

Classificazione dei Sistemi Dinamici

Sistemi dinamici continui (Flussi)

$$\dot{X} = f(X)$$



Flussi Dissipativi

Attrattori

1D

Punto
fisso

2D

Ciclo
Limite

3D

Caotici



Flussi Hamiltoniani

Orbite

Periodiche

Quasi
Periodiche

Caotiche

Sistemi dinamici discreti (Mappe)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$



Mappe Dissipative

Attrattori

Punto
fisso

Ciclo
Limite

Caotici



Mappe Conservative
(area-preserving)

Orbite

Periodiche

Quasi
Periodiche

Caotiche

REMINDER: La Sezione di Poincaré

For a two-dimensional state space, the Poincaré section is constructed as follows. In the two-dimensional state space, we draw a line segment that cuts through the limit cycle as shown in Fig. 3.12 (a). This line can be any line segment, but in some cases one might wish to choose the X_1 or X_2 axes. Let us call the point at which the limit cycle crosses the line segment going, say, point P .



J.H.Poincaré (1854-1912)

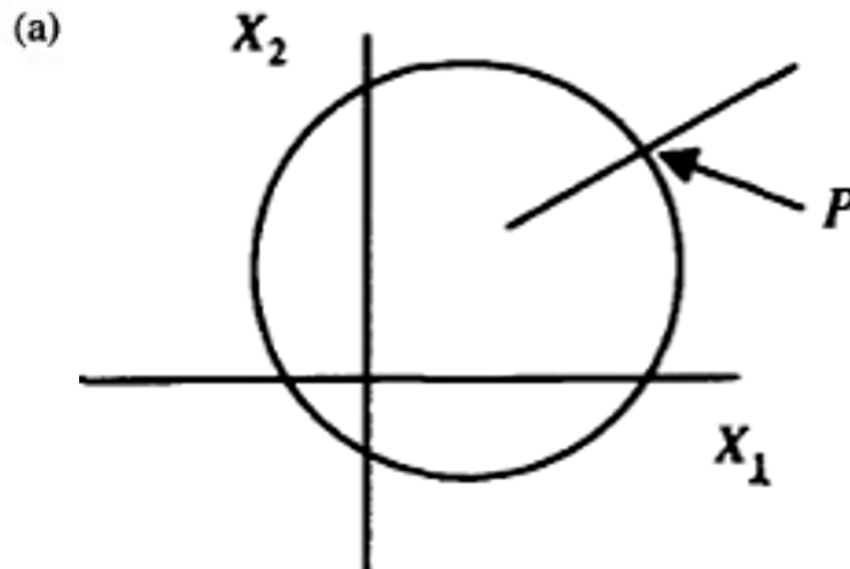


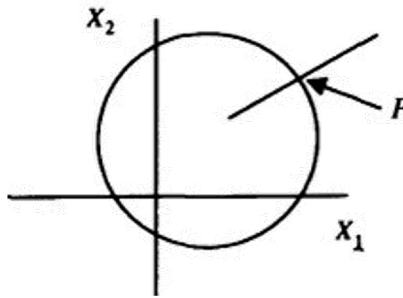
Fig. 3.12. (a) The Poincaré line segment intersects the limit cycle at point P . (b) The four possibilities for sequences of Poincaré intersection points for trajectories near a limit cycle in two dimensions.

REMINDER:
LA
MAPPA DI POINCARÉ'

$$P_{n+1} = F(P_n)$$



J.H. Poincaré (1854-1912)



How do we describe these properties quantitatively? We use what is called a Poincaré map function (or Poincaré map, for short). The essential idea is that given a point P_1 , where a trajectory crosses the Poincaré line segment, we can in principle determine the next crossing point P_2 by integrating the time-evolution equations describing the system. So, there must be some mathematical function, call it F , that relates P_1 to P_2 : $P_2 = F(P_1)$. (Of course, finding this function F is equivalent to solving the original set of equations and that may be difficult or impossible in actual practice.) In general, we may write

La Mappa di Poincaré

$$P_{n+1} = F(P_n)$$

(3.16-1)

In general the function F depends not only on the original equations describing the system, but on the choice of the Poincaré line segment as well.

To analyze the nature of the limit cycle, we can analyze the nature of the function F and its derivatives. Two points are important to notice:

1. The Poincaré section reduces the original two-dimensional problem to a one-dimensional problem.
2. The Poincaré map function states an iterative (finite-size time step) relation rather than a differential (infinitesimal time step) relation.

The last point is important because F gives P_{n+1} in terms of P_n . The time interval between these points is roughly the time to go around the limit cycle once, a relatively big jump in time. On the other hand, a one-dimensional differential equation $\dot{x} = f(x)$ tells us how x changes over an infinitesimal time interval. The function F is sometimes called an iterated map function (or iterated map, for short). (Because of the importance of iterated maps in nonlinear dynamics, we shall devote Chapter 5 to a study of their properties.)

Classificazione dei Sistemi Dinamici

Sistemi dinamici continui (Flussi)

$$\dot{X} = f(X)$$



Flussi Dissipativi

Flussi Hamiltoniani

Attrattori

Orbite

1D

Punto
fisso

2D

Ciclo
Limite

3D

Caotici

Periodiche

Quasi
Periodiche

Caotiche

Sistemi dinamici discreti (Mappe)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$



Mappe Dissipative

Mappe Conservative
(area-preserving)

Attrattori

Orbite

1D,2D

Punto
fisso

Ciclo
Limite

Caotici

Periodiche

Quasi
Periodiche

Caotiche

**Mappe dissipative
unidimensionali:
la Mappa Logistica**

La Mappa Logistica



Robert.M.May
(1936-2020)

1.1 Introduzione

In questo capitolo introdurremo il lettore allo studio di un celebre sistema dinamico unidimensionale, molto semplice ma estremamente importante: la cosiddetta mappa logistica. Il nome "mappa" sta ad indicare una classe di sistemi dinamici discreti (cioé la cui evoluzione avviene ad intervalli discreti di tempo) descritti da formule iterative, in contrapposizione ai sistemi dinamici continui (flussi) descritti da equazioni (o sistemi di equazioni) differenziali.

La mappa logistica é stata introdotta per la prima volta dal matematico Robert May in un famoso articolo apparso sulla rivista *Nature* nel 1976 [1], anche se la sua versione continua, la cosiddetta equazione logistica, era già nota da molto tempo per le sue applicazioni allo studio della crescita delle popolazioni e della 'carrying capacity' (capacità di carico) di un dato sistema. A differenza però della equazione logistica, che é rappresentata da una equazione differenziale del primo ordine facilmente integrabile, il comportamento della mappa logistica può invece essere estremamente imprevedibile. E questo, come evidenzieremo nel seguito, a dispetto del fatto che la sua evoluzione sia perfettamente deterministica.

Dall'Equazione Logistica alla Mappa Logistica

Modello di crescita

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t)$$

con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .

Invece in un ambiente la cui disponibilità di risorse è limitata si può descrivere l'evoluzione della popolazione utilizzando un coefficiente r che decresce all'aumentare della popolazione: il modello più semplice è $r(t) = a - bN(t)$ con a e b costanti. Sostituendo tale funzione nella precedente equazione differenziale si ottiene:

$$\frac{dN}{dt} = aN(t) - bN^2(t)$$

che può essere posta nella forma:

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

se $a=b$ ($K=1$)

EQUAZIONE LOGISTICA

$$\dot{N}(t) = aN(1 - N)$$

con $K = \frac{a}{b}$ che è la cosiddetta popolazione massima sostenibile ed è uguale al parametro di crescita malthusiana.

Questa è l'equazione logistica di Verhulst.

K = capacità di carico

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{N} + \frac{b}{a - bN} \right) dN(t) = \int dt$$

risolvendo gli integrali, scegliendo come primitive quelle tali che $N(t_0) = N_0$ e utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene la soluzione:

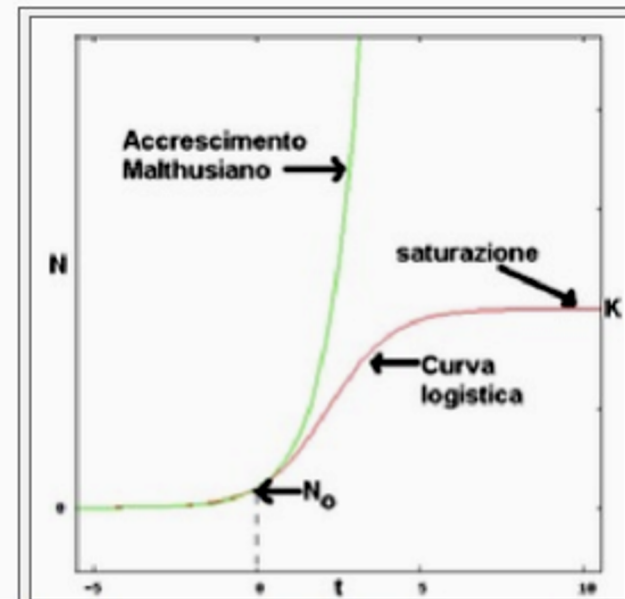
$$N(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{N_0} - 1\right)e^{-a(t-t_0)}}$$

**SOLUZIONE ANALITICA DELL'EQ.LOGISTICA
(SIGMOIDE CON SATURAZIONE A K)**

Si nota che a causa del sovraccollimento la popolazione non cresce più in maniera esponenziale ma converge al valore asintotico k indipendentemente da N_0 .



P.F.Verhulst (1804-1849)



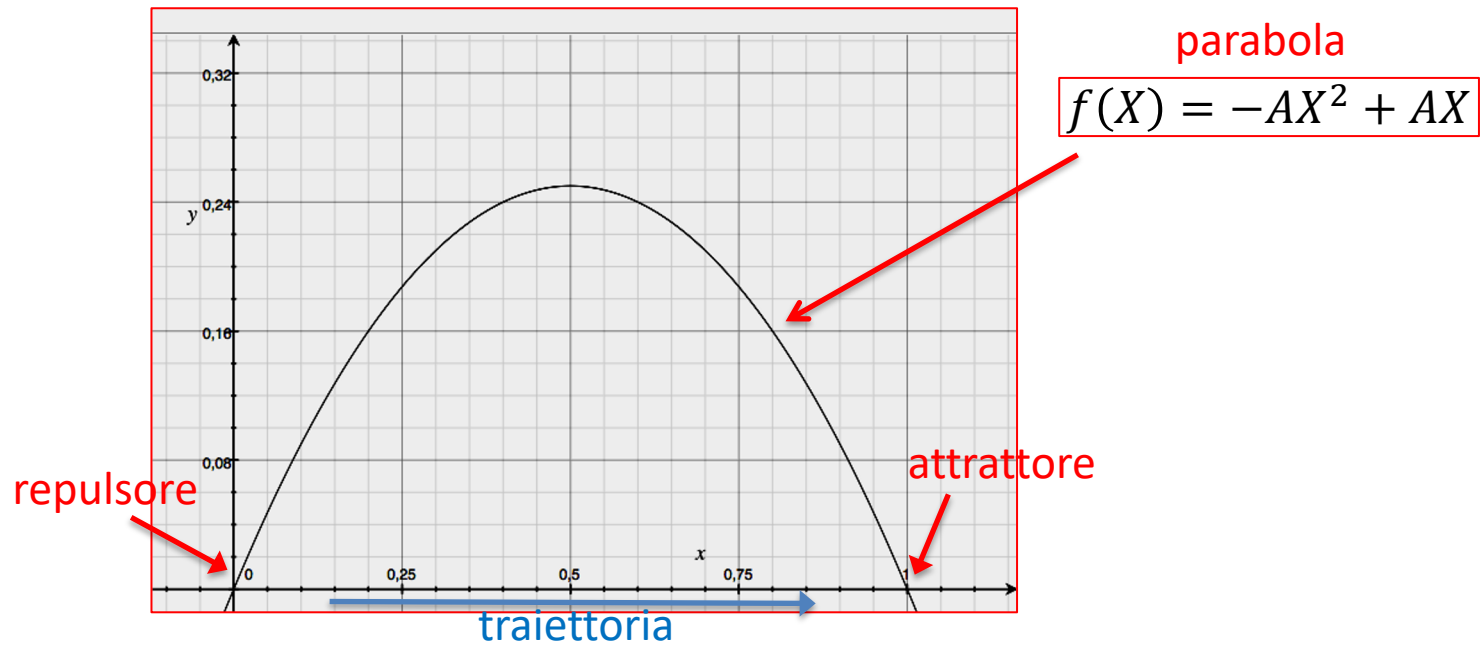
Confronto tra curva logistica e curva di accrescimento esponenziale (malthusiano). I parametri sono: $k = 10, N_0 = 1, r = 1$

Dall'Equazione Logistica alla Mappa Logistica

Exercise 3.8-3. The logistic differential equation. The following differential equation has a “force” term that is identical to the logistic map function introduced in Chapter 1

$$\dot{X} = AX(1 - X) \quad A \in [0,1]$$

- (a) Find the fixed points for this differential equation.
(b) Determine the characteristic value and type of each of the fixed points.



- $X_0=0$ è un punto fisso repulsivo (instabile)
→ $X_0=1$ è un punto fisso attrattivo (stabile)

L'equazione che caratterizza la mappa logistica é la seguente:

Mappa Logistica

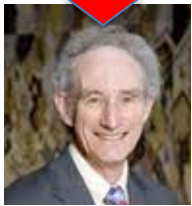
$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n) \quad (1.1)$$

dove A é un parametro di controllo (fissato) ed x_n il valore della variabile reale x (con $x \in [0, 1]$) all' n -esima iterazione. L'equazione 1.1 appartiene alla piú generale classe delle mappe iterate unidimensionali descritte da formule del tipo: $x_{n+1} = f(x_n)$, le cui peculiaritá matematiche hanno giocato un ruolo fondamentale nello sviluppo della teoria del caos. La mappa logistica rientra inoltre in quell'importante sottoinsieme di mappe chiamate unimodali, cioé descritte da funzioni $f(x)$ continue, differenziabili e con un unico massimo nel loro intervallo di definizione ($[0, 1]$ per la mappa logistica). Per inciso, il valore della coordinata x del massimo viene chiamato punto critico. Nel caso della mappa logistica la $f(x) = -Ax^2 + Ax$ é una parabola con la concavitá rivolta verso il basso, passante per i punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$ e con il vertice nel punto di coordinate $(1/2, A/4)$.



J.H.Poincaré

1889

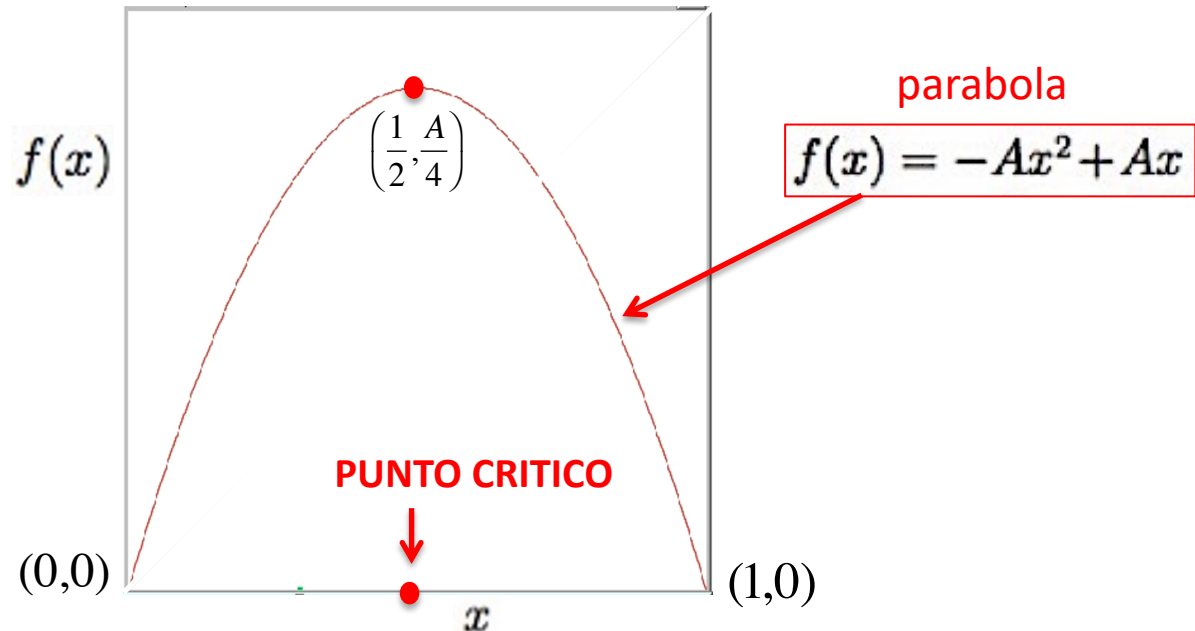


R.M.May

1976

x_n é un numero compreso tra 0 e 1, e rappresenta il rapporto tra la popolazione esistente e quella massima possibile nell'anno n -esimo, e quindi x_0 rappresenta il rapporto tra la popolazione iniziale (all'anno 0) e quella massima;

A é un numero positivo e rappresenta il tasso combinato tra la riproduzione e la mortalità.



Questo ci dice subito che il punto critico della mappa logistica si trova a $x_c = 0.5$, mentre la coordinata $f(x_c)$ del vertice é regolata dal parametro di controllo A , che dunque (dovendo essere, in generale, $f(x) \in [0, 1]$) dovrà essere compreso tra 0 e 4. Anticipiamo che é proprio la nonlinearitá di tipo quadratico a far si che per certi valori del parametro di controllo il comportamento della mappa logistica diventi molto irregolare. Per questi valori di A la mappa presenta inoltre una estrema sensibilitá alle condizioni iniziali: come vedremo meglio piú avanti, due traiettorie che differiscono inizialmente di una piccola quantitá ϵ_0 si allontanano in maniera esponenziale, ovvero al tempo t la loro distanza sará

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{\lambda t}, \quad (1.2)$$

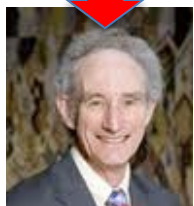
dove λ rappresenta il rate di divergenza, meglio noto come esponente di Lyapunov.

Produce una sorta di "stretching and folding" che, per certi valori di A , genererà un attrattore caotico



J.H.Poincaré

1889

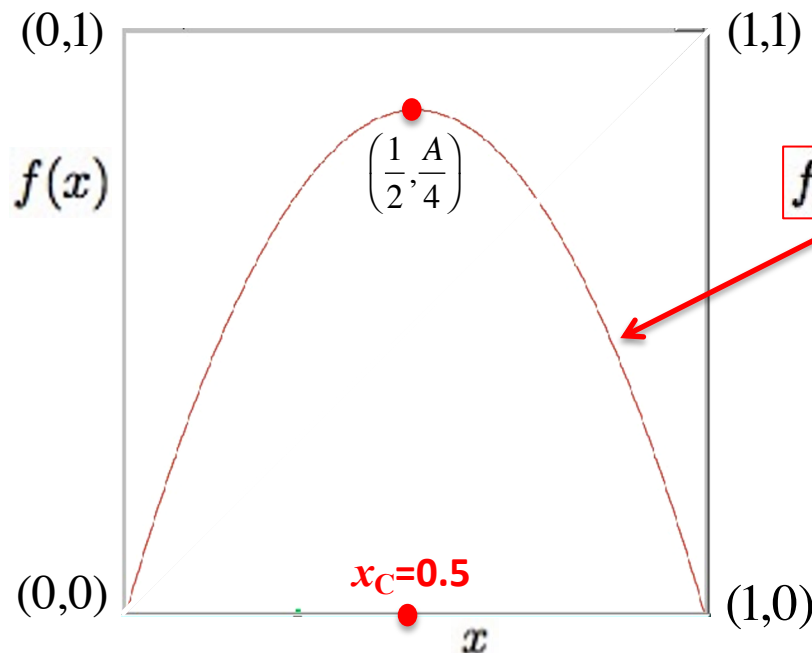


R.M.May

1976

x_n è un numero compreso tra 0 e 1, e rappresenta il rapporto tra la popolazione esistente e quella massima possibile nell'anno n -esimo, e quindi x_0 rappresenta il rapporto tra la popolazione iniziale (all'anno 0) e quella massima;

A è un numero positivo e rappresenta il tasso combinato tra la riproduzione e la mortalità.



parabola

$$f(x) = -Ax^2 + Ax$$

1.2 Evoluzione dinamica ed Attrattori

É utile rappresentare l'evoluzione della mappa logistica all'interno di un diagramma di iterazione (vedi Fig. 1.1) che riporta in ascissa il valore x_n e in ordinata il valore x_{n+1} ottenuto trasformando x_n per mezzo dell'equazione 1.1: in pratica si inizia scegliendo un valore di partenza x_0 (compreso tra 0 e 1) sull'asse x_n e lo si proietta dapprima verticalmente sulla parabola corrispondente al secondo membro della 1.1, individuando così il punto x_1 sull'asse x_{n+1} , dopodiché lo si riporta orizzontalmente sulla bisettrice $x_{n+1} = x_n$ (che equivale a riportare il punto x_1 sull'asse x_n) e si ripete il procedimento con l'iterazione successiva. In altri termini lo schema iterativo é il seguente:

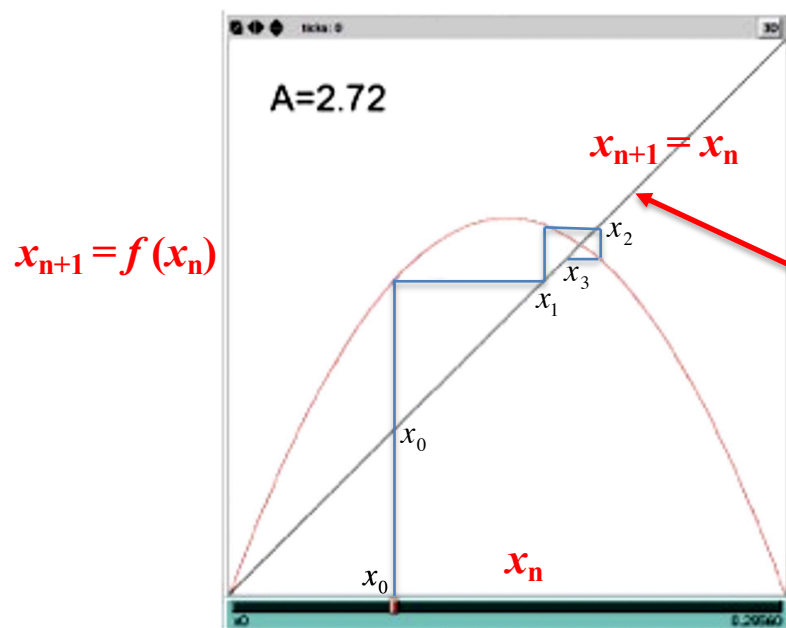
$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n) \quad (1.1)$$

$$x_1 = Ax_0(1 - x_0)$$

$$x_2 = Ax_1(1 - x_1)$$

$$x_3 = Ax_2(1 - x_2)$$

·
·



Possiamo considerare la bisettrice come se fosse l'intervallo $[0,1]$ di definizione (ossia lo spazio degli stati) della mappa logistica!

Figura 1.1: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per $A = 2.72$: siamo in regime di punto fisso (vedi testo).

Mediante successive applicazioni della funzione della mappa esso genera una successione di valori reali compresi nell'intervallo $[0, 1]$ chiamata **traiettoria** o **orbita**. Nel diagramma di iterazione mostrato nel pannello a sinistra della Fig. 1.1 questa procedura é stata eseguita fissando $x_0 = 0.2956$ come condizione iniziale e scegliendo $A = 2.72$ come valore del parametro di controllo. Nel pannello di destra della stessa figura é stato riportato anche il corrispondente plot che mostra l'andamento della variabile x in funzione del numero di iterazioni. Notiamo subito che la traiettoria della mappa converge rapidamente al valore 0.632: in questo caso si dice che la dinamica ha raggiunto un **attrattore a punto fisso**.

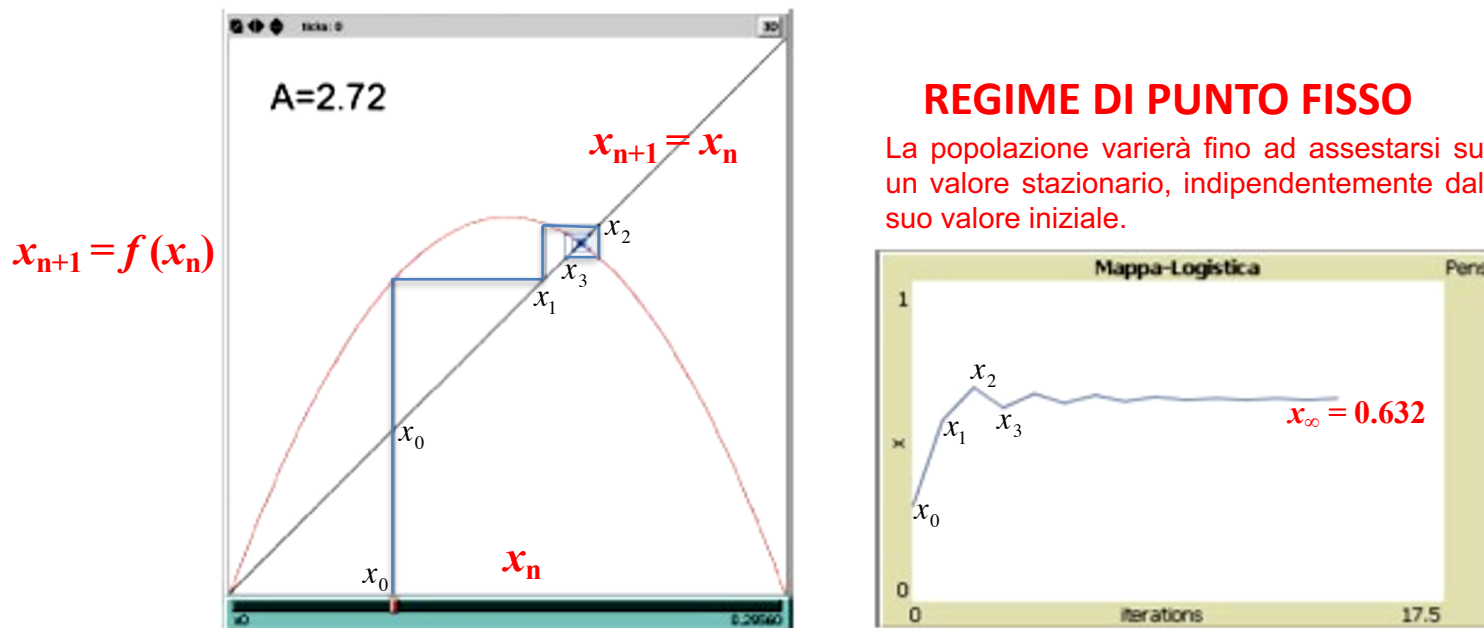


Figura 1.1: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per $A = 2.72$: siamo in regime di punto fisso (vedi testo).



Mappa-Logistica.nlogo

Interface Info Code

Edit Delete Add | normal speed view updates ticks: continuous

MAPPA LOGISTICA: $x(n+1) = A x(n) [1 - x(n)]$

CLEAR On Off PLOT-SECOND-ITERATE

n 19 SETUP

x0 0.29560

NEW-INITIAL-CONDITION

GO G x(n) 0.632

A 2.7200

0 < A < 3 punto-fisso
3 < A < 3.56994 period-doubling
3.56 < A < 4 caos

Mappa-Logistica

iterations 22.5

BIFURCATION

starting-A 0.0100 final-A 4.0000

Diagramma-di-Biforcazione

Il concetto di "attrattore" é tipico dei sistemi dissipativi (in opposizione a quelli cosiddetti **conservativi**, di cui ci occuperemo piú avanti) e riguarda il comportamento asintotico della loro evoluzione dinamica, che in questa categoria di sistemi - ai quali appartiene appunto la mappa logistica - risulta essere indipendente dalle condizioni iniziali (in generale, pensando ad un sistema fisico viscoso o comunque in grado di dissipare energia, é abbastanza intuitivo convincersi che esso, prima o poi, finirá per assestarsi su uno stato finale indipendente da quello di partenza). Essendo la mappa logistica un sistema ad un solo grado di libertá (poiché é solo una la variabile indipendente necessaria per specificarne lo stato dinamico), i suoi attrattori 'vivranno' in uno spazio delle fasi unidimensionale.

Da un punto di vista matematico si dice che x^* é un punto fisso per la mappa $f(x)$ se esso soddisfa l'equazione:

$$x^* = f(x^*). \quad (1.3)$$

Le soluzioni dell'equazione di punto fisso corrispondono ai punti di intersezione della parabola con la bisettrice $f(x) = x$

REGIME DI PUNTO FISSO

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$

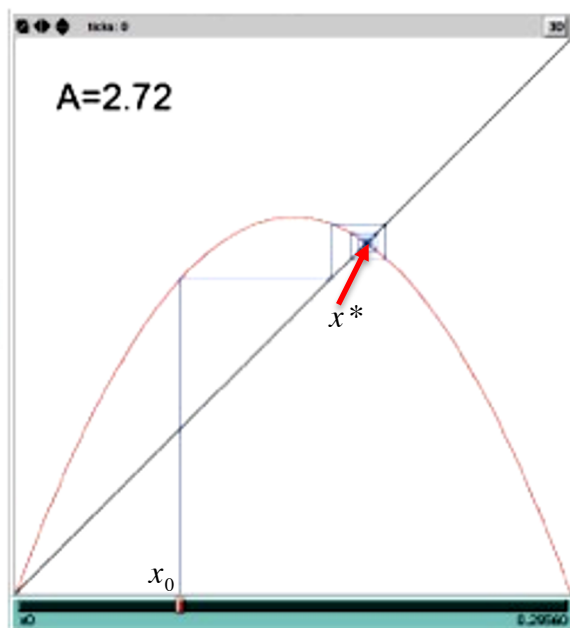


Figura 1.1: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per $A = 2.72$: siamo in regime di punto fisso (vedi testo).

In questo caso l'applicazione ripetuta della funzione f al valore x^* continua a produrre sempre lo stesso valore. In generale una data mappa può avere più di un punto fisso in corrispondenza di un certo valore del parametro di controllo: ad esempio, se imponiamo la relazione 1.3 alla mappa logistica, otteniamo una equazione di secondo grado le cui soluzioni restituiscono i due punti fissi $x^* = 0$ e $x^* = 1 - 1/A$, che corrispondono ai punti di intersezione della parabola del diagramma di iterazione con la bisettrice. Per $A = 2.72$, otteniamo dunque $x^* = 1 - 1/A = 0.632$, che è proprio il valore verso il quale converge la traiettoria della mappa mostrata in Fig.1.1. Al lettore curioso, però, verrà spontaneo domandarsi perché la mappa non converga all'altro punto fisso, $x^* = 0$, situato nell'origine del diagramma di iterazione.

$$x^* = f(x^*). \quad (1.3)$$

$$x^* = Ax^*(1 - x^*) \rightarrow A(x^*)^2 - Ax^* + x^* = 0$$

$$\rightarrow A(x^*)^2 - (A - 1)x^* = 0 \rightarrow x^*(Ax^* - A + 1) = 0$$

2 punti fissi $\rightarrow x^* = 0$
 $\rightarrow x^* = 1 - 1/A$ (non esiste per $A < 1$)

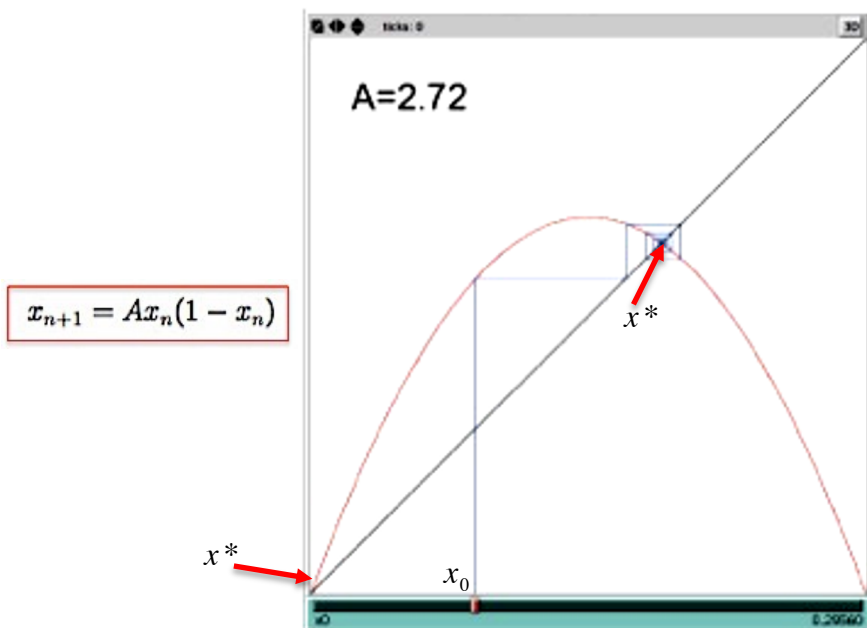


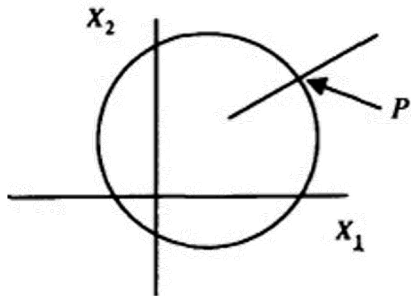
Figura 1.1: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per $A = 2.72$: siamo in regime di punto fisso (vedi testo).

**REMINDER:
STABILITA' DEI
PUNTI FISSI NELLA
MAPPA DI POINCARÉ'**

$$P_{n+1} = F(P_n)$$



J.H. Poincaré (1854-1912)



Let us note that the point P on the limit cycle satisfies $P = F(P)$. Any point P^* that satisfies $P^* = F(P^*)$ is called a fixed point of the map function. If a trajectory crosses the line segment exactly at P^* , it returns to P^* on every cycle. In analogy with our discussion of fixed points for differential equations, we can ask what happens to a point P_1 close to P^* . In particular, we ask what happens to the distance between P_1 and P^* as the system evolves. Formally, we look at

$$P_2 - P^* = F(P_1) - F(P^*) \tag{3.16-2}$$

and use a Taylor series expansion about the point P^* to write

$$P_2 - P^* = F(P^*) + \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} (P_1 - P^*) + \dots - F(P^*) \tag{3.16-3}$$

If we define $d_i = (P_i - P^*)$, we see that

$$d_2 = \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} d_1 \tag{3.16-4}$$

We now define the characteristic multiplier M for the Poincaré map:

$M < 1$ **STABILE**
 $M > 1$ **INSTABILE**

$$M = \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} \quad \text{(~~M > 0~~)} \tag{3.16-5}$$

M is also called the *Floquet multiplier* or the *Lyapunov multiplier*. In terms of M , we can write Eq. (3.16-4)

$$d_2 = M d_1 \tag{3.16-6}$$

We find in general

$$d_{n+1} = M^n d_1 \tag{3.16-7}$$

La risposta é che, per $A = 2.72$, $x^* = 0.632$ é un punto fisso attrattivo (stabile) mentre $x^* = 0$ é un punto fisso repulsivo (instabile).

Questo risultato deriva da considerazioni analitiche legate alla cosiddetta *analisi di stabilit  lineare*, la quale permette di giungere alla seguente conclusione circa la stabilit  dei punti fissi di una mappa unidimensionale:

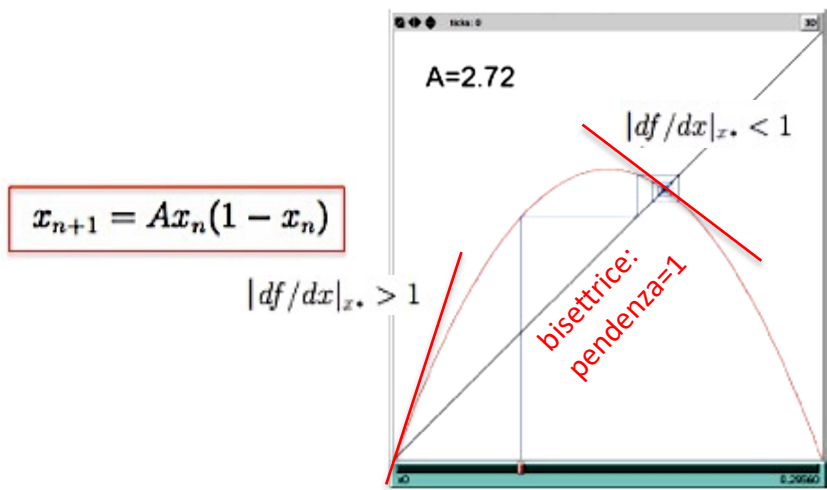
- x^* é un punto fisso attrattivo (stabile) se $|df/dx|_{x^*} < 1$
- x^* é un punto fisso repulsivo (instabile) se $|df/dx|_{x^*} > 1$

essendo $df/dx|_*$ la derivata della funzione $f(x)$ che descrive la mappa, calcolata in corrispondenza del punto fisso in questione. Se calcoliamo questa derivata nel caso della mappa logistica in corrispondenza dei suoi due punti fissi, avremo:

characteristic multiplier $df/dx|_{x^*=0} = A$ ($f(x) = Ax - Ax^2 \rightarrow \frac{df}{dx} = A - 2Ax$)
 multiplier $df/dx|_{x^*=1-1/A} = 2 - A$

da cui risulter  che il punto $x^* = 0$ é attrattivo (a partire da qualunque condizione iniziale) per $A < 1$ ed é repulsivo per $A > 1$, mentre, viceversa, il punto $x^* = 1 - 1/A$ é attrattivo per $1 < A < 3$ (non esistendo per $A < 1$).

NOTA: $df/dx < 0 \rightarrow 2 < A < 3$ oscillazioni attorno al punto fisso... $d_{n+1} = M^n d_1$



→ In questo caso il punto fisso «off origine» della mappa é l'equivalente unidimensionale dello spiral node nei flussi dissipativi 2D



Attrattori a ciclo limite della mappa logistica per $A > 3$

Il comportamento della mappa logistica si fa invece piú interessante non appena il parametro di controllo A diventa maggiore di 3. Infatti, per valori appena superiori a 3, i punti fissi visti in precedenza perdono la loro stabilit  e la traiettoria si stabilizza rapidamente in una oscillazione tra due valori (entrambi stabili) x^*_1 e x^*_2 che soddisfano le equazioni accoppiate:

$$\begin{cases} x^*_2 = f(x^*_1) \\ x^*_1 = f(x^*_2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Non sono punti fissi della mappa logistica.} \\ \text{E' possibile ricavare analiticamente questi valori?} \end{array}$$

Seconda iterata della mappa logistica

To describe what happens at $A = 3$, we introduce what is called the *second-iterate of f* . The second-iterate of the map function is defined to be

$$f^{(2)}(x) \equiv f(f(x)) \quad (5.4-3)$$

that is, the second-iterate of f is what we get by applying the function f twice, first to the value of x , then to the result of the first application. (We will use the parentheses around the superscript to remind us that we are concerned with the second-iterate, not the square of the function.) The two-cycle points x^*_1 and x^*_2 are fixed points of the second-iterate function:

$$\begin{cases} x^*_1 = f^{(2)}(x^*_1) \\ x^*_2 = f^{(2)}(x^*_2) \end{cases} \quad (5.4-4)$$

Thus, we conclude that for A just greater than 3, these two fixed points of the second-iterate function become stable fixed points.

$$x_1 = Ax_0(1 - x_0)$$

$$x_2 = Ax_1(1 - x_1)$$

SECONDA ITERATA DELLA MAPPA LOGISTICA

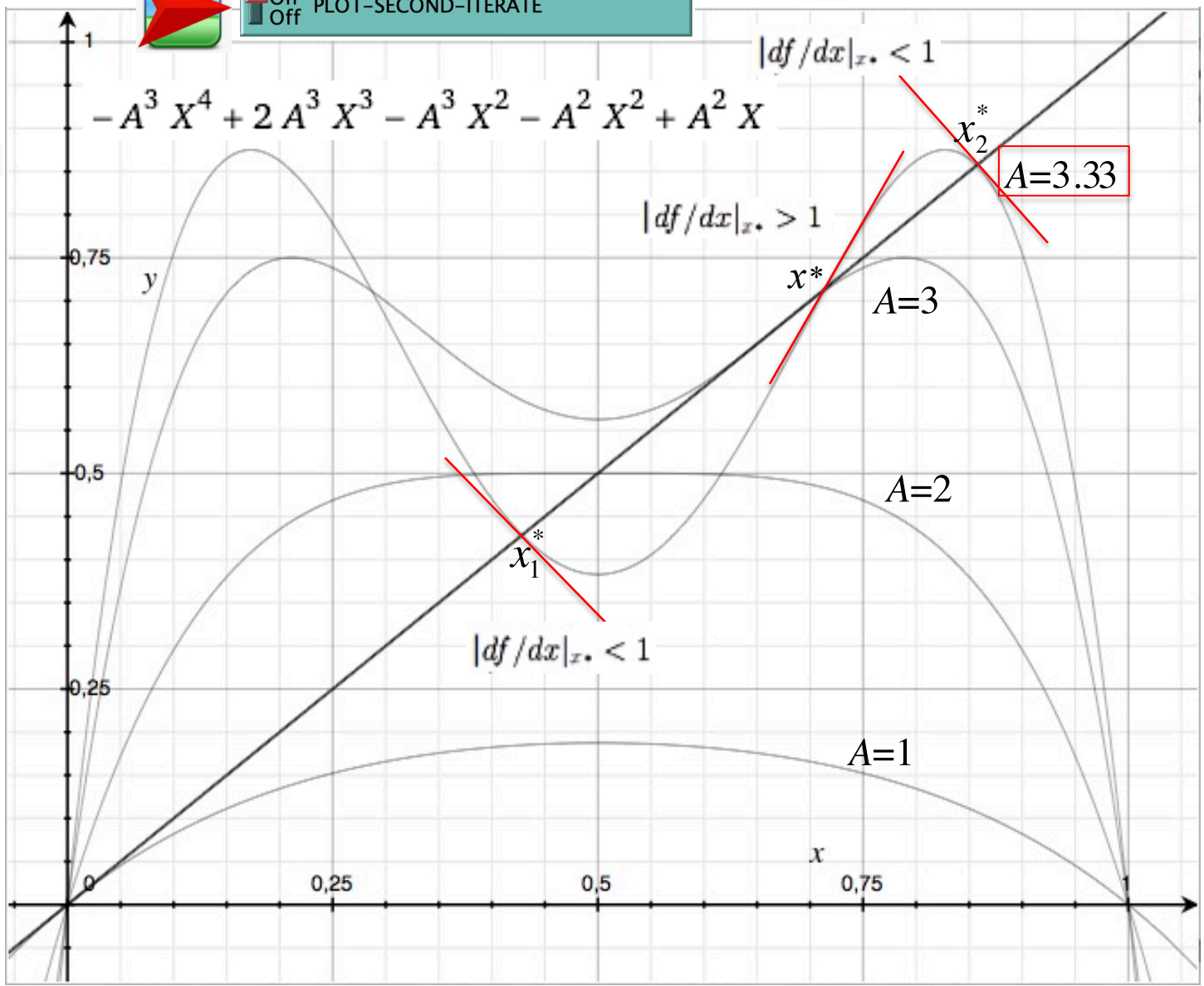
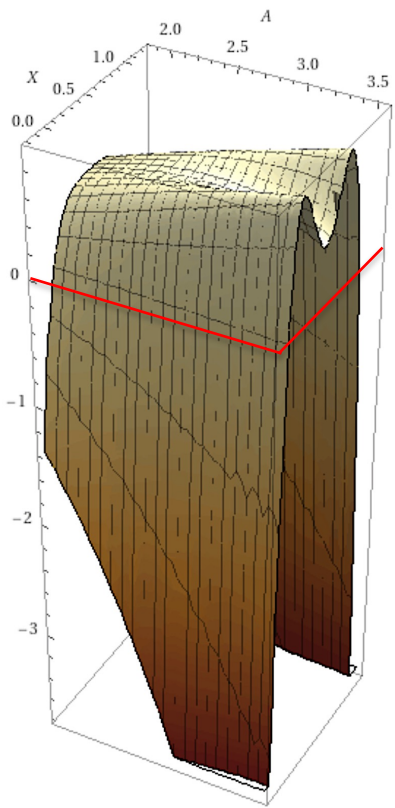
$$y = Ax - Ax^2 \rightarrow y = A(Ax - Ax^2) - A(Ax - Ax^2)^2$$

$$\begin{cases} x_1^* = f^{(2)}(x_1^*) \\ x_2^* = f^{(2)}(x_2^*) \end{cases}$$



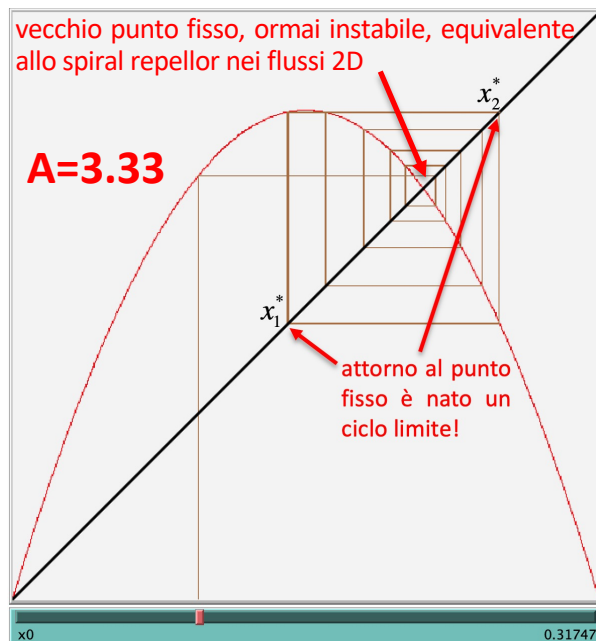
On
 Off PLOT-SECOND-ITERATE

WolframAlpha
3D plot



In questo caso si dice che l'attrattore della dinamica é diventato un ciclo limite di periodo 2. Nelle immagini di Fig.1.2 vediamo il comportamento della mappa per $A = 3.33$: si vede chiaramente che, partita ancora una volta dal valore $x_0 = 0.2956$, la variabile x , dopo essersi inizialmente diretta verso il valore $x = 1 - 1/A = 0.699$ (ex-punto fisso attrattivo, ora diventato instabile), se ne allontana subito rapidamente e finisce per oscillare - dopo una ventina di iterazioni - tra i due valori 0.471 e 0.83, che rappresentano un ciclo limite di periodo 2.

Aumentando ancora il valore di A la traiettoria della mappa logistica subisce una serie di biforcazioni successive chiamate raddoppiamenti di periodo, ossia resta intrappolata in cicli limite di periodo crescente corrispondenti ad orbite che diventano instabili nel momento in cui danno luogo ad una nuova generazione di orbite.



REGIME DEI RADDOPPIAMENTI DI PERIODO (CICLI LIMITE)

Indipendentemente dal suo valore iniziale, la popolazione arriverà ad oscillare indefinitamente tra due valori, poi tra quattro, etc...

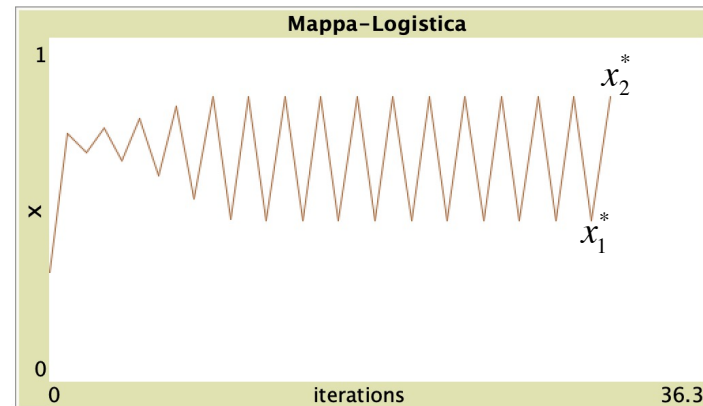


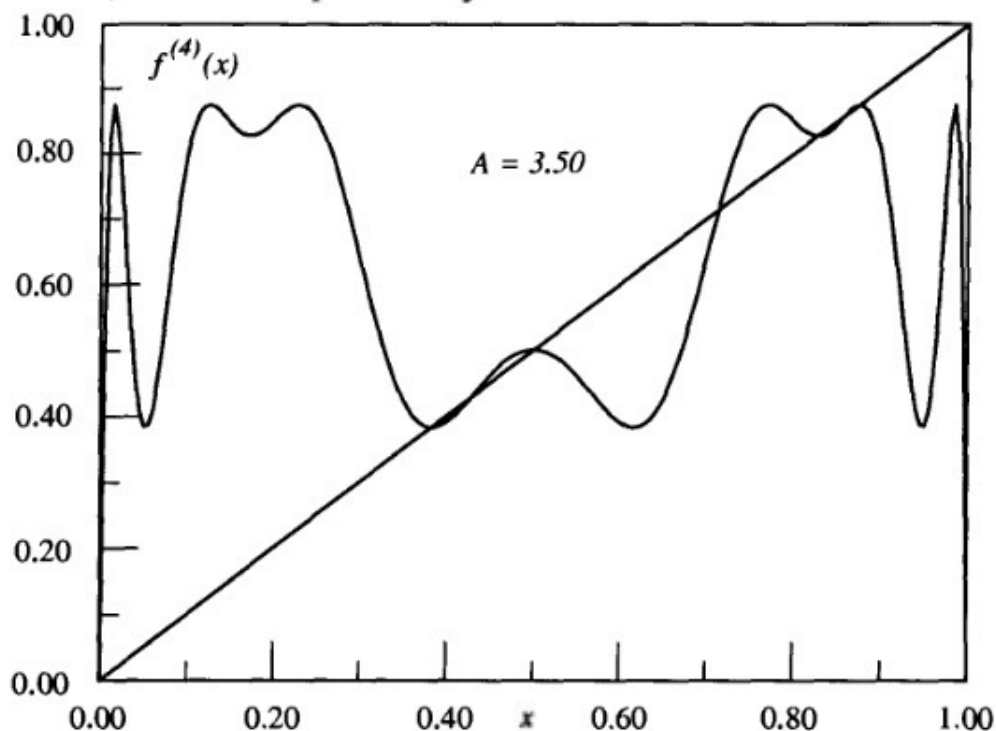
Figura 1.2: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per $A = 3.33$: siamo qui nel regime dei raddoppiamenti di periodo (vedi testo).

Before continuing our discussion, we would like to make a few remarks about fixed points and how to extend these notions to higher-order iterates. First, we point out that the n th iterate of $f(x)$ is defined as the function that results from applying f n -times:

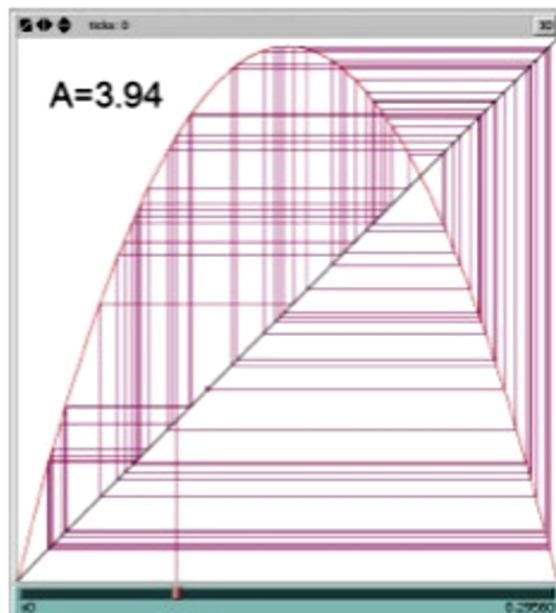
$$f^{(n)}(x) = f(f(f(\dots f(x))) \quad (5.4-7)$$

with n f s on the right-hand-side. A moment's reflection should convince you that a fixed point of $f(x)$ is also a fixed point of $f^{(n)}$, but that the converse is not always true. Furthermore, if x^* is a stable fixed point of $f(x)$, it is also a stable fixed point of $f^{(n)}$. Again, the converse is not always true.

Fig. 5.7. A graph of the fourth-iterate of the logistic map function for $A = 3.50$ just greater than the value A_4 at which the period-4 cycle becomes stable.

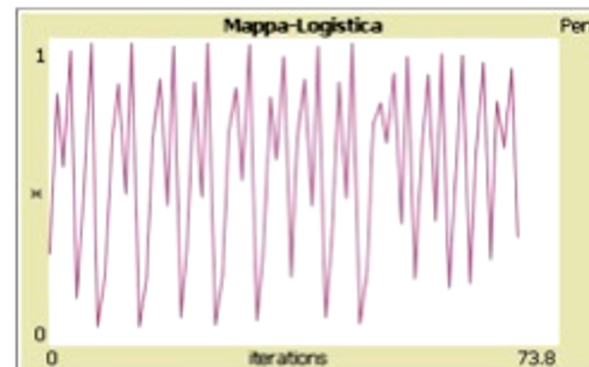


In Fig.1.3 é infine mostrato il comportamento della mappa logistica per $A = 3.94$. Quí il fenomeno del raddoppiamento di periodo ha definitivamente lasciato il posto ad una dinamica completamente irregolare che vede la variabile x continuare ad assumere valori sempre diversi senza mai convergere né a punti fissi né a cicli limite: siamo in presenza di un nuovo tipo di attrattore per la mappa logistica, cioè di un **attrattore caotico**. Al fine di ottenere un comportamento caotico risulta molto importante, come si era già anticipato in apertura, l'esistenza di un massimo nella funzione di tipo parabolico che descrive la mappa logistica: questo infatti fa sí che due punti distinti alla iterazione n –esima, ad esempio x'_n ed x''_n , possano confluire nello stesso punto x'_{n+1} alla iterazione successiva (cioé $x'_{n+1} = f(x'_n) = f(x''_n)$) il che sottopone i punti dell'insieme $[0, 1]$ ad un processo di **stiramento e piegatura** (conosciuto come "stretching and folding") che favorisce la transizione verso il regime caotico.



REGIME CAOTICO

Indipendentemente dal suo valore iniziale, la popolazione comincerà a variare in maniera assolutamente imprevedibile...



v. Mappa a «ferro di cavallo» di Smale



Figura 1.3: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per $A = 3.94$: siamo in pieno regime caotico (vedi testo).

Il quadro appena descritto é riassunto nel cosiddetto diagramma di biforcazione della mappa logistica, mostrato in Fig.1.4. Esso riporta i valori di x corrispondenti agli attrattori della dinamica (quindi indipendenti dalle condizioni iniziali) in funzione del parametro di controllo $1 < A < 4$ (per $0 < A < 1$ l'unica intersezione della parabola con la bisettrice é il punto fisso stabile $x = 0$, dunque tutte le traiettorie convergono banalmente ad esso). Ogni linea verticale che taglia il diagramma in corrispondenza di un dato valore di A rappresenta lo spazio delle fasi unidimensionale della mappa logistica e i punti di intersezione di questa linea con il diagramma rappresentano l'attrattore che si osserva per quel valore di A . Da quanto appena detto si vede subito che il regime di "punto fisso" domina per $1.0 < A < 3.0$, mentre nella regione $3.0 < A < 3.56994$ si assiste alla già descritta sequenza di biforcazioni successive finché, superato il valore limite $A_\infty = 3.56994$, detto anche 'punto di accumulazione della sequenza dei raddoppiamenti di periodo', si entra nella zona fortemente caotica.

EDGE
OF
CHAOS

DIAGRAMMA
DI
BIFORCAZIONE

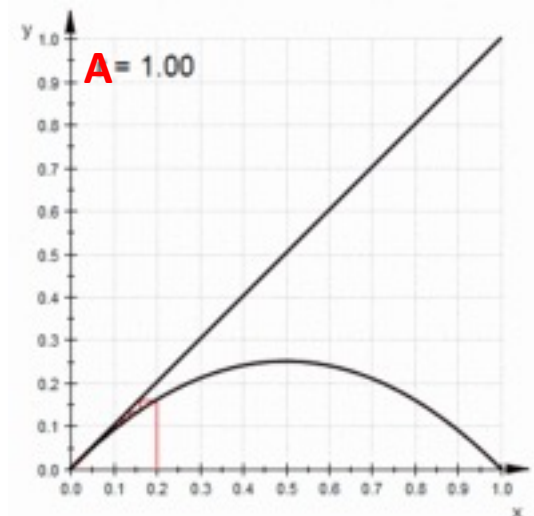
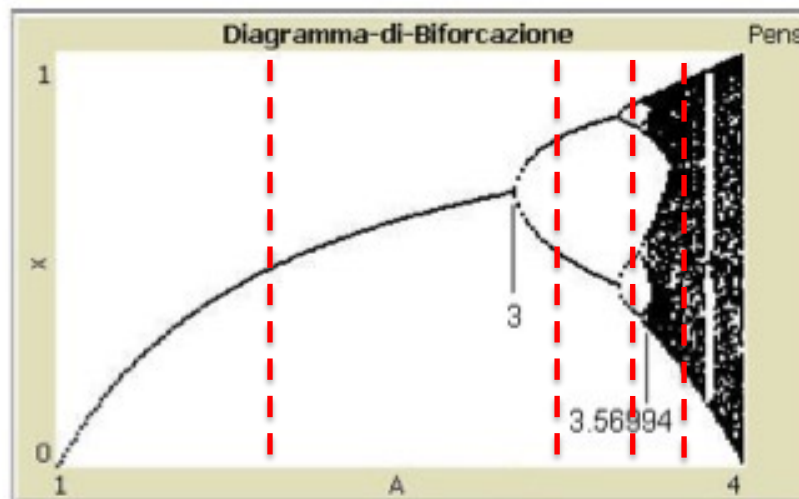


Figura 1.4: Diagramma di biforcazione della mappa logistica per valori del parametro di controllo A compresi tra 1.0 e 4.0 .

Nel 1978 Mitchell Feigenbaum [3, 4] scoprì che, definendo con A_n il valore in corrispondenza del quale il periodo 2^{n-1} lascia il posto al periodo 2^n , il rapporto

$$\delta_n = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n} \quad (1.4)$$

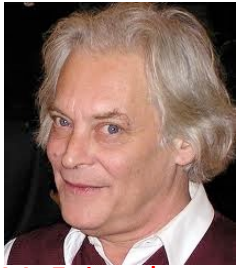
resta approssimativamente costante per tutti i valori di n e, cosa ancora più significativa, per n molto grandi tende ad un numero δ che risulta essere lo stesso per tutte le mappe iterative che soddisfano certe proprietà matematiche generali intorno ai massimi delle funzioni che le descrivono. Si tratta della prima delle due famose costanti universali di Feigenbaum, e cioè

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4.6692\dots, \quad (1.5)$$

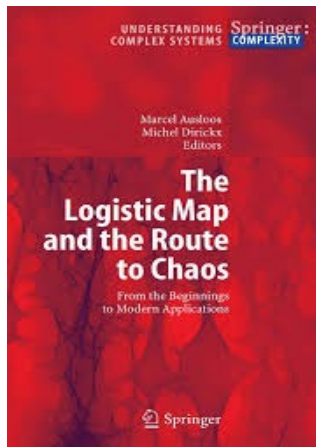
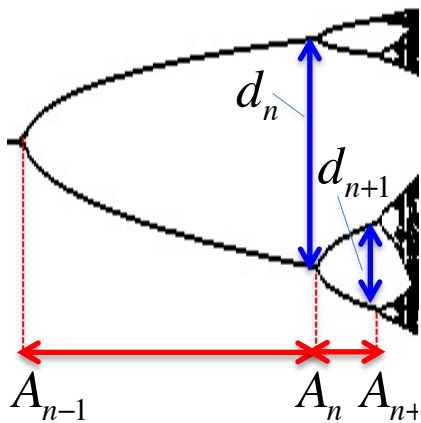
laddove la seconda descrive invece il rapporto tra le "size" d_n di periodi successivi:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = 2.5029\dots \quad (1.6)$$

Nel 1983 Hu e Satija [5] dimostrarono che le mappe descritte da funzioni del tipo $f(x) = 1 - a|x|^z$ possono essere raggruppate in classi di universalità determinate dall'esponente z . La mappa logistica appartiene alla classe delle mappe quadratiche, per le quali $z = 2$ e - come abbiamo appena visto - $\alpha = 2.502\dots$ e $\delta = 4.669\dots$. Al crescere di z , invece, α sembra decrescere asintoticamente verso il valore 1.27 mentre δ cresce linearmente (dunque, per essere precisi, α e δ saranno effettivamente 'costanti' solo all'interno di una data classe di universalità). In realtà fu proprio la scoperta dell'universalità di queste costanti coinvolte nel fenomeno del raddoppiamento di periodo, un fenomeno molto importante proprio perché definisce una delle cosiddette 'rotte verso il caos', a convincere gli scienziati della grande importanza ed utilità della dinamica non-lineare e delle sue applicazioni.



M. Feigenbaum
(1944)



1.4 Il Regime Caotico: l'esponente di Lyapunov

Vediamo adesso di focalizzare la nostra attenzione sul regime caotico della mappa logistica. In Fig.1.11 vediamo un ingrandimento della porzione del diagramma di biforcazione di Fig.1.4 corrispondente appunto al regime caotico, ottenibile impostando gli sliders **starting-A** e **final-A** rispettivamente sui valori $A = 3.56$ e $A = 4.00$. A questo proposito può essere utile ricordare che, qualora si presenti la necessità di selezionare un dato valore in uno slider con una precisione di diverse cifre decimali, è possibile inserire questo valore direttamente nell'apposito campo della finestra di dialogo dello slider (tasto destro sullo slider, menù **Edit**, campo **Value** in basso a sinistra) evitando così di doverlo individuare manualmente con il cursore.

Osservando attentamente la Fig.1.11 notiamo che, al crescere di A , alle zone caotiche si alternano delle circoscritte finestre di regolarità, in cui le traiettorie tornano ad essere confinate all'interno di attrattori a ciclo limite.

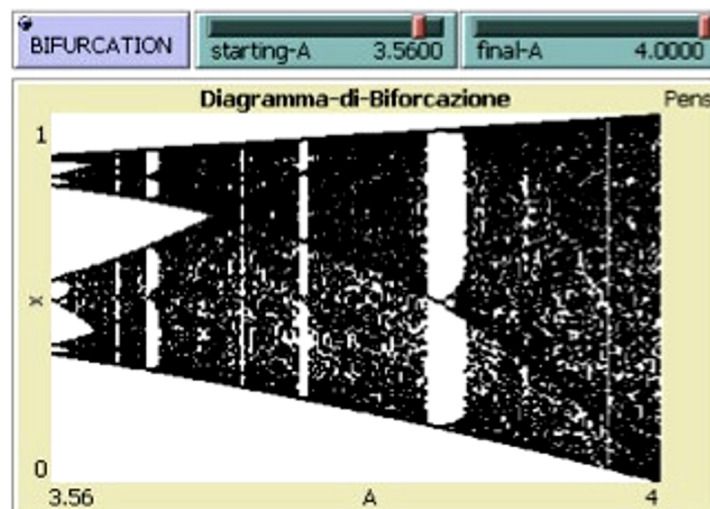


Figura 1.11: Ingrandimento della regione caotica ($3.56 < A < 4.00$) del Diagramma di Biforcazione della mappa logistica.

Questo comportamento, spiegato da un teorema del matematico russo A.N.Sarkovskii nel 1964 [6], é legato alla progressiva fusione delle cosiddette **bande caotiche** delimitate dai punti **immagine** del punto critico $x_c = 0.5$, che abbiamo già introdotto con riferimento alla Fig.1.4. Come il lettore potrà agevolmente verificare con opportune simulazioni, il massimo valore della x che una traiettoria può visitare, per un fissato valore del parametro A , é dato da $x_{max} = f(x_c)$, mentre il valore minimo é dato da $x_{min} = f(x_{max})$: in altre parole, per qualunque valore di A , le prime due iterazioni di un **superciclo**, ossia di una traiettoria che parte dal punto critico, delimiteranno la regione dell'attrattore nel diagramma di iterazione. Questa proprietà, trasportata nel diagramma di biforcazione di Fig.1.11, imporrá appunto un confinamento dei 200 punti plottati per ogni valore di A all'interno dei punti x_{max} e x_{min} relativi a quel valore di A , e dunque porterá alla creazione di bande verticali che si fonderanno progressivamente tra loro al crescere di A .

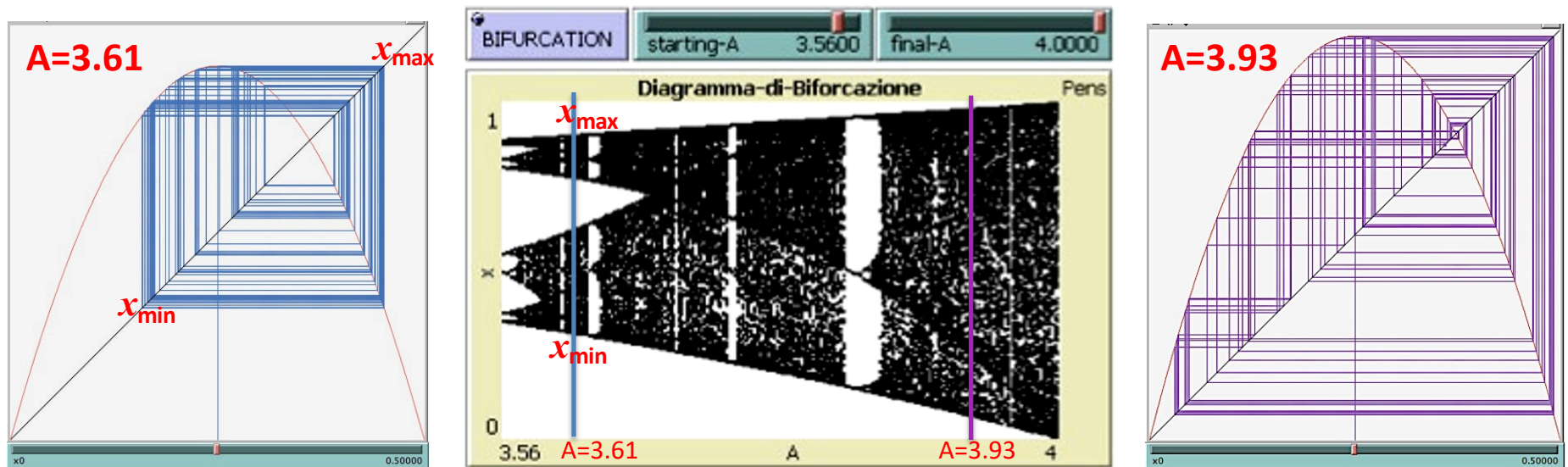


Figura 1.11: Ingrandimento della regione caotica ($3.56 < A < 4.00$) del Diagramma di Biforcazione della mappa logistica.

Ad esempio, in Fig.1.11 si vede chiaramente che le prime due grandi bande caotiche, formate ciascuna da bande minori che emergono per $A = 3.569$ dalla regione di raddoppiamento del periodo, si fondono in corrispondenza del punto $A = 3.68$, chiamato punto di Misiurewicz [7]. Alla destra di questo punto seguono poi, con un ordine dettato dal teorema di Sarkovskii, le tre principali finestre di regolarità, di ampiezza decrescente e di periodo, rispettivamente, 7, 5 e 3. In corrispondenza del valore di A in cui queste finestre periodiche appaiono si verifica una cosiddetta 'biforcazione tangente' (tangent bifurcation) mentre in corrispondenza del valore in cui il comportamento della mappa torna ad essere caotico si parla di 'crisi' (interior crisis). Entrambe queste definizioni sono legate al concetto di 'intermittenza', che é un'altra delle fondamentali 'rotte verso il caos' cui abbiamo già accennato e su cui torneremo in seguito.

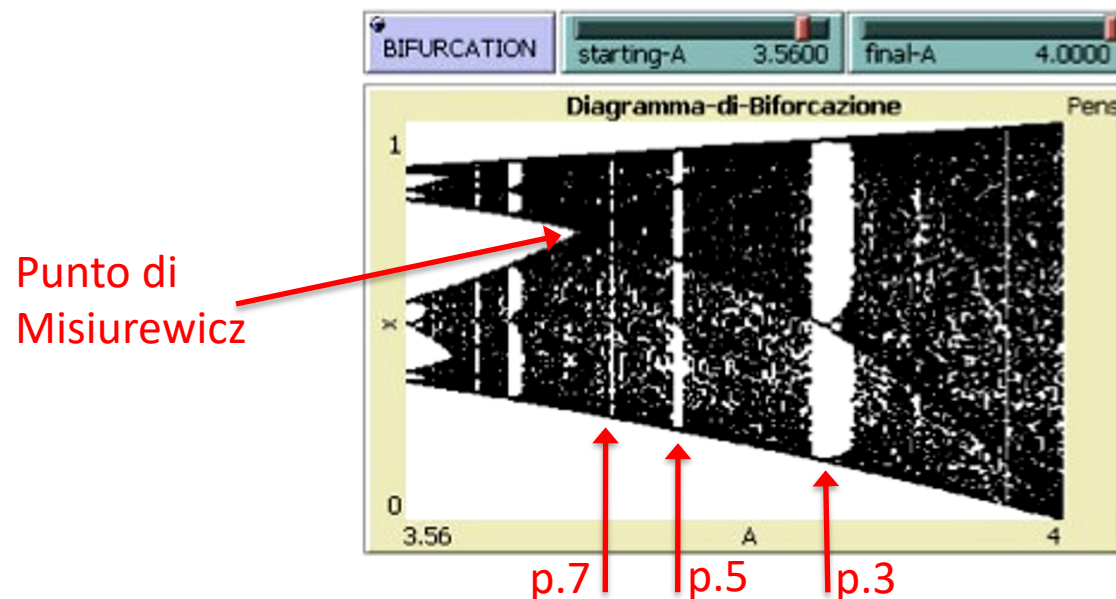


Figura 1.11: Ingrandimento della regione caotica ($3.56 < A < 4.00$) del Diagramma di Biforcazione della mappa logistica.

Rimandiamo alla bibliografia ([2]) per ulteriori approfondimenti sull'organizzazione del diagramma di biforcazione nel regime caotico, ma é importante sottolineare sin da adesso una delle sue principali caratteristiche e cioè la cosiddetta autosimilarità. Analizzando con maggiore dettaglio la Fig.1.11 ci si rende facilmente conto che l'alternanza di bande caotiche e finestre di regolarità si ripete simile a se stessa a diverse scale di osservazione: se ingrandissimo infatti una porzione del diagramma di biforcazione ci troveremmo di fronte ad una struttura molto simile a quella originaria, e lo stesso accadrebbe ingrandendone ulteriormente porzioni sempre più piccole. Questa strana proprietà, detta appunto autosimilarità, é tipica degli attrattori caotici e avremo modo di occuparcene in dettaglio più avanti, quando ci occuperemo della dimensionalità di un attrattore.

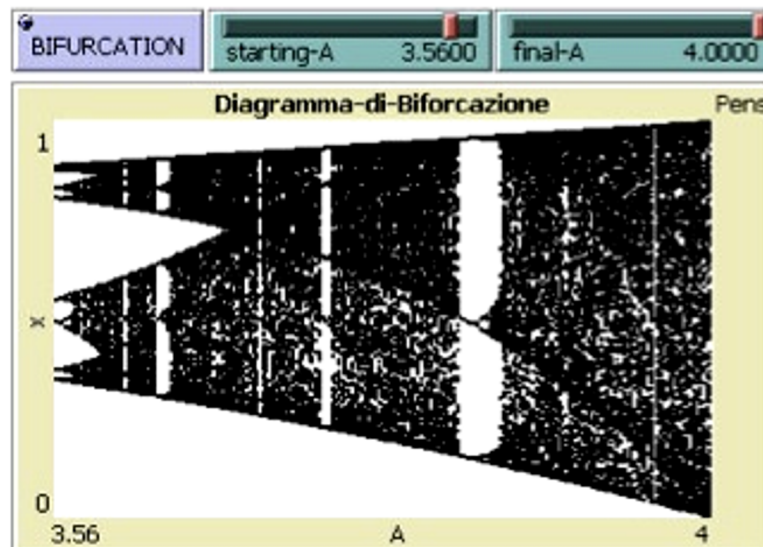
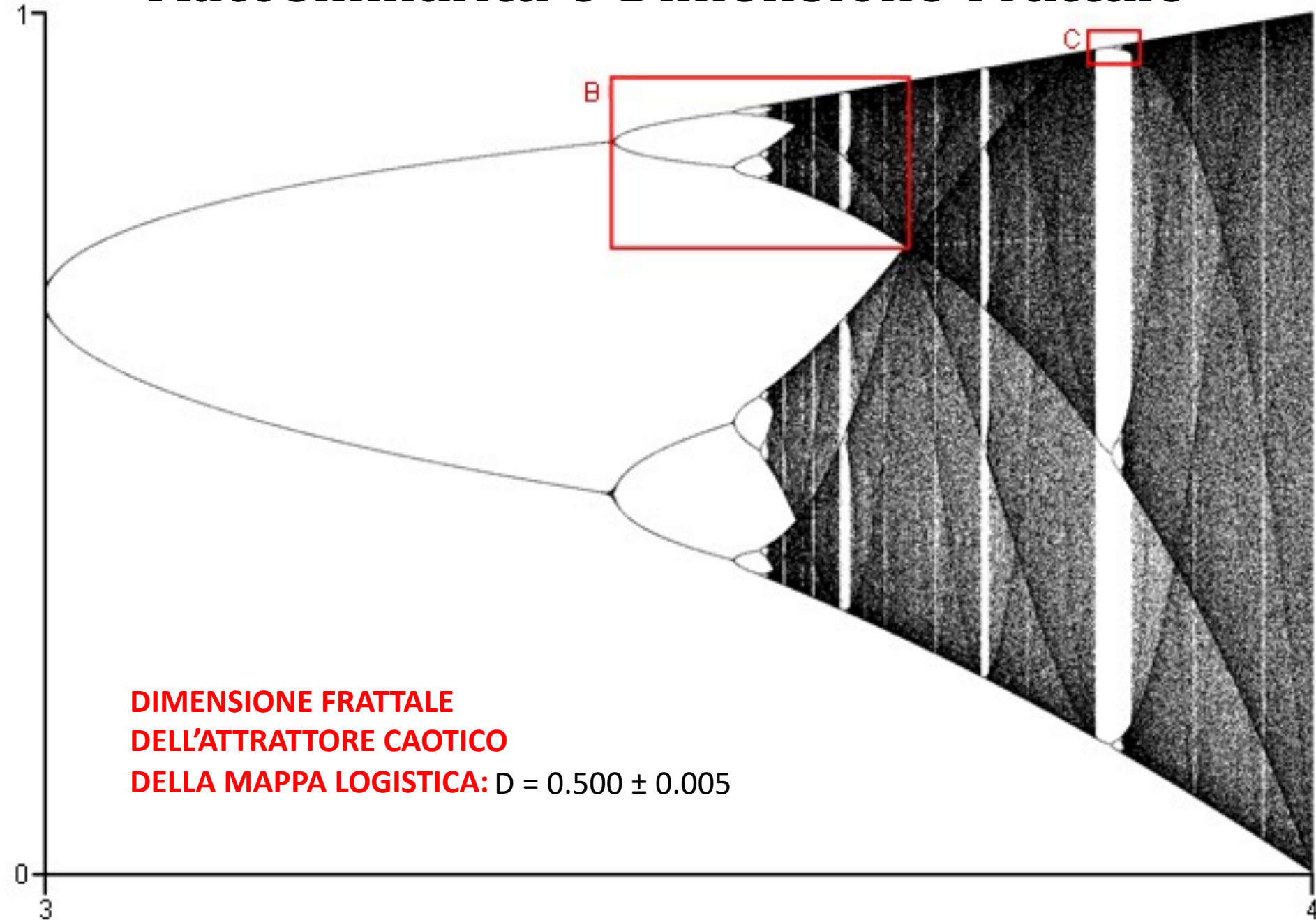


Figura 1.11: Ingrandimento della regione caotica ($3.56 < A < 4.00$) del Diagramma di Biforcazione della mappa logistica.

Autosimilarità e Dimensione Frattale



Calcolo dell'esponente di Lyapunov nella Mappa Logistica

Passiamo adesso senza ulteriore indugio a quello che probabilmente é il piú importante indice quantitativo del comportamento caotico della mappa logistica, e cioè l'esponente di Lyapunov. Abbiamo già detto in apertura (eq.1.2) - e lo abbiamo ribadito mostrando il plot di Fig.1.9 - che, all'interno del regime caotico, due traiettorie della mappa logistica corrispondenti a due condizioni iniziali che differiscano inizialmente di una quantità anche molto piccola, divergeranno esponenzialmente al crescere del numero delle iterazioni con un rate costante λ chiamato esponente di Lyapunov, il quale, come mostreremo tra un attimo, dipende dal valore del parametro di controllo A . Vediamo adesso di formalizzare meglio questi concetti per ricavare una espressione quantitativa dell'esponente di Lyapunov.

REGIME CAOTICO E SENSIBILITA' ALLE CONDIZIONI INIZIALI

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{\lambda t},$$

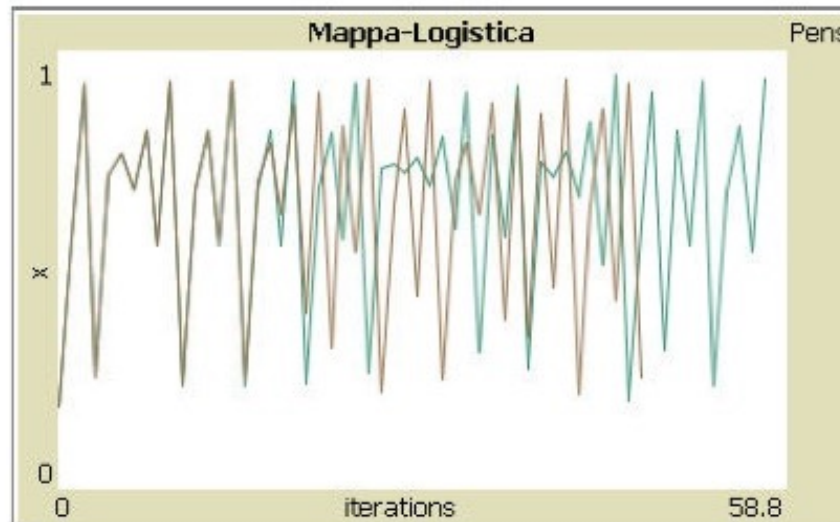


Figura 1.9: Un esempio della sensibilità alle condizioni iniziali delle traiettorie della mappa logistica nel regime caotico: le due traiettorie mostrate in figura sono state ottenute per $A = 3.78$ e per due diversi valori di x_0 , precisamente 0.18450 e 0.18451. Si vede chiaramente che le traiettorie iniziano a divergere dopo circa 17 iterazioni.

Poiché nel caso di un attrattore caotico di un sistema limitato, come quello della mappa logistica, ogni singola traiettoria é costretta ad avvicinarsi ripetutamente ad ogni suo punto precedente, ecco che per calcolare l'esponente di Lyapunov non é necessario prendere in considerazione la divergenza tra due traiettorie distinte ma é bensí sufficiente esaminare la divergenza tra due punti inizialmente molto vicini di una medesima traiettoria al crescere del numero di iterazioni. Se dunque per $n = 0$ consideriamo un punto x_0 dell'attrattore caotico e un punto ad esso vicino $x_0 + \epsilon$, ecco che alla n - *esima* iterazione la distanza tra questi due punti sará diventata

$$\epsilon(n) = |f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)|, \quad (1.7)$$

dove abbiamo indicato con $f^{(n)}(x)$ la n - *esima* iterata della funzione $f(x) = Ax(1 - x)$. Essendo in regime caotico ci aspettiamo che al crescere di n questa distanza cresca esponenzialmente seguendo la versione discreta dell'equazione 1.2, cioé:

$$\epsilon(n) = \epsilon e^{\lambda n}, \quad (1.8)$$

il che significa che l'esponente di Lyapunov λ può essere espresso come:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{|f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\epsilon}. \quad (1.9)$$

É evidente che, per ϵ che tende a zero, l'argomento del logaritmo a secondo membro non é altro che il valore assoluto della derivata rispetto ad x di $f^{(n)}(x)$, ed é possibile dimostrare che quest'ultima può essere riscritta in termini delle derivate prime $f'(x_i)$ calcolate nei punti successivi $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ della traiettoria fino ad x_n [2]. Ne segue che la formula definitiva che permette di calcolare l'esponente di Lyapunov per la mappa logistica (e in realtà per le mappe unidimensionali in generale) sará la seguente:

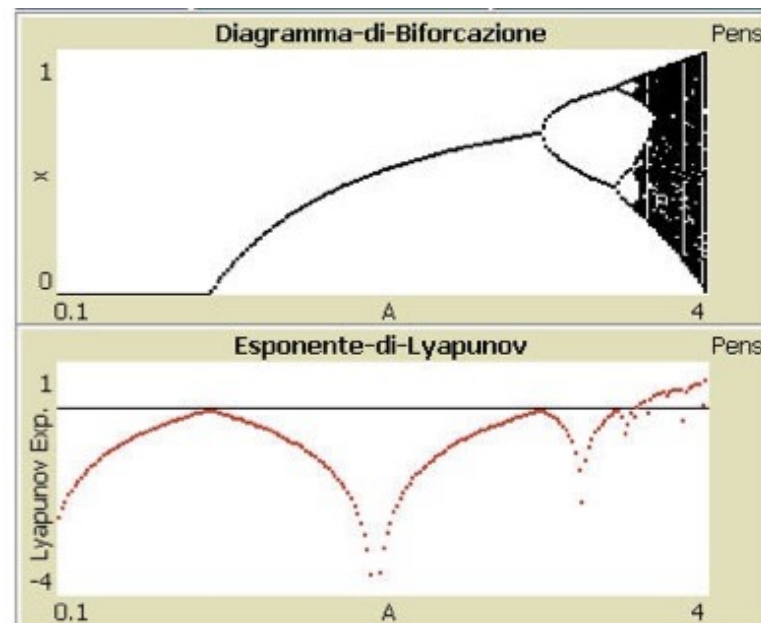
$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|. \quad (1.10)$$

Regola di concatenazione delle derivate:

$$\begin{aligned} \frac{df^{(2)}(x)}{dx} &= \frac{df(f(x))}{dx} \\ &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{f(x)} \left. \frac{df}{dx} \right|_x \end{aligned}$$

Se il regime in cui ci troviamo é caotico, il valore asintotico dell'esponente di Lyapunov (cioé il valore calcolato dopo un numero sufficiente di iterazioni) deve essere positivo, mentre in tutti gli altri casi sará negativo. Un valore di λ uguale o prossimo a zero indicherá invece una situazione intermedia tra ordine e caos, meglio nota come marginale del caos ('the edge of chaos'). In Fig.1.12 é mostrato l'andamento dell'esponente di Lyapunov per la mappa logistica al variare del parametro di controllo A , confrontato con il diagramma di biforcazione completo (con $0 < A < 4$): per ogni valore di A abbiamo plottato il valore di λ calcolato per mezzo dell'Eq.1.10 dopo $n = 400$ iterazioni (valore che - come vedremo tra poco - possiamo tranquillamente considerare asintotico, in quanto λ si stabilizza molto prima). Si vede chiaramente che, sia pur con valori alternativamente crescenti e decrescenti, l'esponente di Lyapunov si mantiene negativo fino al confine con la regione caotica, cioé per $A < 3.569$, dopodiché diventa positivo e cresce gradualmente (se si eccettuano delle sporadiche inflessioni in corrispondenza delle finestre di regolaritá) verso il valore limite $\ln(2)$ per $A = 4$, indicando cosí un aumento graduale del 'grado di caoticitá' del sistema.

Figura 1.12: Andamento del valore asintotico dell'esponente di Lyapunov della mappa logistica in funzione di A , confrontato con il diagramma di biforcazione.



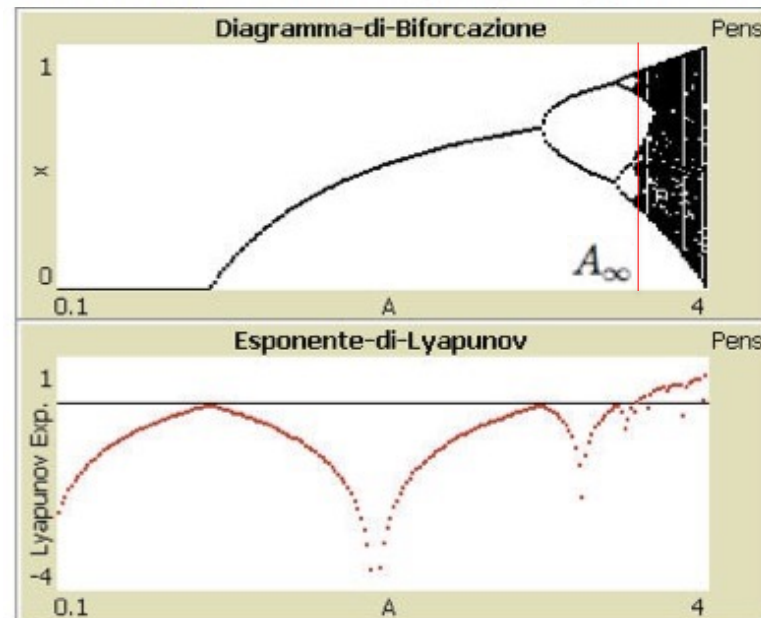
Quest'ultimo risultato é stato formalizzato nel 1980 da Huberman e Rudnick [8], i quali dimostrarono che in generale, quando un sistema diventa caotico attraverso una sequenza di raddoppiamenti di periodo, esiste una relazione analitica universale che lega l'esponente di Lyapunov al parametro di controllo A nella regione caotica. La relazione é la seguente:

$$\lambda(A) = \lambda_0(A - A_\infty)^{\frac{\ln 2}{\ln \delta}} = \lambda_0(A - A_\infty)^{0.445\dots}, \quad (1.11)$$

dove λ_0 é una costante, A_∞ é il punto di accumulazione dei raddoppiamenti di periodo e δ é la costante di Feigenbaum per la mappa logistica $\delta = 4.669$ (ovviamente per altri tipi di mappe, appartenenti ad altre classi di universalitá, il valore di δ sará diverso).

Per inciso, é interessante notare che i valori di A in cui l'esponente di Lyapunov tende ad annullarsi in Fig.1.12 corrispondono esattamente ai punti di biforcazione degli attrattori a ciclo limite o (nella zona caotica) ai punti corrispondenti a delle biforcazioni tangenti: sono questi i punti della mappa logistica che si trovano al 'margine del caos', una condizione che, piú in generale, rappresenta spesso il sintomo di un cambiamento strutturale nella topologia degli attrattori dei sistemi dissipativi.

Figura 1.12: Andamento del valore asintotico dell'esponente di Lyapunov della mappa logistica in funzione di A , confrontato con il diagramma di biforcazione.



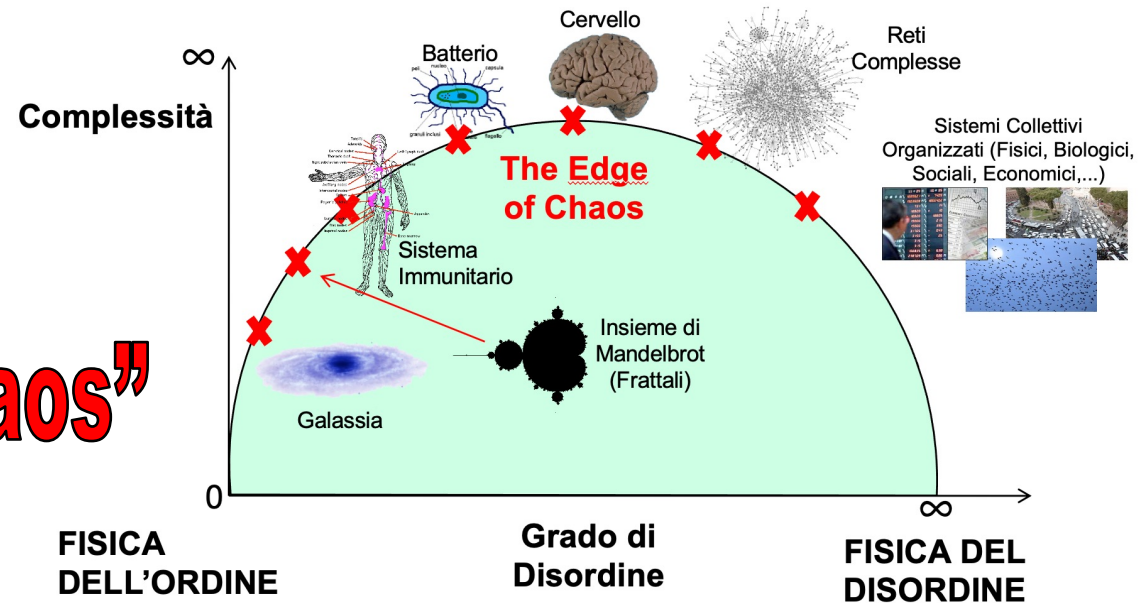
Quest'ultimo risultato é stato formalizzato nel 1980 da Huberman e Rudnick [8], i quali dimostrarono che in generale, quando un sistema diventa caotico attraverso una sequenza di raddoppiamenti di periodo, esiste una relazione analitica universale che lega l'esponente di Lyapunov al parametro di controllo A nella regione caotica. La relazione é la seguente:

$$\lambda(A) = \lambda_0(A - A_\infty)^{\frac{\ln 2}{\ln \delta}} = \lambda_0(A - A_\infty)^{0.445\dots}, \quad (1.11)$$

dove λ_0 é una costante, A_∞ é il punto di accumulazione dei raddoppiamenti di periodo e δ é la costante di Feigenbaum per la mappa logistica $\delta = 4.669$ (ovviamente per altri tipi di mappe, appartenenti ad altre classi di universalitá, il valore di δ sará diverso).

Per inciso, é interessante notare che i valori di A in cui l'esponente di Lyapunov tende ad annullarsi in Fig.1.12 corrispondono esattamente ai punti di biforcazione degli attrattori a ciclo limite o (nella zona caotica) ai punti corrispondenti a delle biforcazioni tangenti: sono questi i punti della mappa logistica che si trovano al 'margine del caos', una condizione che, piú in generale, rappresenta spesso il sintomo di un cambiamento strutturale nella topologia degli attrattori dei sistemi dissipativi.

Complessità
“at the edge of chaos”

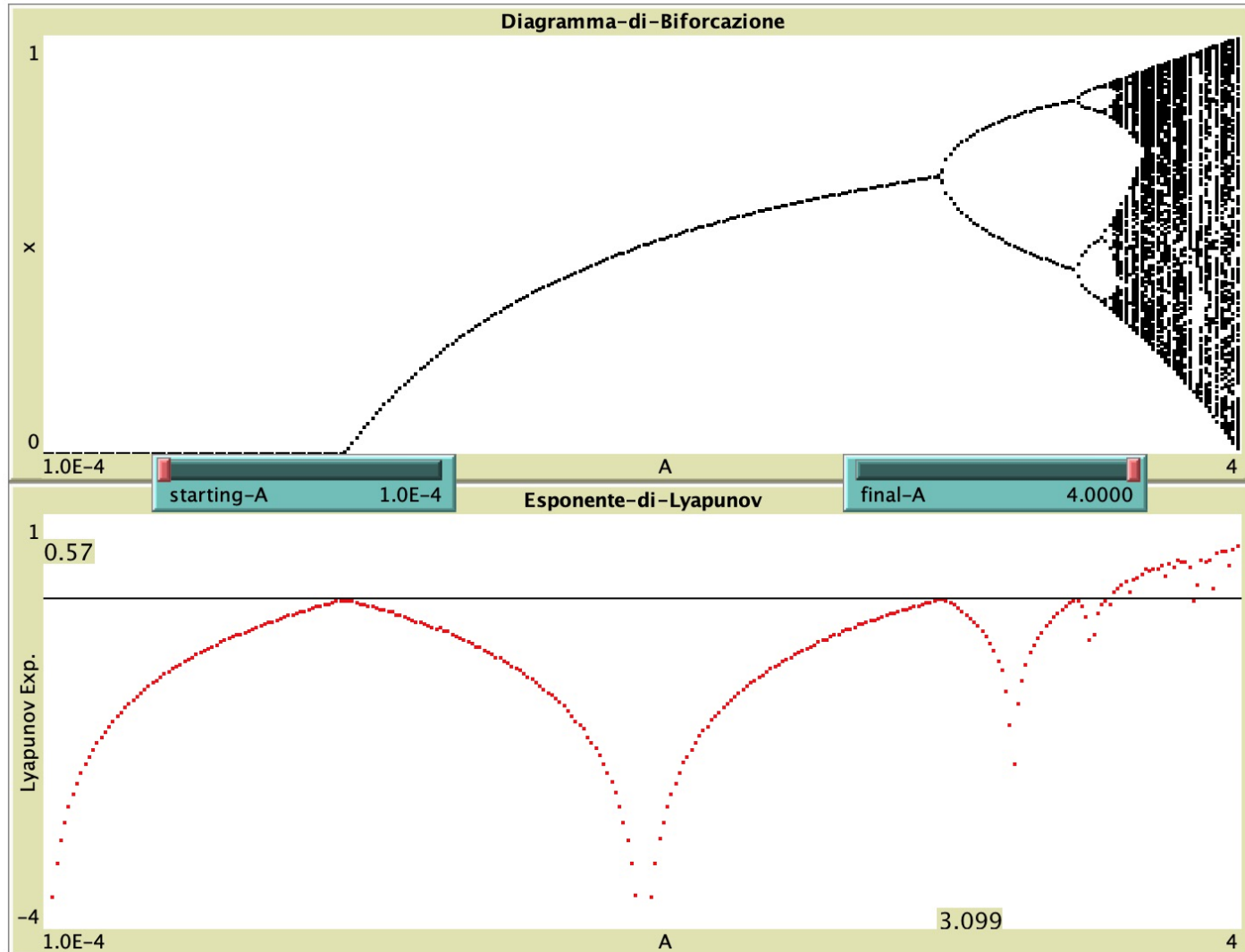


Mappa-Logistica-Bifurcation+Lyapunov.nlogo

PLOT BIFURCATION + LYAPUNOV

MAPPA LOGISTICA:
 $x(n+1) = A x(n) [1 - x(n)]$

$1 < A < 3$ punto-fisso
 $3 < A < 3.56994$ period-doubling
 $3.56994 < A < 4$ caos



mappa-Logistica-Bifurcation+Lyapunov.nlogo

```
set-current-plot "Esponente-di-Lyapunov"
clear-plot
set-current-plot-pen "line"
plotxy 0 0 plotxy 100000 0
set-current-plot-pen "default"
set-plot-x-range starting-A final-A
set-plot-y-range -4 1
```

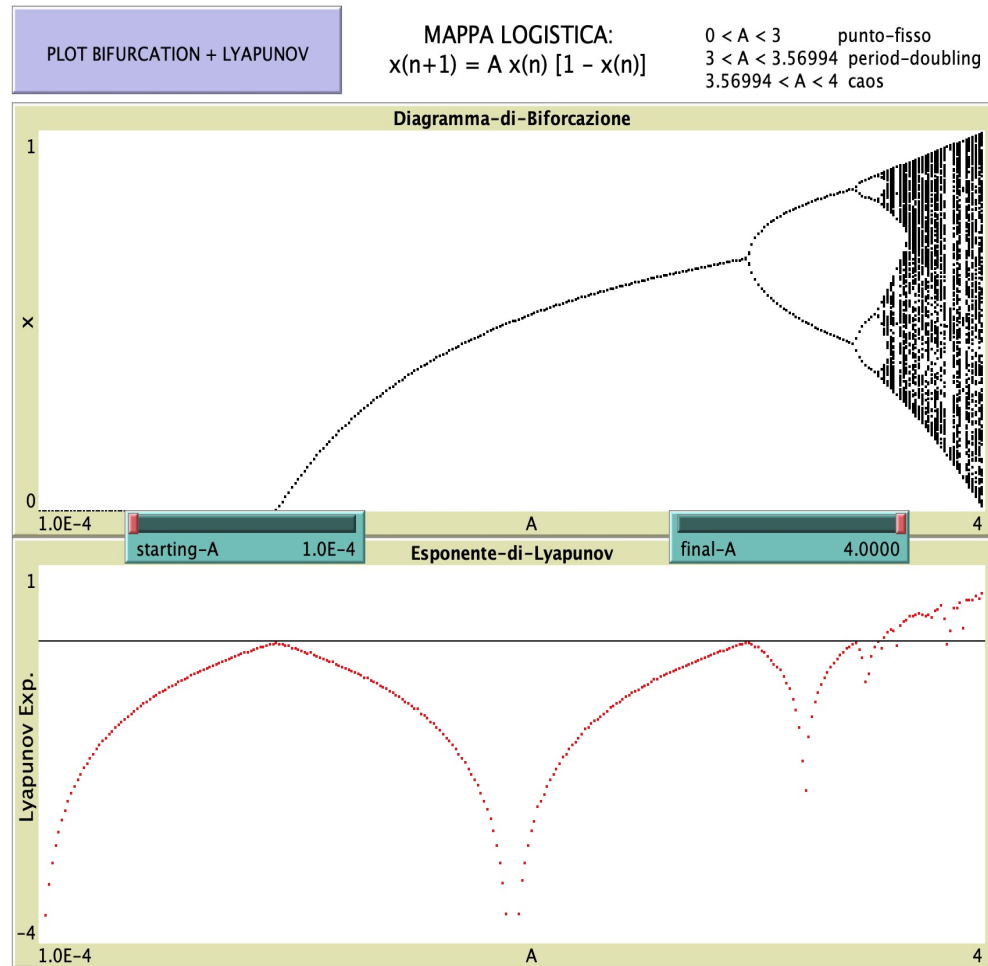
```
let llyapunov 0
set A1 starting-A
let passo ((final-A - starting-A) / 300)
repeat 300
```

```
set-current-plot "Diagramma-di-Biforcazione"
set-current-plot-pen "default"
```

```
let ll-sum 0
set cont 1
set x random-float 1
repeat 200
[
  set x (A1 * x * (1 - x))
  set ll-sum (ll-sum + (ln(abs(A1 - 2 * A1 * x))))
  set llyapunov (ll-sum / cont)
  set cont (cont + 1)
]
```

```
repeat 200
[
  set x (A1 * x * (1 - x))
  plotxy A1 x
  set ll-sum (ll-sum + (ln(abs(A1 - 2 * A1 * x))))
  set llyapunov (ll-sum / cont)
  set cont (cont + 1)
]
```

```
set-current-plot "Esponente-di-Lyapunov"
plotxy A1 llyapunov
set A1 (A1 + passo)
```



$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|.$$

$$f(x) = Ax(1-x) \rightarrow f'(x) = A - 2Ax$$



1. [arXiv:2103.07550](#) [pdf, other] [math.DS](#) [eess.SY](#)

Chaotic Logistic Map Forecast using Fuzzy Time Series

Authors: [Lucas Vinícius Ribeiro Alves](#)

Abstract: This paper deals with the problem of forecast the Logistic Chaotic Map using Fuzzy Times Series (FTS). Chaotic Systems are very sensible to changes in its parameters and in the initial conditions, turning them into hard systems to model and forecast. In this case, we rely in the robustness of Fuzzy Time Series to model and forecast the logistic map. We use the Akaike Information Criterion (AIC) a... [More](#)

Submitted 10 March, 2021; originally announced March 2021.

2. [arXiv:2102.08102](#) [pdf, other] [cond-mat.stat-mech](#) [math-ph](#) [math.DS](#) [nlin.CD](#) [doi](#) [10.1063/5.0040544](#)

Logistic map trajectory distributions: Renormalization-group, entropy and criticality at the transition to chaos

Authors: [Alvaro Diaz-Ruelas](#), [Fulvio Baldovin](#), [Alberto Robledo](#)

Abstract: We study the evolution of the probability density of ensembles of iterates of the logistic map that advance towards and finally remain at attractors of representative dynamical regimes. We consider the mirror families of superstable attractors along the period-doubling cascade, and of chaotic-band attractors along the inverse band-splitting cascade. We examine also their common aperiodic accumulatio... [More](#)

Submitted 16 February, 2021; originally announced February 2021.

Comments: 20 pages, 12 figures, v1

3. [arXiv:2009.04919](#) [pdf, other] [cond-mat.stat-mech](#) [nlin.CD](#)

Transition to Coarse-Grained Order in Coupled Logistic Maps: Effect of Delay and Asymmetry

Authors: [Bhakti Parag Rajvaidya](#), [Ankosh D. Deshmukh](#), [Prashant M. Gade](#), [Girish G. Sahasrabudhe](#)

Abstract: We study one-dimensional coupled logistic maps with delayed linear or nonlinear nearest-neighbor coupling. Taking the nonzero fixed point of the map x^* as reference, we coarse-grain the system by identifying values above x^* with the spin-up state and values below x^* with the spin-down state. We define persistent sites at time T as the sites which did not change their spin state even once for all $e...$ [More](#)

Submitted 5 September, 2020; originally announced September 2020.

Comments: 18 pages, 7 figures

4. [arXiv:2008.08338](#) [pdf, other] [math.DS](#)

The graph of the logistic map is a tower

Authors: [Roberto De Leo](#), [James A. Yorke](#)

Abstract: The qualitative behavior of a dynamical system can be encoded in a graph. Each node of the graph is an equivalence class of chain-recurrent points and there is an edge from node A to node B if, using arbitrary small perturbations, a trajectory starting from any point of A can be steered to any point of B . In this article we describe the graph of the logistic map. Our main result is that the gr... [More](#)

Submitted 29 March, 2021; v1 submitted 19 August, 2020; originally announced August 2020.

Comments: 30 pages, 9 figures

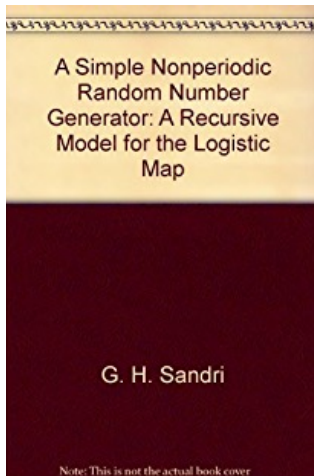
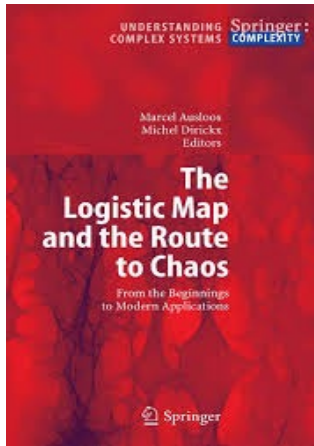
5. [arXiv:2008.08204](#) [pdf] [nlin.AO](#) [cond-mat.dis-nn](#) [doi](#) [10.7566/JPSJ.89.114801](#)

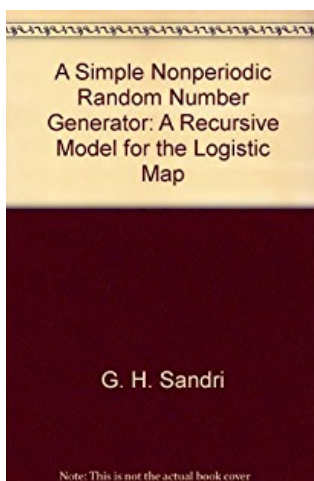
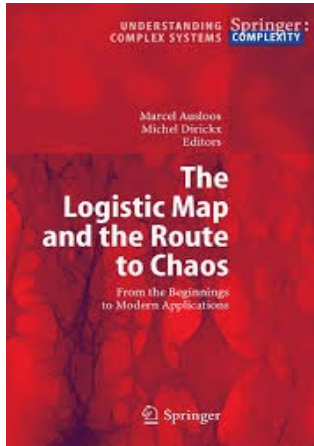
Spontaneous organizations of diverse network structures in coupled logistic maps with a delayed connection change

Authors: [Amika Ohara](#), [Masashi Fujii](#), [Akinori Awazu](#)

Abstract: In this study, we performed comprehensive morphological investigations of the spontaneous formations of effective network structures among elements in coupled logistic maps, specifically with a delayed connection change. Our proposed model showed ten states with different structural and dynamic features of the network topologies. Based on the parameter values, various stable networks, such as hier... [More](#)

Submitted 18 August, 2020; originally announced August 2020.





6. [arXiv:2006.11378](#) [pdf, other] [nlin.AO](#) [nlin.CD](#)
Observation of bifurcations and hysteresis in experimentally coupled logistic maps
Authors: [Caracé Gutiérrez](#), [Cecilia Cabeza](#), [Nicolás Rubido](#)
Abstract: Initially, the logistic map became popular as a simplified model for population growth. In spite of its apparent simplicity, as the population growth-rate is increased the map exhibits a broad range of dynamics, which include bifurcation cascades going from periodic to chaotic solutions. Studying coupled maps allows to identify other qualitative changes in the collective dynamics, such as pattern... [▽ More](#)
Submitted 15 June, 2020; **originally announced** June 2020.
7. [arXiv:2006.02824](#) [pdf] [cs.NE](#) [cs.ET](#) [nlin.AO](#) [doi](#) [10.3390/electronics9091432](#)
Neural Network for Low-Memory IoT Devices and MNIST Image Recognition Using Kernels Based on Logistic Map
Authors: [Andrei Velichko](#)
Abstract: This study presents a neural network which uses filters based on logistic mapping (LogNNet). LogNNet has a feedforward network structure, but possesses the properties of reservoir neural networks. The input weight matrix, set by a recurrent logistic mapping, forms the kernels that transform the input space to the higher-dimensional feature space. The most effective recognition of a handwritten dig... [▽ More](#)
Submitted 3 September, 2020; v1 submitted 4 June, 2020; **originally announced** June 2020.
Comments: 17 pages, 7 figures, 2 tables, 1 Appendix
Journal ref: Electronics 2020, 9(9), 1432
8. [arXiv:2005.08698](#) [pdf, other] [nlin.CD](#) [math.DS](#)
Flip and Neimark-Sacker Bifurcations in a Coupled Logistic Map System
Authors: [A. Mareno](#), [L. Q. English](#)
Abstract: In this paper we consider a system of strongly coupled logistic maps involving two parameters. We classify and investigate the stability of its fixed points. A local bifurcation analysis of the system using Center Manifold is undertaken and then supported by numerical computations. This reveals the existence of reverse flip and Neimark-Sacker bifurcations.
Submitted 18 May, 2020; **originally announced** May 2020.
Comments: 17 pages, 9 figures
9. [arXiv:2003.06616](#) [pdf] [cs.CR](#)
Image Encryption Decryption Using Chaotic Logistic Mapping and DNA Encoding
Authors: [Sakshi Patel](#), [Bharath K P](#), [Rajesh Kumar Muthu](#)
Abstract: In this paper we have proposed a method that uses chaotic logistic mapping and DNA encoding to encrypt the image. A 32 bit ASCII private key is used to diffuse the image. The results demonstrated clearly show that encryption algorithm based on chaotic logistic mapping and DNA encoding gives better result than encrypting only with chaotic logistic mapping. The proposed method also takes into account... [▽ More](#)
Submitted 14 March, 2020; **originally announced** March 2020.
10. [arXiv:1909.07110](#) [pdf, other] [nlin.CD](#) [doi](#) [10.1007/s11071-019-05257-2](#)
Chaos control in the fractional order logistic map via impulses
Authors: [Marius-F. Danca](#), [Michal Feckan](#), [Nikolay Kuznetsov](#)
Abstract: In this paper the chaos control in the discrete logistic map of fractional order is obtained with an impulsive control algorithm. The underlying discrete initial value problem of fractional order is considered in terms of Caputo delta fractional difference. Every Δ steps, the state variable is instantly modified with the same impulse value, chosen from a bifurcation diagram versus impulse. It is... [▽ More](#)
Submitted 16 September, 2019; **originally announced** September 2019.
Comments: Nonlinear Dynamics, accepted 2019



15. [arXiv:1712.09092](#) [pdf] [econ.GN](#) [doi](#) [10.1016/j.chaos.2016.12.012](#)

Logistic map with memory from economic model

Authors: [Valentina V. Tarasova](#), [Vasily E. Tarasov](#)

Abstract: A generalization of the economic model of logistic growth, which takes into account the effects of memory and crises, is suggested. Memory effect means that the economic factors and parameters at any given time depend not only on their values at that time, but also on their values at previous times. For the mathematical description of the memory effects, we use the theory of derivatives of non-int... [▽ More](#)

Submitted 25 December, 2017; originally announced December 2017.

Comments: 19 pages, pdf

MSC Class: 26A33; 34A08

Journal ref: Chaos, Solitons & Fractals. 2017. Vol. 95, P. 84-91

16. [arXiv:1712.01013](#) [pdf, other] [eess.SP](#)

A rigorous evaluation of the intermittence in the logistic map using lower bound error

Authors: [Marcella N. R. Oliveira](#), [Erivelton G. Nepomuceno](#)

Abstract: This article investigates the maximum time of simulation in which the phenomenon of the intermittence can be observed with numerical confidence in discrete maps. Interval analysis and the lower error limit were used. As a result, it was observed that the reliability of the intermittency is dependent on the initial condition. Four numerical examples show the efficiency of the proposal.

Submitted 4 December, 2017; originally announced December 2017.

Comments: DINCON 2017 - Conferencia Brasileira de Dinamica, Controle e Aplicacoes - Sao Jose do Rio Preto - Brazil. 7 pages. In Portuguese

17. [arXiv:1711.03287](#) [pdf, other] [nlin.AO](#) [doi](#) [10.1140/epjb/e2018-80630-y](#)

Chimera states in networks of logistic maps with hierarchical connectivities

Authors: [Alexander zur Bensen](#), [Iryna Omelchenko](#), [Anna Zakharaova](#), [Eckehard Schöll](#)

Abstract: Chimera states are complex spatiotemporal patterns consisting of coexisting domains of coherence and incoherence. We study networks of nonlocally coupled logistic maps and analyze systematically how the dilution of the network links influences the appearance of chimera patterns. The network connectivities are constructed using an iterative Cantor algorithm to generate fractal (hierarchical) connec... [▽ More](#)

Submitted 9 November, 2017; originally announced November 2017.

18. [arXiv:1708.03518](#) [pdf] [cs.OH](#)

Implementation of the Logistic Map with FPGA using 32 bits fixed point standard

Authors: [Diego A. Silva](#), [Eduardo B. Pereira](#), [Erivelton G. Nepomuceno](#)

Abstract: This article presents a design of the logistic map by means of FPGA (Field Programmable Gate Ar-ray) under fixed-point standard and 32-bits of precision. The design was carried out with Altera Quartus platform. The hardware description language VHDL-93 has been adopted and the results were simulated by means of Altera ModelSim package. The main of the project was to produce a cha-otic system with... [▽ More](#)

Submitted 11 August, 2017; originally announced August 2017.

Comments: XIII Simposio Brasileiro de Automacao Inteligente - SBAI2017 - Porto Alegre - Brazil. In Portuguese

19. [arXiv:1706.06840](#) [pdf, other] [nlin.CD](#) [cond-mat.stat-mech](#) [doi](#) [10.1088/1742-5468/aaac55](#)

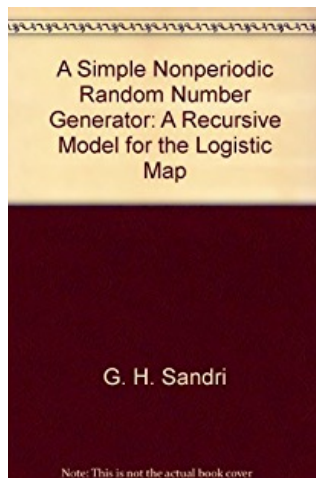
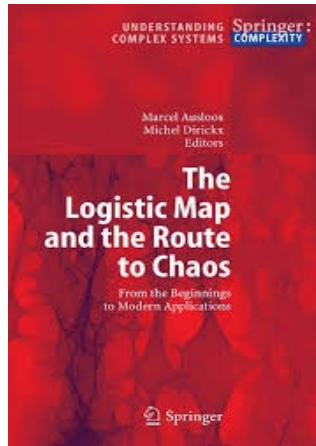
Stretched exponential dynamics of coupled logistic maps on a small-world network

Authors: [Ashwini V. Mahajan](#), [Prashant M. Gade](#)

Abstract: We investigate the dynamic phase transition from partially or fully arrested state to spatiotemporal chaos in coupled logistic maps on a small-world network. Persistence of local variables in coarse grained sense acts as an excellent order parameter to study this transition. We investigate the phase diagram by varying coupling strength and small-world rewiring probability p of nonlocal connections... [▽ More](#)

Submitted 21 June, 2017; originally announced June 2017.

Comments: 12 pages, 23 figures





1. arXiv:2102.08102 [pdf, other] [cond-mat.stat-mech](#) [math-ph](#) [math.DS](#) [nlin.CD](#) [doi](#) 10.1063/5.0040544

Logistic map trajectory distributions: Renormalization-group, entropy and criticality at the transition to chaos

Authors: Alvaro Diaz-Ruelas, Fulvio Baldovin, Alberto Robledo

Abstract: We study the evolution of the probability density of ensembles of iterates of the **logistic...** [More](#)

Submitted 16 February, 2021; originally announced February 2021.

Comments: 20 pages, 12 figures, v1

2. arXiv:1608.02891 [pdf, other] [nlin.CD](#) [cond-mat.stat-mech](#) [doi](#) 10.1140/epjst/e2016-60011-y

Sums of variables at the onset of chaos, replenished

Authors: Alvaro Diaz-Ruelas, Alberto Robledo

Abstract: As a counterpart to our previous study of the stationary distribution formed by sums of positions at the Feigenbaum point via the period-doubling cascade in the **logistic...** [More](#)

Submitted 9 August, 2016; originally announced August 2016.

Comments: To be published in European Physical Journal Special Topics: Temporal and Spatio-Temporal Dynamic Instabilities: Novel Computational and Experimental Approaches

3. arXiv:1504.06358 [pdf, ps, other] [nlin.CD](#) [cond-mat.stat-mech](#) [doi](#) 10.1088/1742-6596/604/1/012018

Pascal (Yang Hui) triangles and power laws in the logistic map

Authors: Carlos Velarde, Alberto Robledo

Abstract: We point out the joint occurrence of Pascal triangle patterns and power-law scaling in the standard **logistic map**, or more generally, in unimodal **maps**. It is known that these features are present in its two types of bifurcation cascades: period and chaotic- band doubling of attrac...

[More](#)

Submitted 23 April, 2015; originally announced April 2015.

Comments: Proceedings of 4th International Workshop on: Statistical Physics and Mathematics of Complex Systems (SPMCS2015), Yichang, China October 12-16 2014. To be published in the Journal of Physics: Conference Series(2015), ISSN 1742-6596

4. arXiv:1409.7449 [pdf, ps, other] [nlin.CD](#) [cond-mat.stat-mech](#) [doi](#) 10.1209/0295-5075/108/20008

Scaling of distributions of sums of positions for chaotic dynamics at band-splitting points

Authors: Alvaro Diaz-Ruelas, Miguel Angel Fuentes, Alberto Robledo

Abstract: The stationary distributions of sums of positions of trajectories generated by the **logistic map** have been found to follow a basic renormalization group (RG) structure: a nontrivial fixed-point multi-scale distribution at the period-doubling onset of chaos and a Gaussian trivial fixed-point distribution for all chaotic... [More](#)

Submitted 25 September, 2014; originally announced September 2014.

5. arXiv:1401.3771 [pdf, other] [nlin.CD](#) [doi](#) 10.1140/epjb/e2014-40882-1

Sums of variables at the onset of chaos

Authors: Miguel Angel Fuentes, Alberto Robledo

Abstract: ...the period-doubling route. We study the sums of successive positions generated by an ensemble of initial conditions uniformly distributed in the entire phase space of a unimodal **map** as represented by the **logistic map**. We find that these sums acquire their salient, multiscale, fea...

[More](#)

Submitted 15 January, 2014; originally announced January 2014.

Comments: arXiv admin note: text overlap with arXiv:1312.0716

6. arXiv:cond-mat/0504033 [pdf, ps, other] [cond-mat.stat-mech](#) [nlin.CD](#) [doi](#) 10.1103/PhysRevE.72.066213

Parallels between the dynamics at the noise-perturbed onset of chaos in logistic maps and the dynamics of glass formation

Authors: Fulvio Baldovin, Alberto Robledo

Abstract: We develop the characterization of the dynamics at the noise-perturbed edge of chaos in **logistic...** [More](#)

Submitted 10 October, 2005; v1 submitted 1 April, 2005; originally announced April 2005.

Comments: Revised version with substantial improvements. Revtex, 8 pages, 11 figures

Journal ref: Phys. Rev. E (Ibf 72), 066213 (2005)

7. arXiv:cond-mat/0501398 [pdf, ps, other] [cond-mat.stat-mech](#) [nlin.CD](#) [doi](#) 10.1007/3-540-32023-7_19

A recent appreciation of the singular dynamics at the edge of chaos

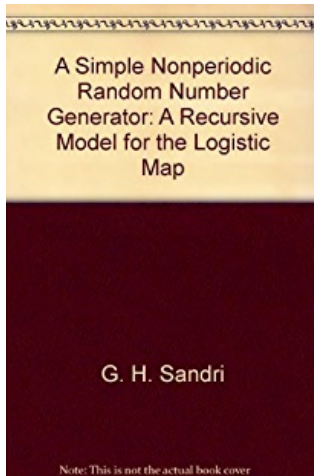
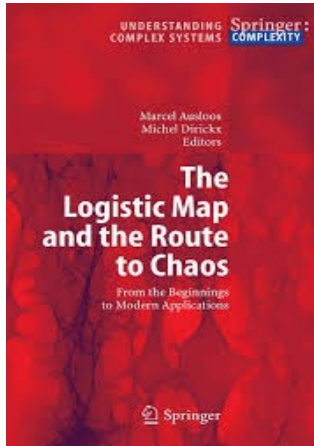
Authors: E. Mayoral, A. Robledo

Abstract: We study the dynamics of iterates at the transition to chaos in the **logistic map** and find that it is constituted by an infinite family of Mori's q -phase transitions. Starting from Feigenbaum's σ function for the diameters ratio, we determine the atypical weak sensitivity to initial conditions ξ_t associ... [More](#)

Submitted 17 January, 2005; originally announced January 2005.

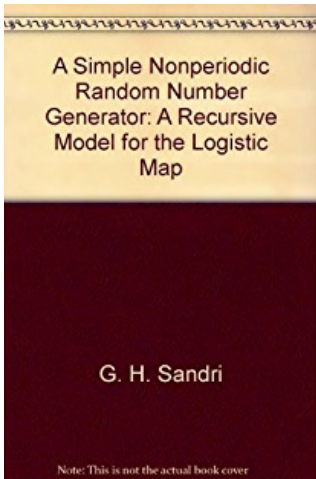
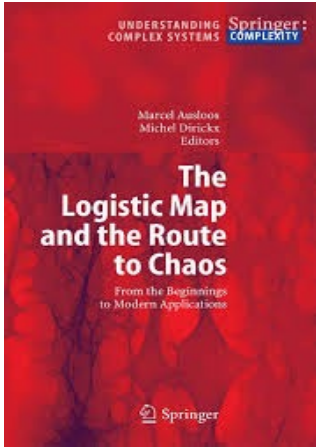


A. Robledo



G. H. Sandri

Note: This is not the actual book cover



Generalized statistical mechanics at the onset of chaos


Alberto Robledo

LATIN-AMERICAN SCHOOL AND CBP

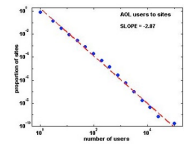


A. Robledo

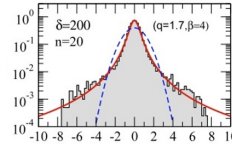
Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis




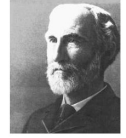
Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis



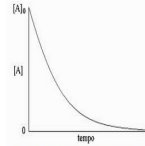
LEGGE DI POTENZA



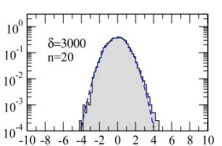
q-GAUSSIANA

Meccanica Statistica di Boltzmann-Gibbs



ESPONENZIALE



GAUSSIANA

MAPPA LOGISTICA: L'EQUAZIONE CHE CAMBIERA' IL MODO IN CUI GUARDATE IL MONDO!

YouTube IT

Cerca



$$X_{n+1} = rX_n(1 - X_n)$$



0:14 / 18:38



This equation will change how you see the world (the logistic map)

10.082.901 visualizzazioni • 29 gen 2020

443.834

6385

CONDIVIDI

SALVA

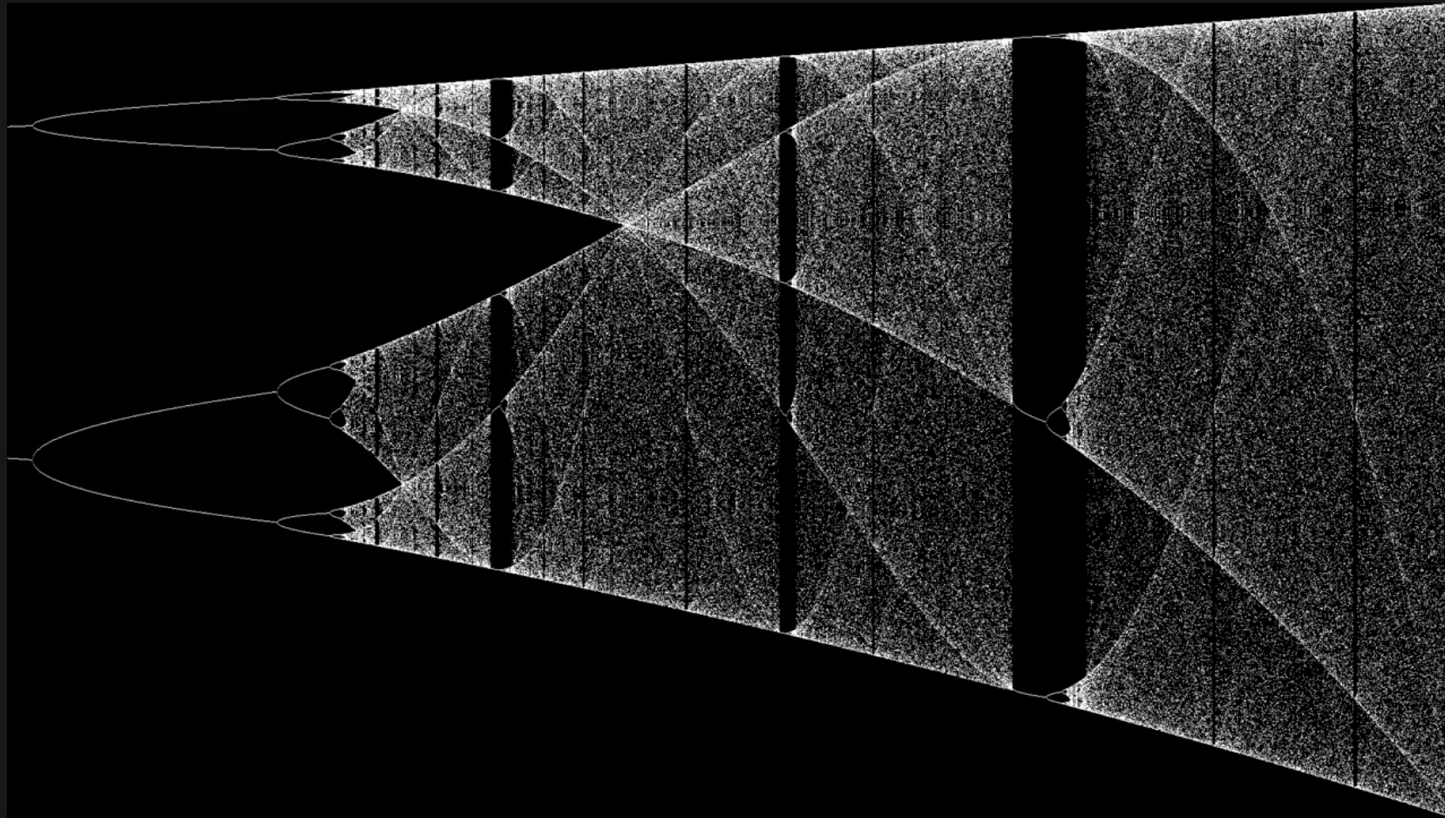


<https://www.youtube.com/watch?v=ovJcsL7vyrk>

IL SUONO DELLA MAPPA LOGISTICA

YouTube IT

Cerca



The Sound of the Logistic Map

12.859 visualizzazioni • 13 feb 2020

👍 535

💬 6

➦ CONDIVIDI

≡+ SALVA



<https://www.youtube.com/watch?v=owq6xCFDbDQ>