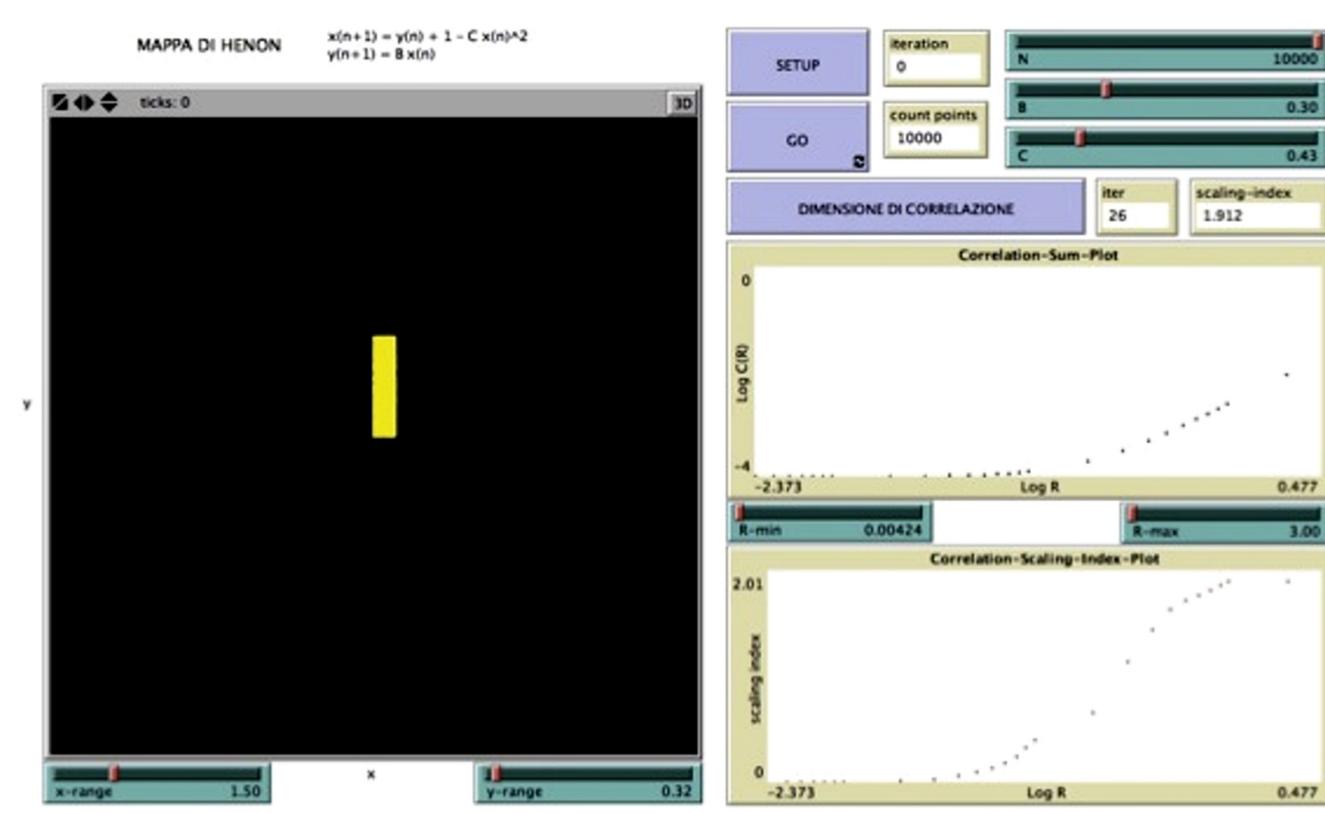
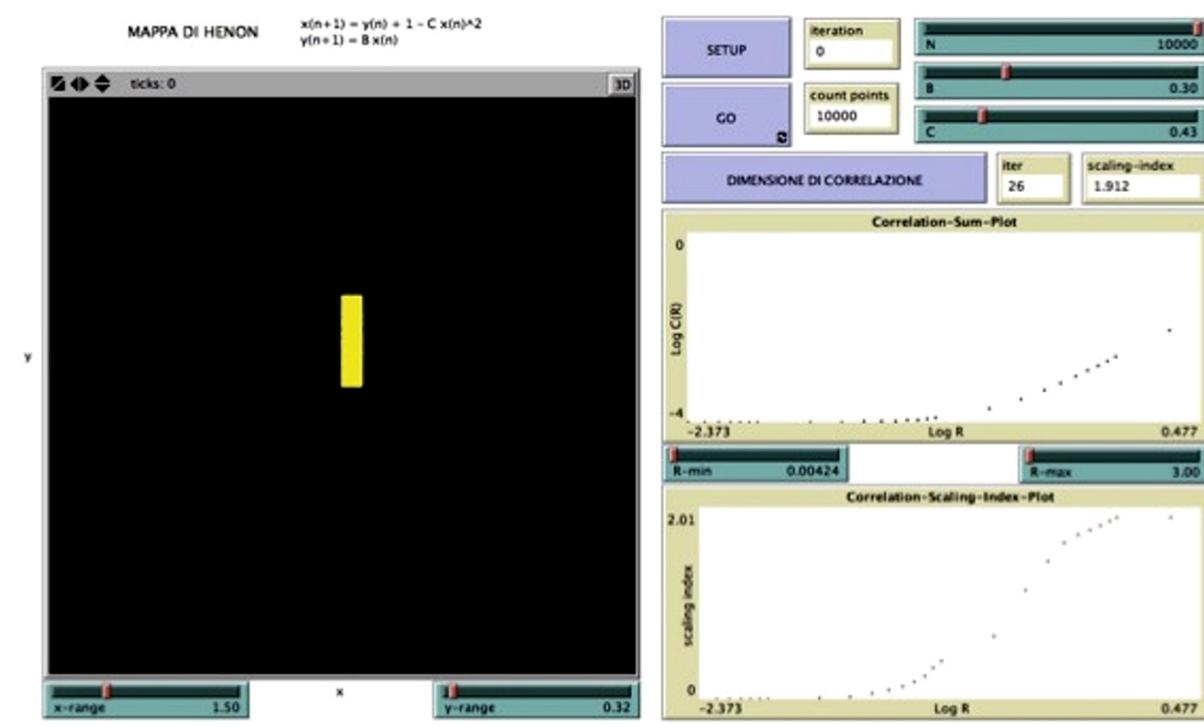


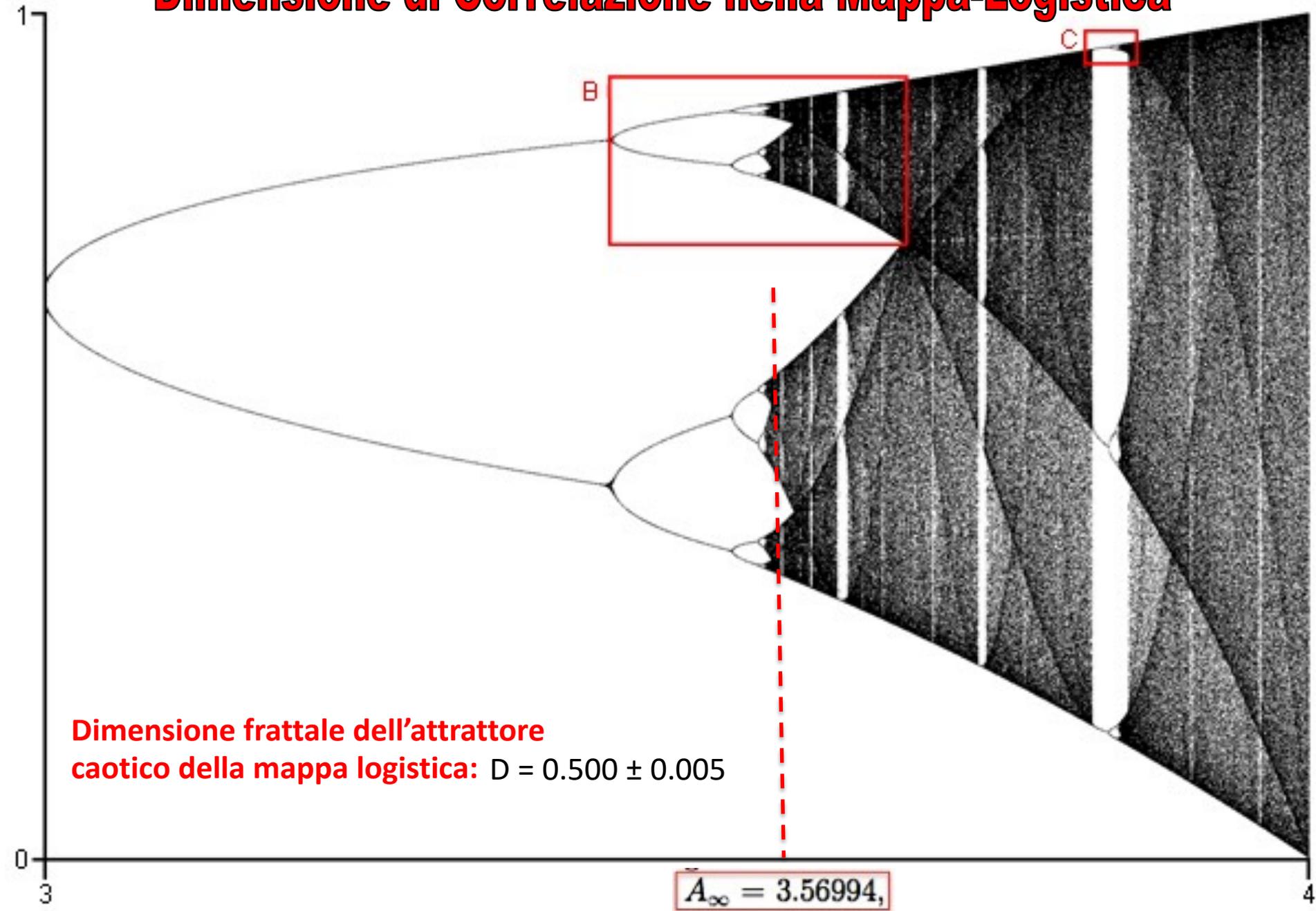
Figura 1.6: Calcolo della dimensione di correlazione del quadrato 0.1×0.1 delle condizioni iniziali.

Come si vede dal relativo slider, si é utilizzato un valore di $R - max$ inferiore a quello usato nei due casi precedenti per rimanere all'interno della regione di R in cui la curva $C(R)$ soddisfa la relazione 1.6, ossia in cui la sua pendenza rimane sufficientemente costante da permettere la valutazione dell'indice di scaling D_c (questa regione prende il nome di scaling region).

Si noterá anche che in questo caso abbiamo dovuto usare un numero maggiore di mappe rispetto ai casi precedenti, $N = 10000$ per l'esattezza, per rendere il ricoprimento del quadrato iniziale il piú uniforme possibile. Il lettore puó sperimentare da sé che usando un numero inferiore di mappe, ad esempio 5000, nelle medesime condizioni dell'esempio appena visto, si sarebbe ottenuto un indice di scaling pari a 1.866, dunque minore rispetto a prima, in quanto il ricoprimento sarebbe stato meno fitto.



Dimensione di Correlazione nella Mappa-Logistica



**Dimensione frattale dell'attrattore
caotico della mappa logistica: $D = 0.500 \pm 0.005$**

$A_\infty = 3.56994,$

Dimensione di Correlazione nella Mappa-Logistica

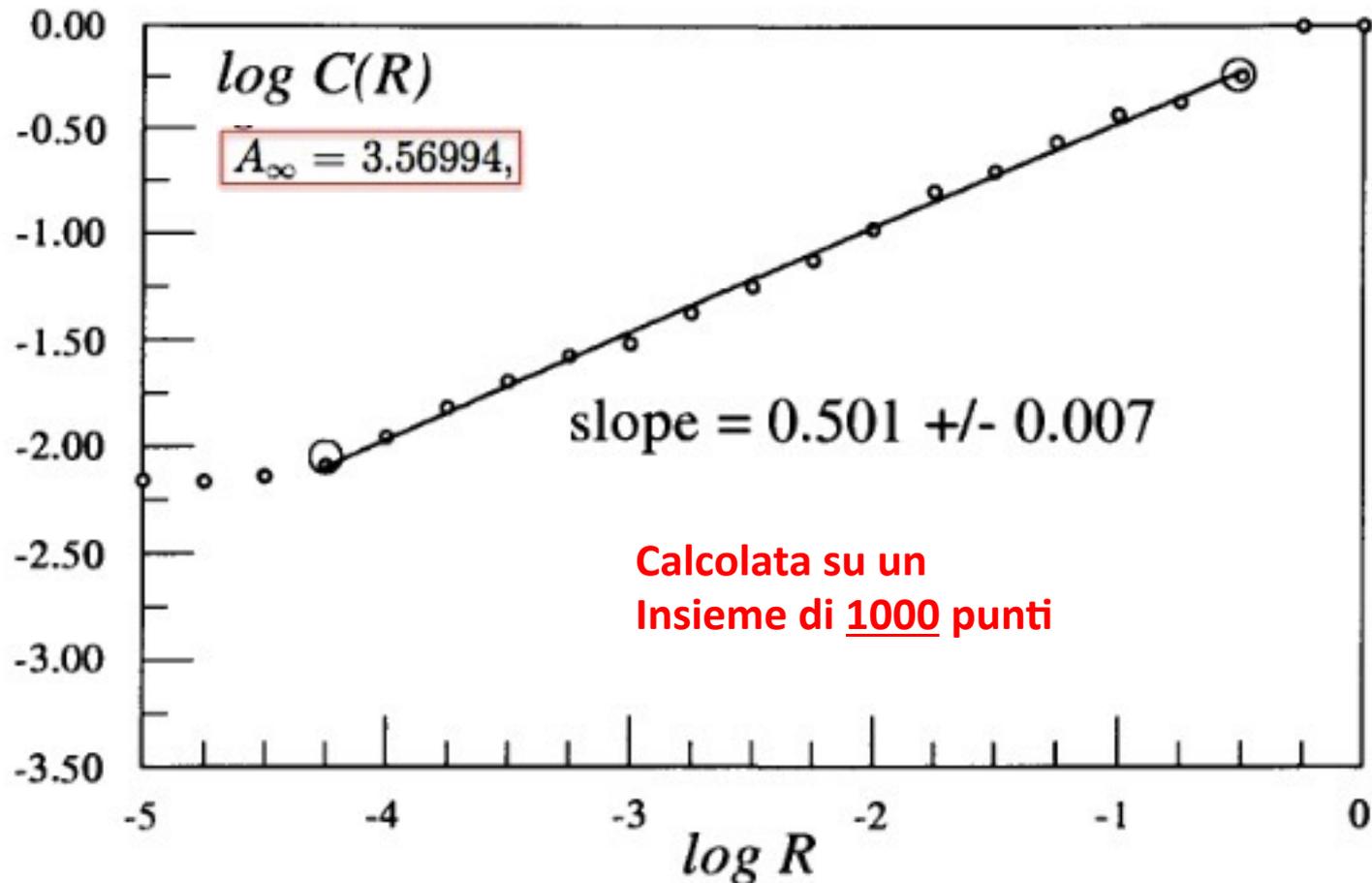


Fig. 9.10. The same calculation as shown in Fig. 9.9 but with 1,000 data points used for calculating the correlation sum. The probabilities for each value of R were averaged over 40 randomly chosen points. The effects due to the finite number of data points are pushed to smaller values of R . The slope is much closer to that found by GRP83.

Dimensione di Correlazione nella Mappa-Logistica

MAPPA DI HENON

$$x(n+1) = y(n) + 1 - C x(n)^2$$
$$y(n+1) = B x(n)$$



x



SETUP

iteration
1169

N 10000

GO

count points
2000

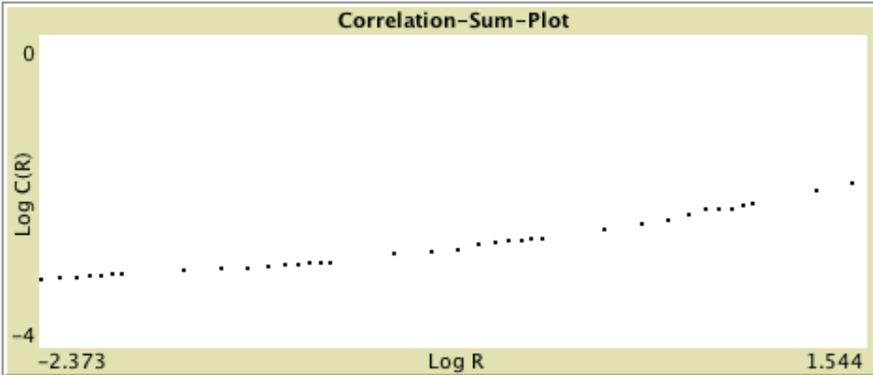
B 0.00

C 1.40

DIMENSIONE DI CORRELAZIONE

iter
36

scaling-index
0.536



R-min 0.00424

R-max 35.00

