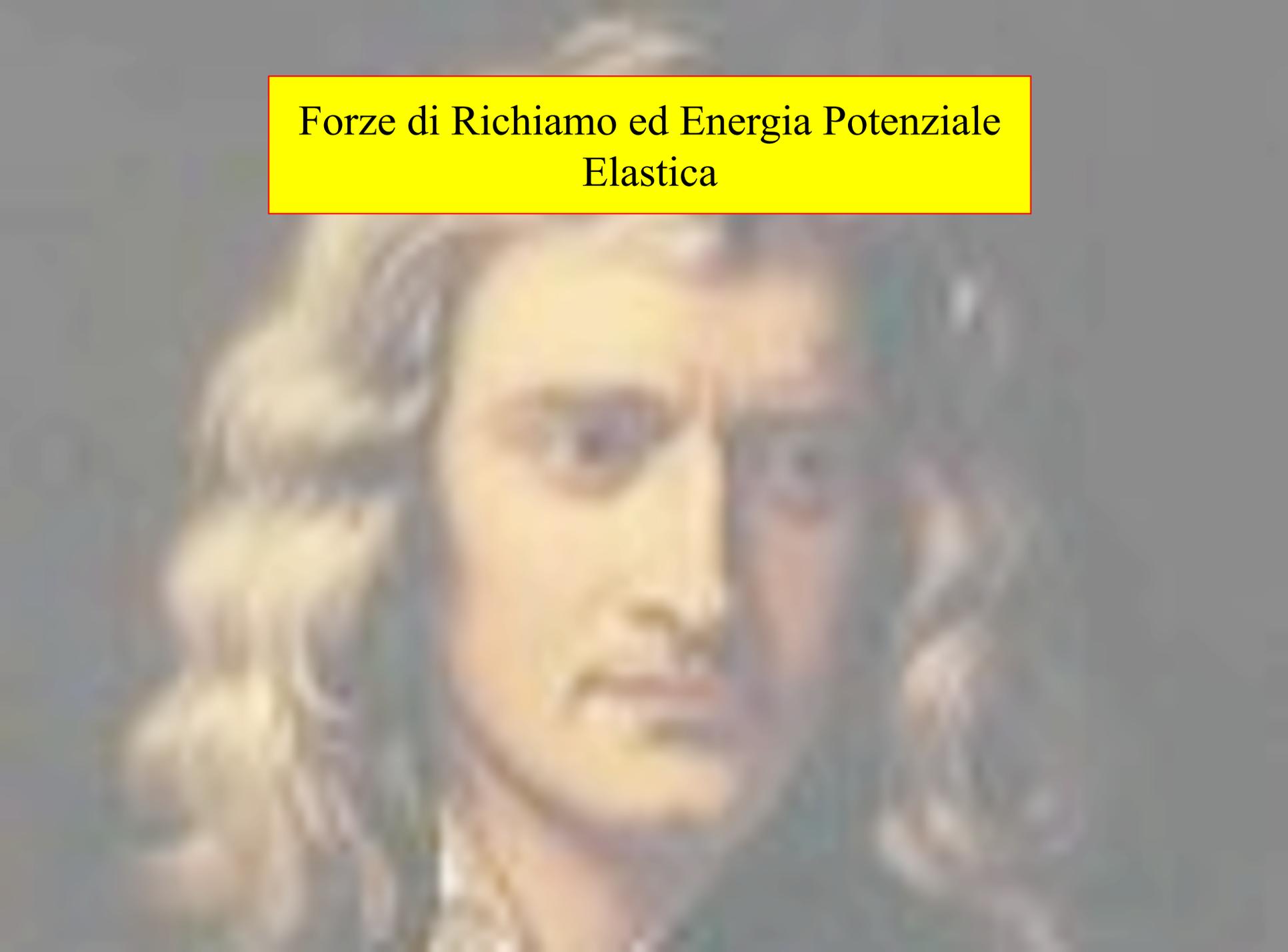


Forze di Richiamo ed Energia Potenziale  
Elastica



# Lavoro ed Energia Cinetica

Quando un **oggetto in moto** urta su un altro oggetto (una palla di cannone contro un muro, un martello contro un chiodo, etc..), eserciterà su di esso una **forza** e ne provocherà un certo **spostamento**: così facendo esso mostra di essere in grado di **compiere lavoro proprio grazie al fatto che è in movimento**, e per questo diciamo che un oggetto in moto possiede una certa **energia cinetica**.



Abbiamo visto che se, per un corpo di massa  $m$  che si muove a velocità  $v$ , definiamo **energia cinetica traslazionale** la quantità:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

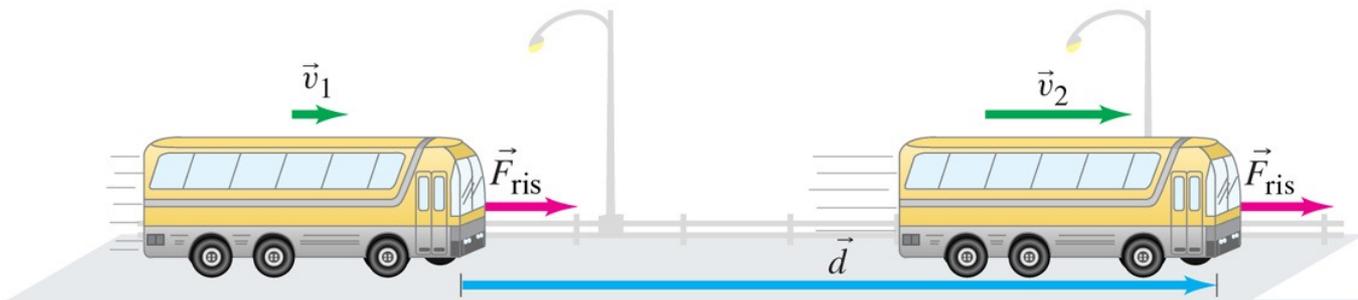
**TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA: il lavoro totale compiuto da una forza risultante non nulla sul corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo stesso:**

$$W_{tot} = K_2 - K_1 \rightarrow W_{tot} = \Delta K$$

Nelle unità di misura del SI (MKS) anche l'energia cinetica si misura in **Joule (J)**.



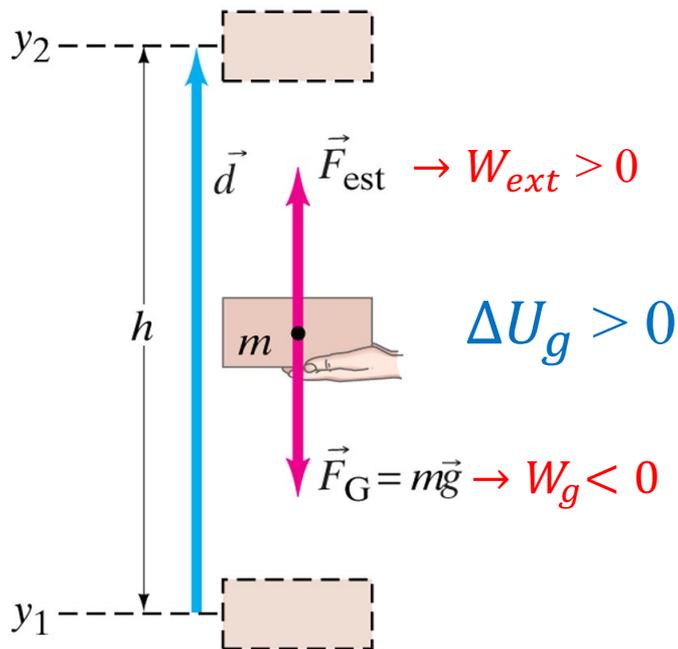
**James Joule**



# Lavoro ed Energia Potenziale

Come abbiamo visto, l'**energia cinetica** posseduta da un corpo dipende esclusivamente dalla sua massa e dalla sua velocità, quindi essa è **presente in ogni corpo in movimento** a prescindere dall'esistenza o meno di altre forze che agiscono sul corpo stesso.

Esiste invece un'altra fondamentale forma di energia legata alla capacità di un corpo di compiere lavoro a causa della sua **configurazione** o della sua **posizione** all'interno di un campo di forza: questa forma di energia si chiama **energia potenziale** la sua definizione varia a seconda del tipo di forza da cui essa trae origine.



**Energia potenziale gravitazionale  $U_g$**  di un corpo di massa  $m$  posto alla quota  $h$  al di sopra di una quota di riferimento (ad esempio il terreno):

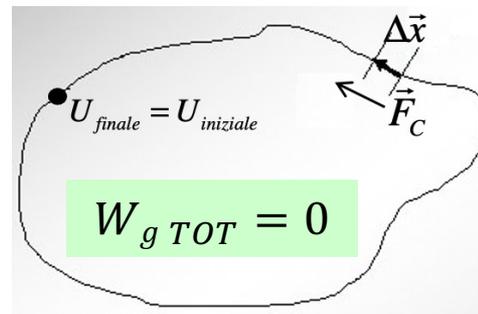
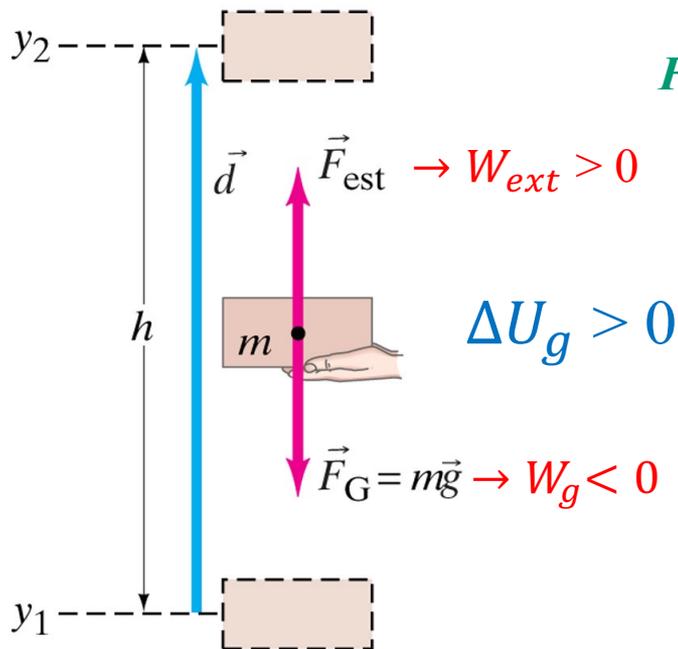
$$U_g = mgh$$

# Lavoro ed Energia Potenziale

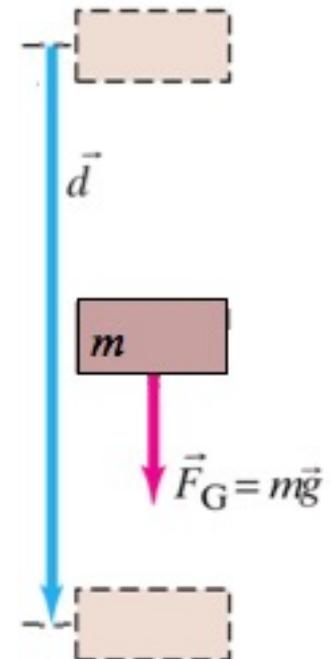
Come abbiamo visto, l'**energia cinetica** posseduta da un corpo dipende esclusivamente dalla sua massa e dalla sua velocità, quindi essa è **presente in ogni corpo in movimento** a prescindere dall'esistenza o meno di altre forze che agiscono sul corpo stesso.

Esiste invece un'altra fondamentale forma di energia legata alla capacità di un corpo di compiere lavoro a causa della sua **configurazione** o della sua **posizione** all'interno di un campo di forza: questa forma di energia si chiama **energia potenziale** la sua definizione varia a seconda del tipo di forza da cui essa trae origine.

**$F_G$  è una forza conservativa!**



$W_{ext} = 0$   
 $\Delta U_g < 0$   
 $W_g > 0$

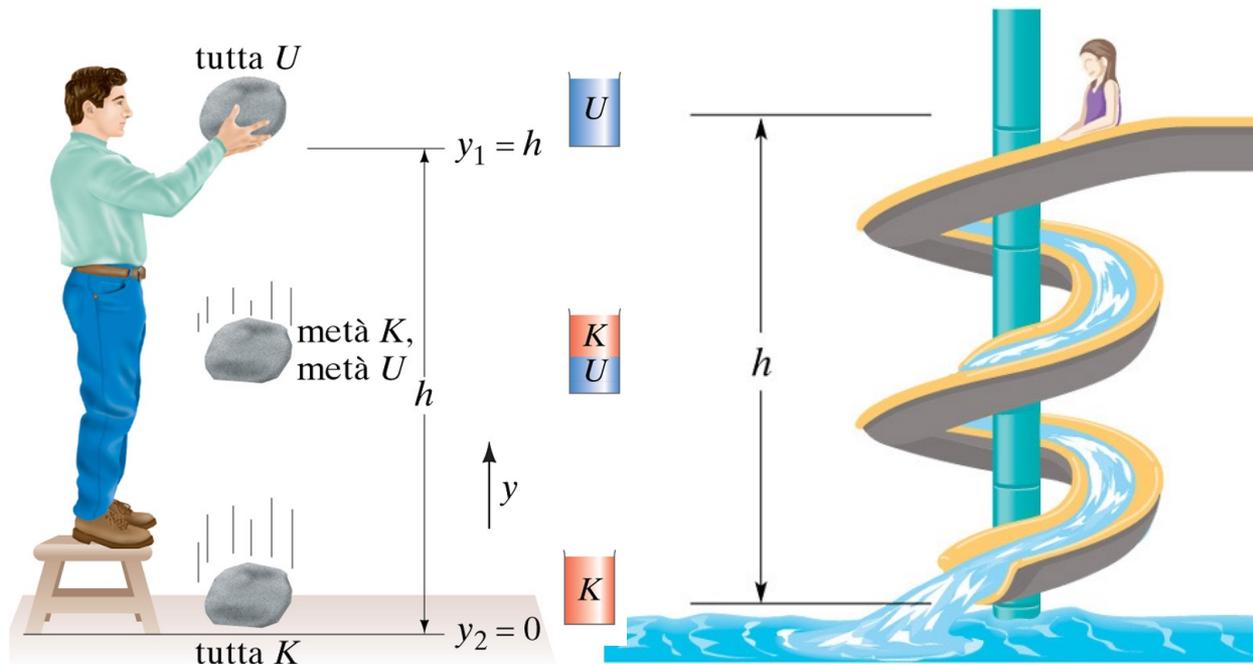


# Principio di Conservazione dell'Energia Meccanica Totale

Il “Principio di conservazione dell'energia meccanica totale” può essere enunciato nel modo seguente:

*Quando in un sistema isolato agiscono solo forze conservative, l'energia cinetica e l'energia potenziale prese singolarmente possono variare, ma la loro somma, cioè l'energia meccanica totale del sistema, non cambia ma si mantiene costante nel tempo:*

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \quad \rightarrow \quad E = \text{costante}$$



# Forze elastiche: la Legge di Hooke

Un altro tipo molto comune di **energia potenziale** è quella associata a **forze di tipo elastico**, che sono anch'esse **conservative** e riguardano moltissime applicazioni pratiche.

Consideriamo una normale **molla a spirale metallica** nella sua posizione di riposo o **equilibrio** (a). Abbiamo già detto che una molla possiede energia potenziale quando è allungata (b) o compressa (c) perchè è in grado di compiere lavoro su altri corpi.

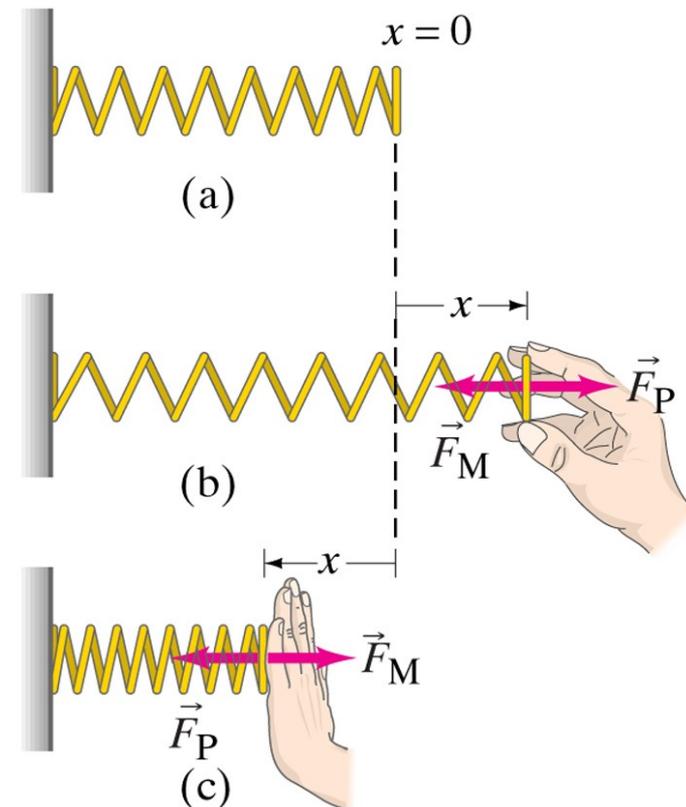
Si può verificare **sperimentalmente** che se vogliamo comprimere o estendere la molla di un tratto  $x$  rispetto alla sua posizione di equilibrio ( $x=0$ ), contrastando la forza elastica  $\vec{F}_M$ , occorre applicare una forza esterna  $\vec{F}_P=kx$ , cioè una **forza direttamente proporzionale allo spostamento  $x$**  (e con il suo stesso verso). Il parametro  $k$  è detto **costante elastica** della molla e ne quantifica la rigidità.

Se ne deduce che, al contrario della forza peso (che resta sempre costante), **la forza elastica aumenta linearmente con lo spostamento** in quanto la **molla** compressa o allungata esercita una forza  $\vec{F}_M = -kx$ , uguale ed opposta a quella esterna, che tende a riportare la molla nella sua posizione di equilibrio ( $x=0$ ). Per questo viene detta '**forza di richiamo**'.

L'equazione  $F_M = -kx$  è nota come "**Legge di Hooke**" ed è la relazione più semplice in grado di descrivere, con buona approssimazione, il comportamento dei **materiali elastici**.



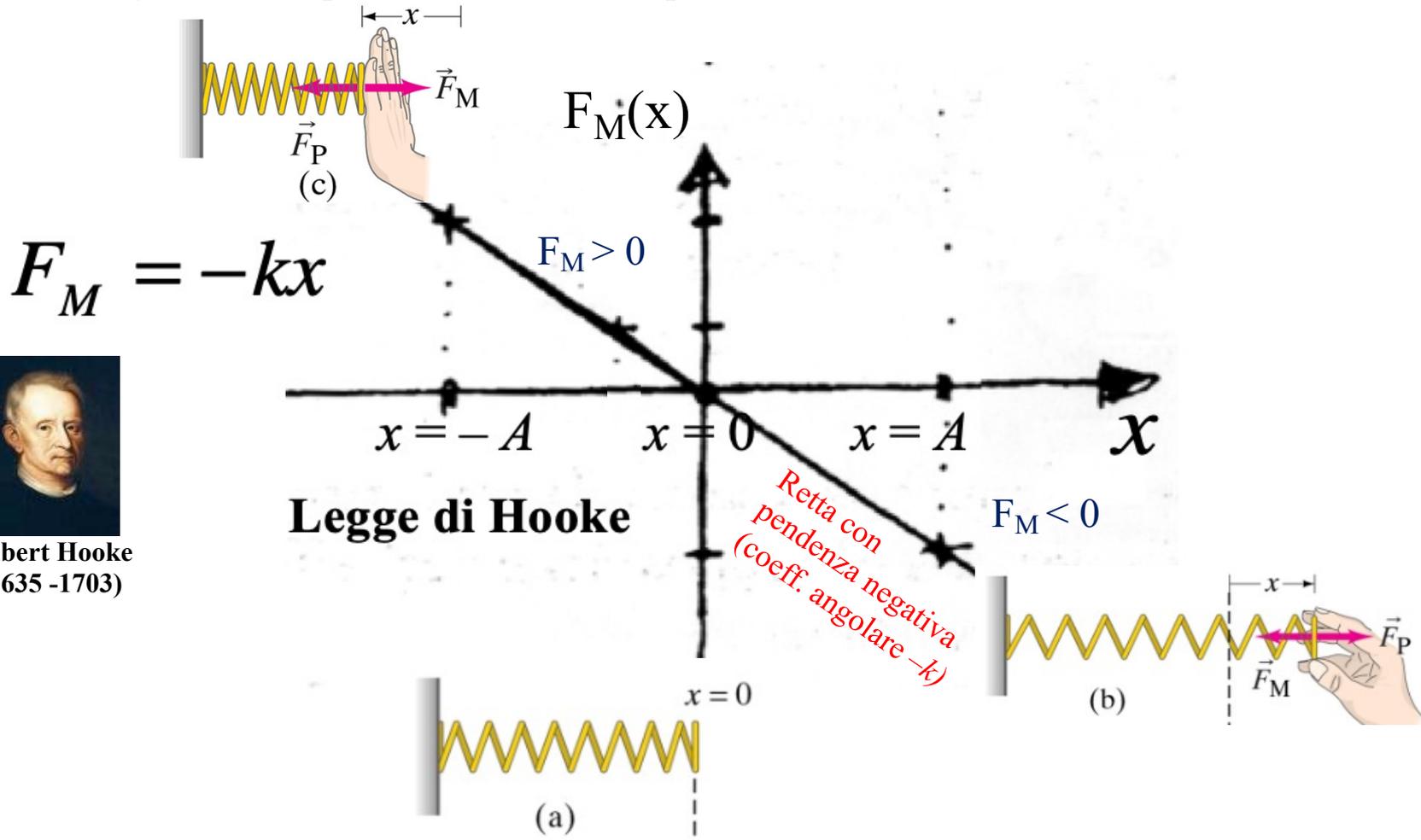
Robert Hooke  
(1635 -1703)



# Forze elastiche: la Legge di Hooke

Un altro tipo molto comune di **energia potenziale** è quella associata a **forze di tipo elastico**, che sono anch'esse **conservative** e riguardano moltissime applicazioni pratiche.

Consideriamo una normale **molla a spirale metallica** nella sua posizione di riposo o **equilibrio** (a). Abbiamo già detto che una molla possiede energia potenziale quando è allungata (b) o compressa (c) perchè è in grado di compiere lavoro su altri corpi.



Robert Hooke  
(1635 -1703)

# Lavoro ed Energia Potenziale Elastica di una Molla

Riassumendo, dunque, a differenza della forza di gravità che sappiamo essere pressoché costante sulla superficie terrestre, la **forza esterna**  $F_P$  necessaria per comprimere o allungare una molla non è affatto costante ma **crece linearmente con lo spostamento**  $x$  della molla dalla sua posizione di equilibrio.

Per calcolare il **lavoro** necessario per allungare o comprimere la molla di una quantità  $x$  potremmo essere tentati di usare l'equazione  $W=F_P x$ , ma quest'ultima vale solo per forze costanti mentre la forza elastica non lo è. Poiché però durante l'allungamento  $F_P$  varia **linearmente** da 0 a  $kx_F$ , essendo  $x_F$  l'allungamento finale, è possibile calcolare la **forza media** come (togliendo per semplicità il pedice  $F$  dalla  $x$ ):

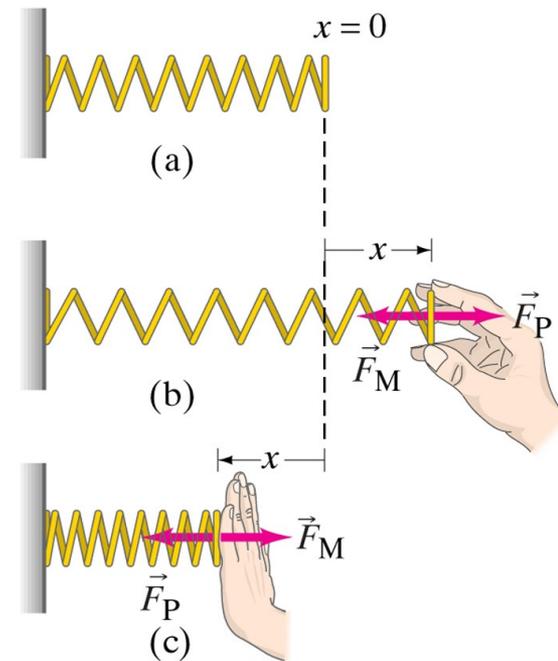
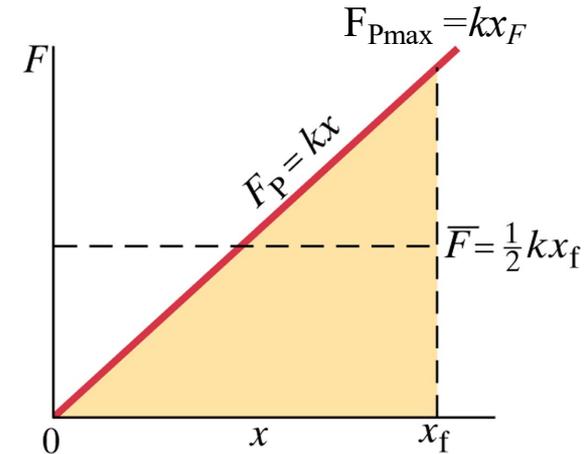
$$\bar{F} = \frac{1}{2}[0 + kx] = \frac{1}{2}kx$$

Essendo la forza media, per definizione, costante, ed essendo essa parallela allo spostamento, possiamo finalmente ricavare il **lavoro**:

$$W_{est} = \bar{F}x = \left(\frac{1}{2}kx\right)(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

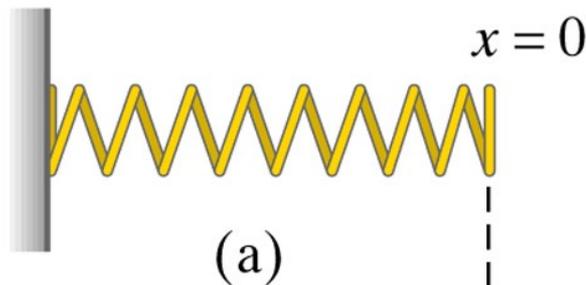
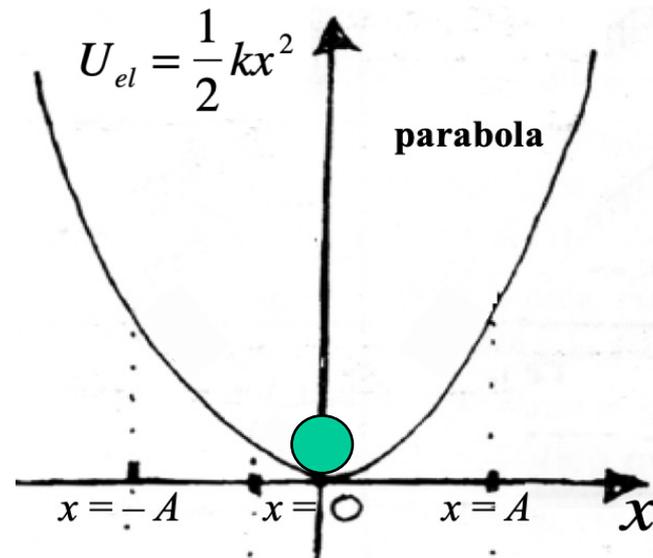
da cui, essendo (come sappiamo) il lavoro compiuto dalla forza esterna uguale alla variazione di **energia potenziale elastica** della molla, e ponendo  $U = 0$  ad  $x = 0$ , avremo:

$$W_{est} = U_{el} - 0 = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$$



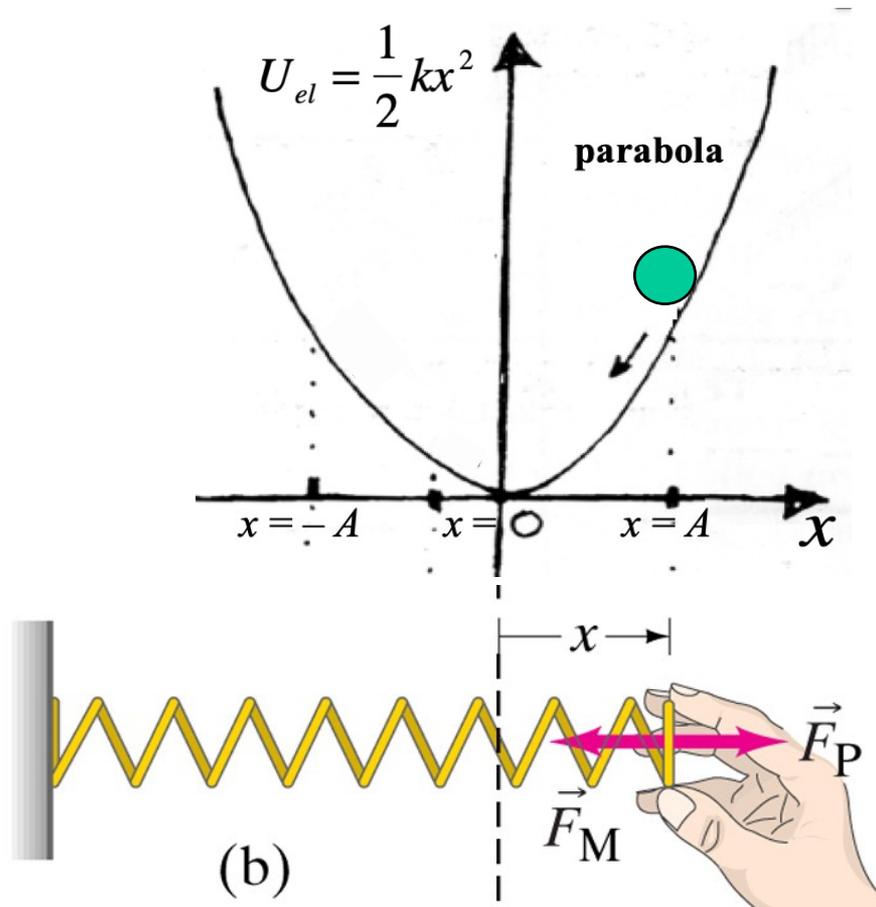
# Energia Potenziale Elastica di una Molla

Se rappresentiamo in un grafico l'energia potenziale elastica  $U(x)$  in funzione dello spostamento  $x$  (positivo o negativo) rispetto alla posizione di equilibrio ( $x=0$ ) vediamo che ha l'aspetto di una **parabola rovesciata**, detta anche «**buca di potenziale**», in cui una **pallina immaginaria**, in grado di scivolare sotto l'effetto della forza peso (vedi grafico sottostante), produrrebbe delle **oscillazioni** analoghe a quelle di un **oggetto** di massa  $m$  attaccato alla molla...



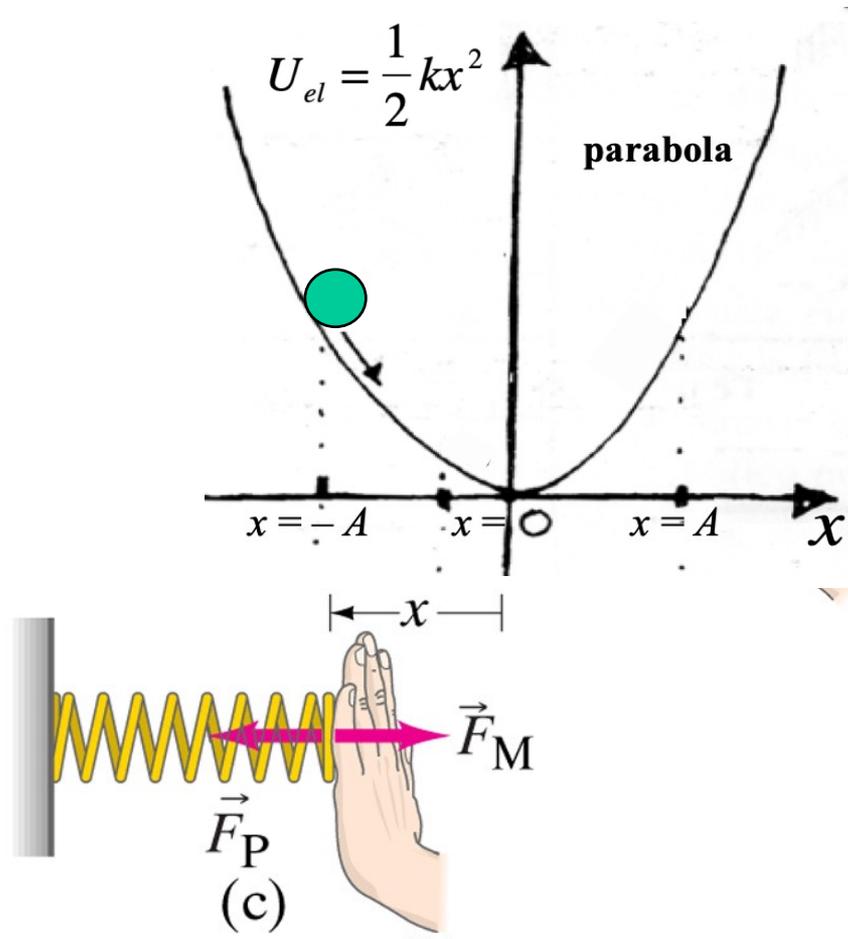
# Energia Potenziale Elastica di una Molla

Se rappresentiamo in un grafico l'energia potenziale elastica  $U(x)$  in funzione dello spostamento  $x$  (positivo o negativo) rispetto alla posizione di equilibrio ( $x=0$ ) vediamo che ha l'aspetto di una **parabola rovesciata**, detta anche «**buca di potenziale**», in cui una **pallina immaginaria**, in grado di scivolare sotto l'effetto della forza peso (vedi grafico sottostante), produrrebbe delle **oscillazioni** analoghe a quelle di un **oggetto** di massa  $m$  attaccato alla molla...



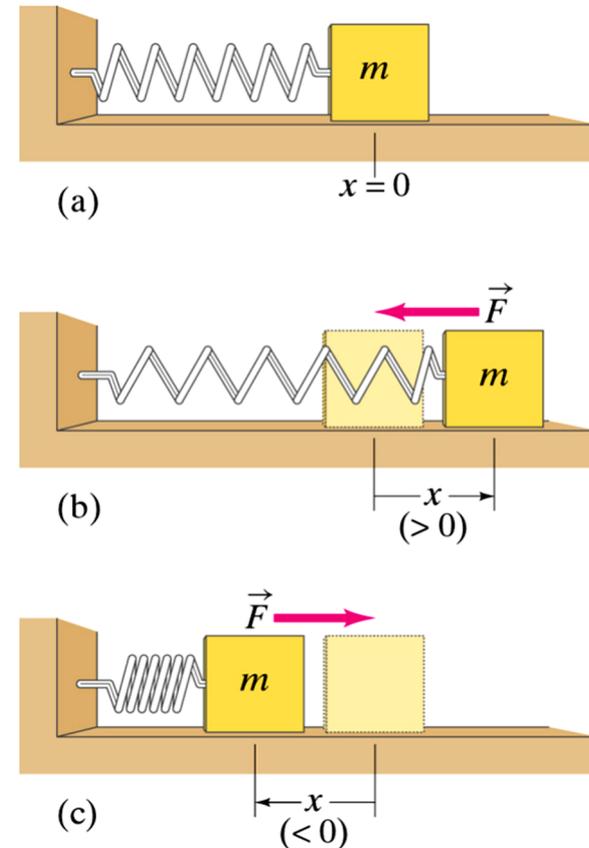
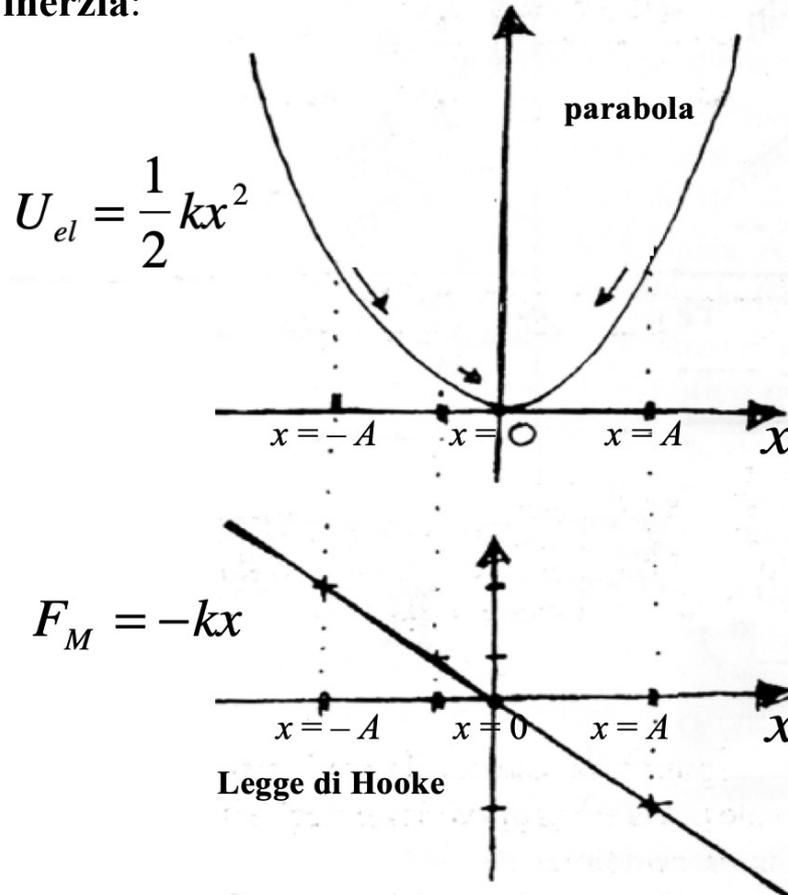
# Energia Potenziale Elastica di una Molla

Se rappresentiamo in un grafico l'**energia potenziale elastica**  $U(x)$  in funzione dello **spostamento**  $x$  (positivo o negativo) rispetto alla posizione di equilibrio ( $x=0$ ) vediamo che ha l'aspetto di una **parabola rovesciata**, detta anche «**buca di potenziale**», in cui una **pallina immaginaria**, in grado di scivolare sotto l'effetto della forza peso (vedi grafico sottostante), produrrebbe delle **oscillazioni** analoghe a quelle di un **oggetto** di massa  $m$  attaccato alla molla...



# L'Oscillatore Armonico

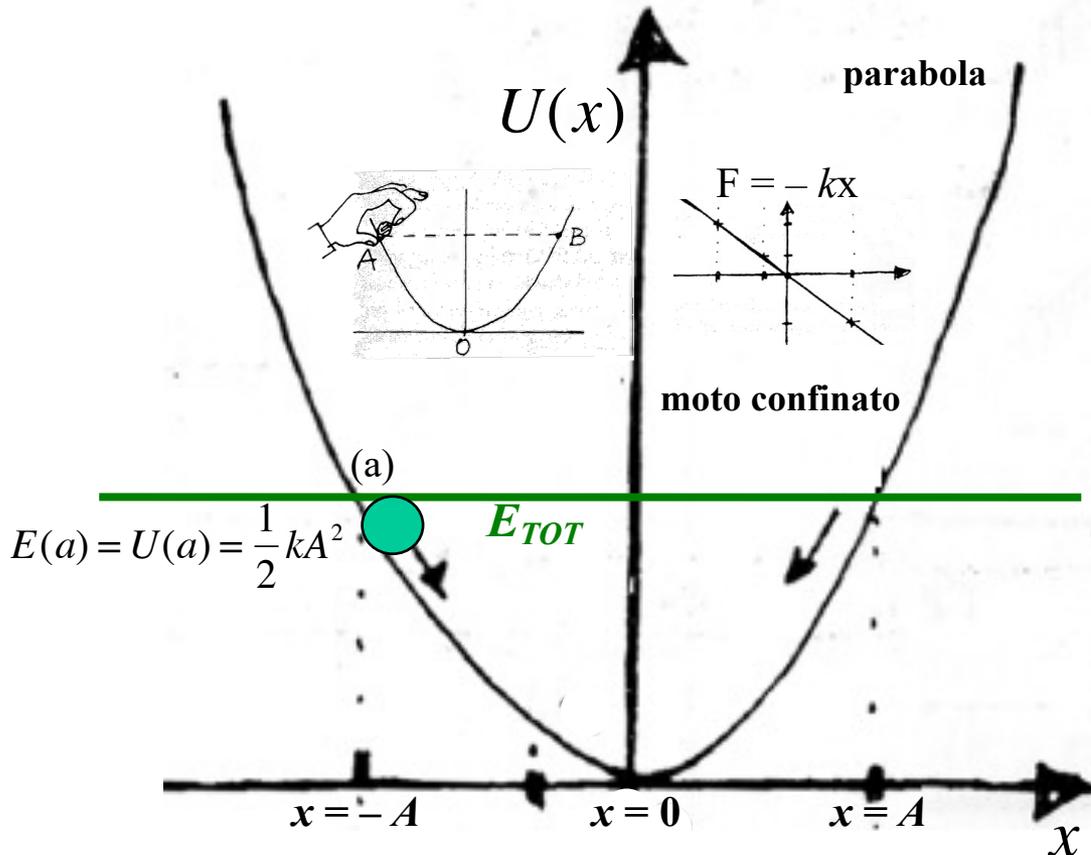
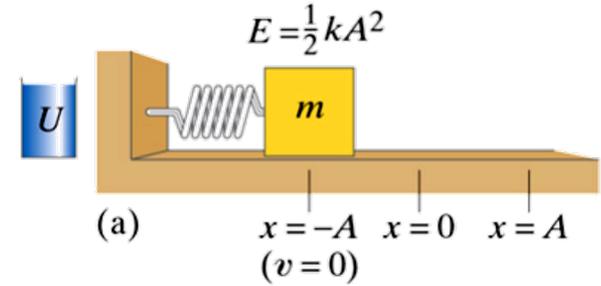
In assenza di attriti, il principio di conservazione dell'energia si applica infatti anche ad una **massa  $m$**  fissata all'estremità di una **molla a spirale**, che prende il nome di '**oscillatore armonico**'. Infatti, sappiamo che la massa è soggetta alla **forza di richiamo** esercitata dalla molla quando quest'ultima viene compressa o allungata di una quantità  $x$  (spostamento) rispetto alla sua posizione di equilibrio. Tale forza segue la **Legge di Hooke**,  $F = -kx$ , cioè è proporzionale allo spostamento, e questo provoca un'**oscillazione della massa** ad essa fissata, grazie anche alla sua **inerzia**:



# Energia totale di un Oscillatore Armonico

Ad ogni istante di tempo, l'energia totale dell'**oscillatore armonico** è costante e può scriversi come somma dell'energia cinetica  $K(t)$  e di quella potenziale  $U(t)$ :

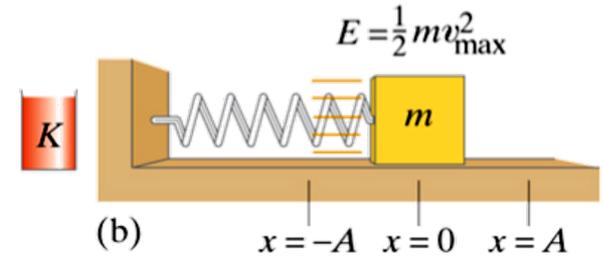
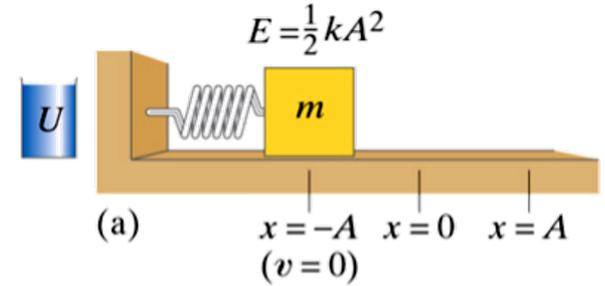
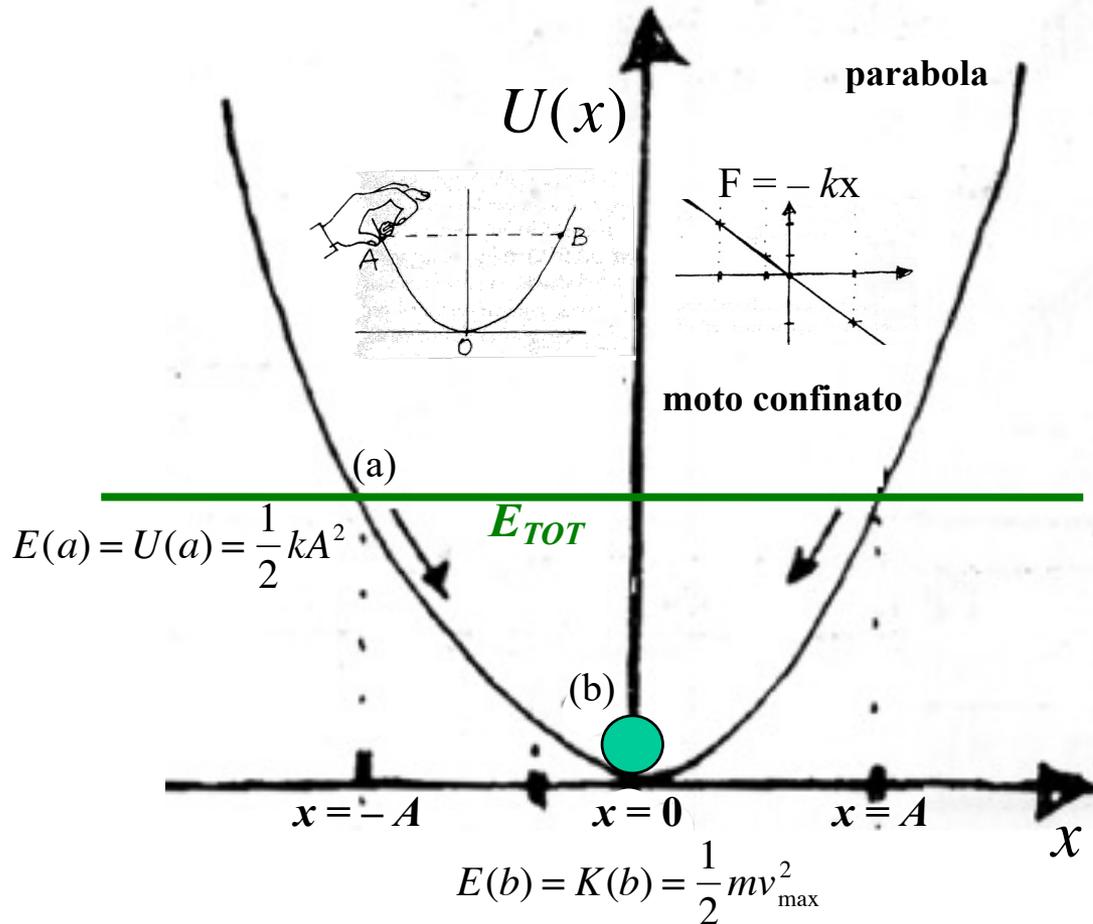
$$E_{TOT} = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$



# Energia totale di un Oscillatore Armonico

Ad ogni istante di tempo, l'energia totale dell'**oscillatore armonico** è costante e può scriversi come somma dell'energia cinetica  $K(t)$  e di quella potenziale  $U(t)$ :

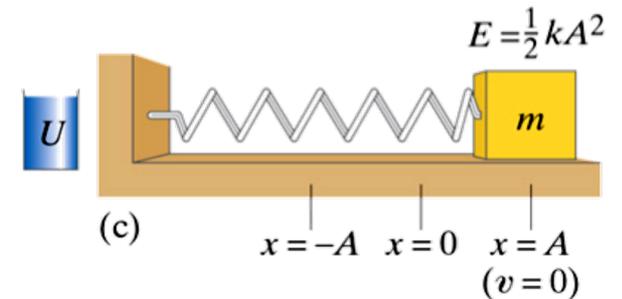
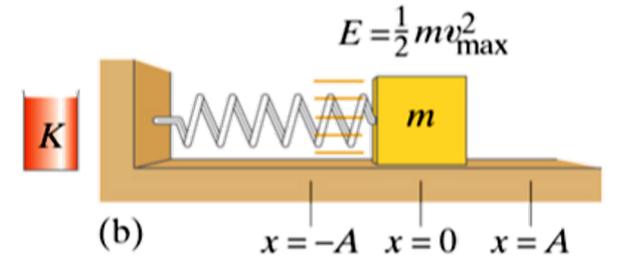
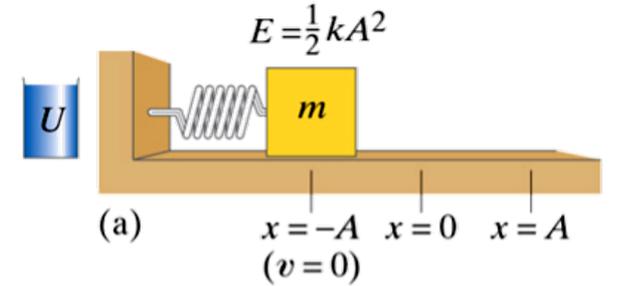
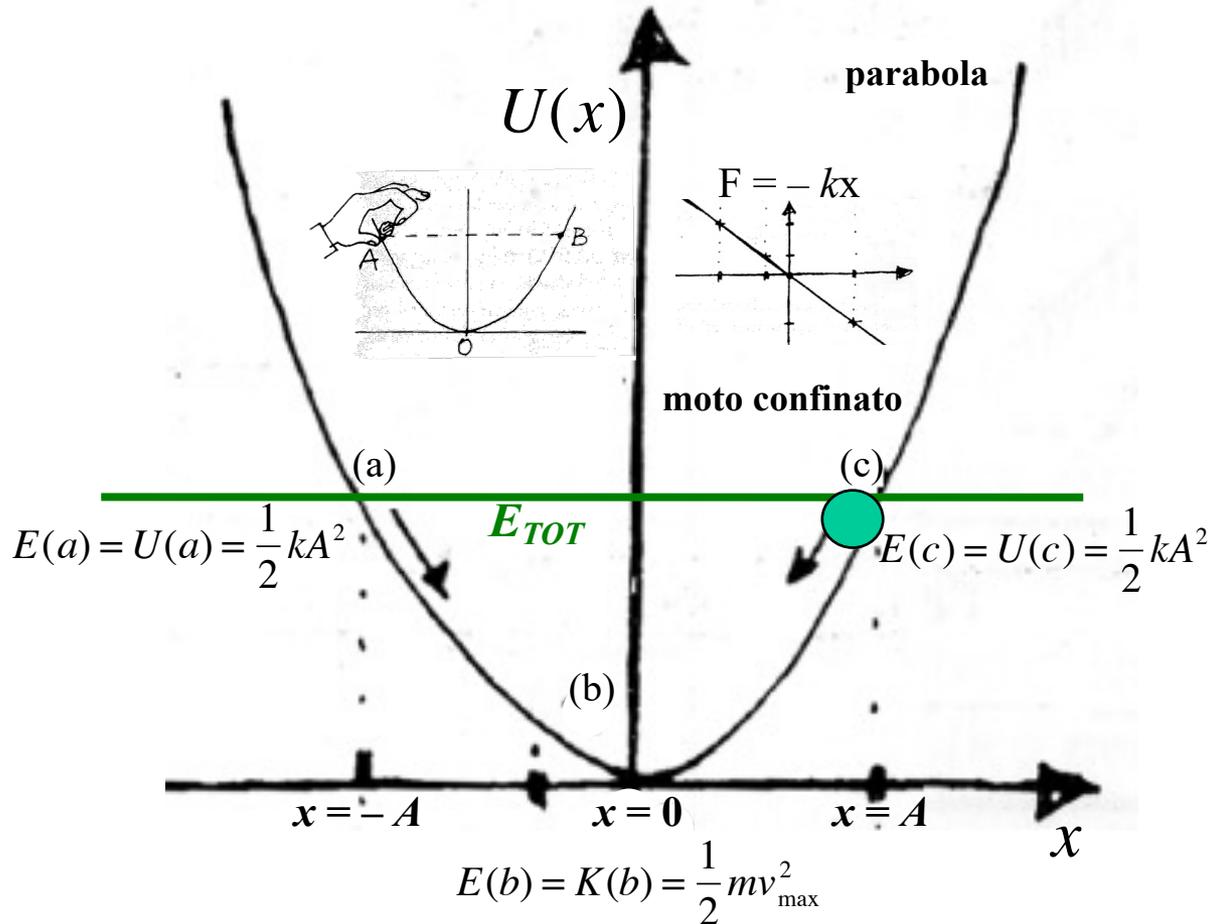
$$E_{TOT} = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$



# Energia totale di un Oscillatore Armonico

Ad ogni istante di tempo, l'energia totale dell'**oscillatore armonico** è costante e può scriversi come somma dell'energia cinetica  $K(t)$  e di quella potenziale  $U(t)$ :

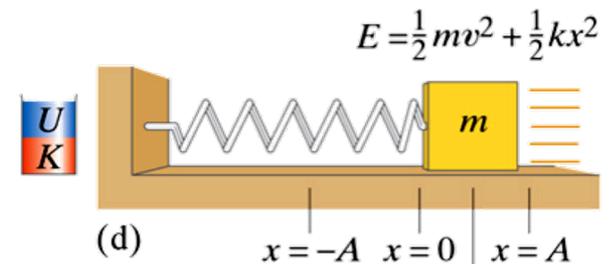
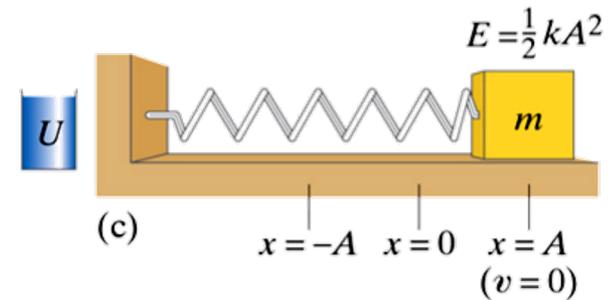
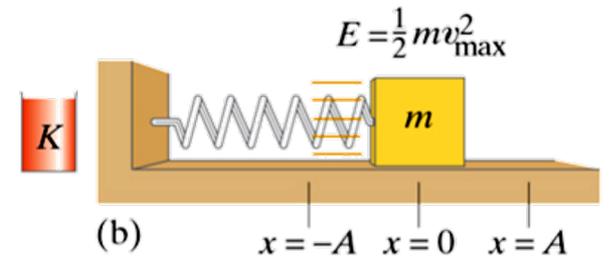
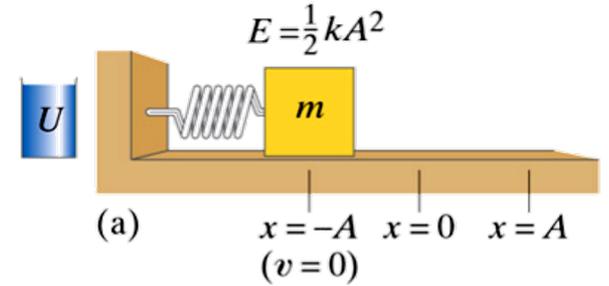
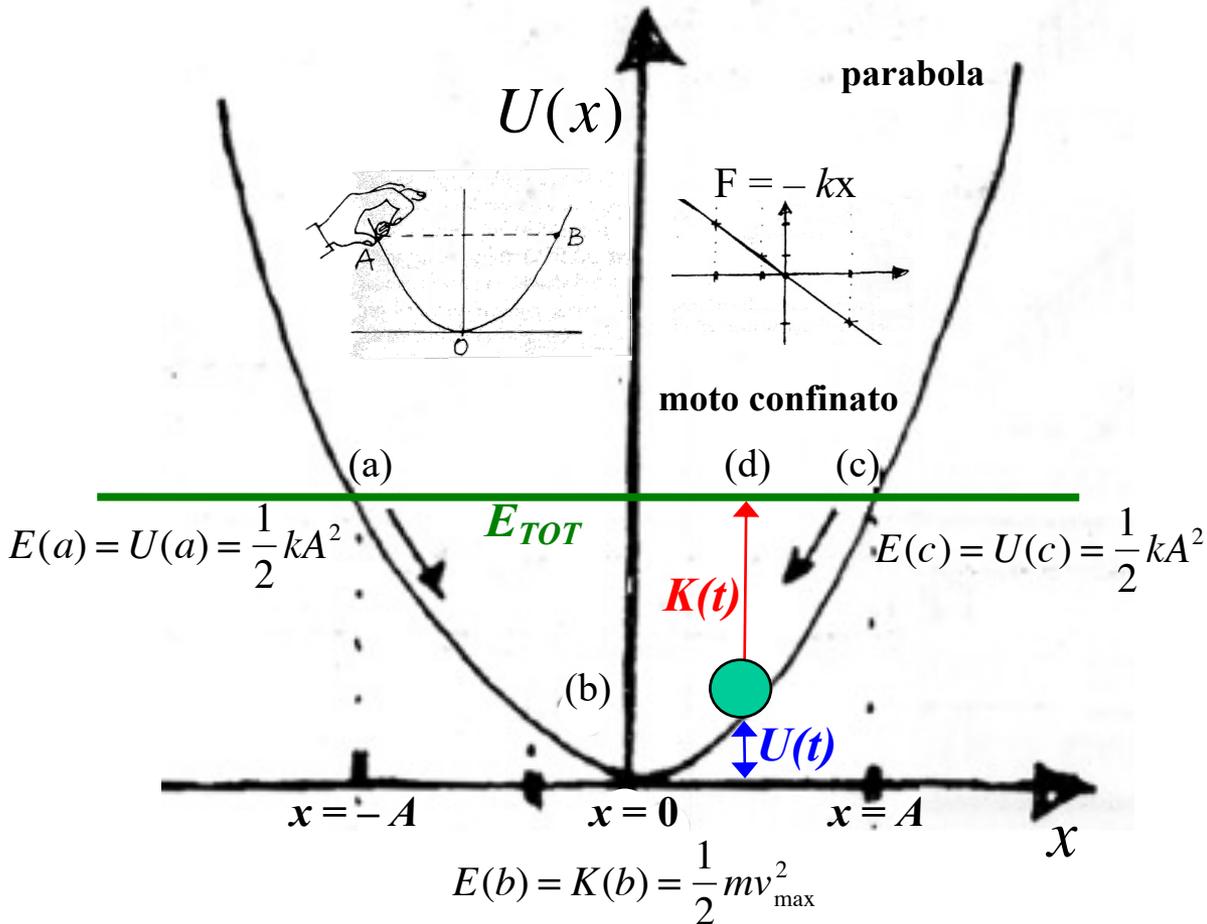
$$E_{TOT} = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$



# Energia totale di un Oscillatore Armonico

Ad ogni istante di tempo, l'energia totale dell'**oscillatore armonico** è costante e può scriversi come somma dell'energia cinetica  $K(t)$  e di quella potenziale  $U(t)$ :

$$E_{TOT} = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$



# Simulazione Oscillatore Armonico (anche smorzato)

OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO ( $m=1$ )

$$d(\text{displacement})/dt = \text{velocity}$$
$$d(\text{velocity})/dt = -\text{beta} * \text{velocity} - \text{kappa} * \text{displacement}$$

time	K	V	=	Total Energy
26.5	79.79	461.69		541.48

SETUP    NEW INITIAL CONDITION    GO



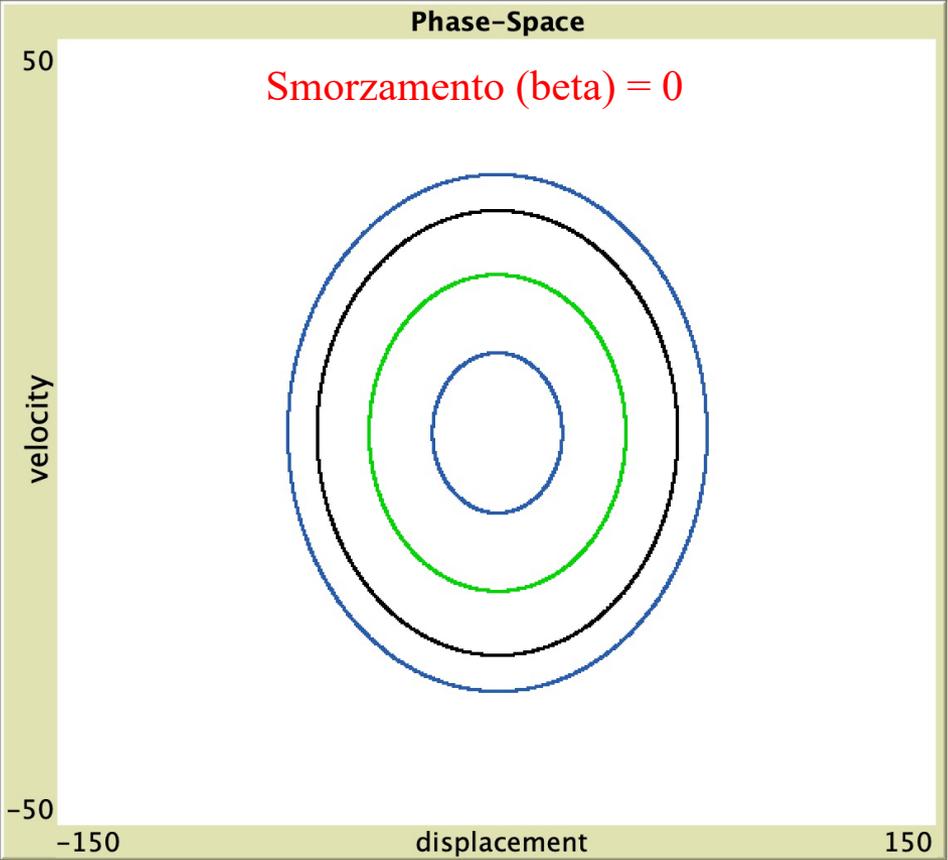
initial-displacement    -71.7

initial-velocity    0.0

damping strenght    elastic constant

beta    0.000    kappa    0.211

dt = Integration Step    0.010



# Simulazione Oscillatore Armonico (anche smorzato)

OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO ( $m=1$ )

$$d(\text{displacement})/dt = \text{velocity}$$

$$d(\text{velocity})/dt = -\text{beta} * \text{velocity} - \text{kappa} * \text{displacement}$$

time  
148.02

K  
41.7

V  
8.44

Total Energy  
50.14

SETUP    NEW INITIAL CONDITION    GO



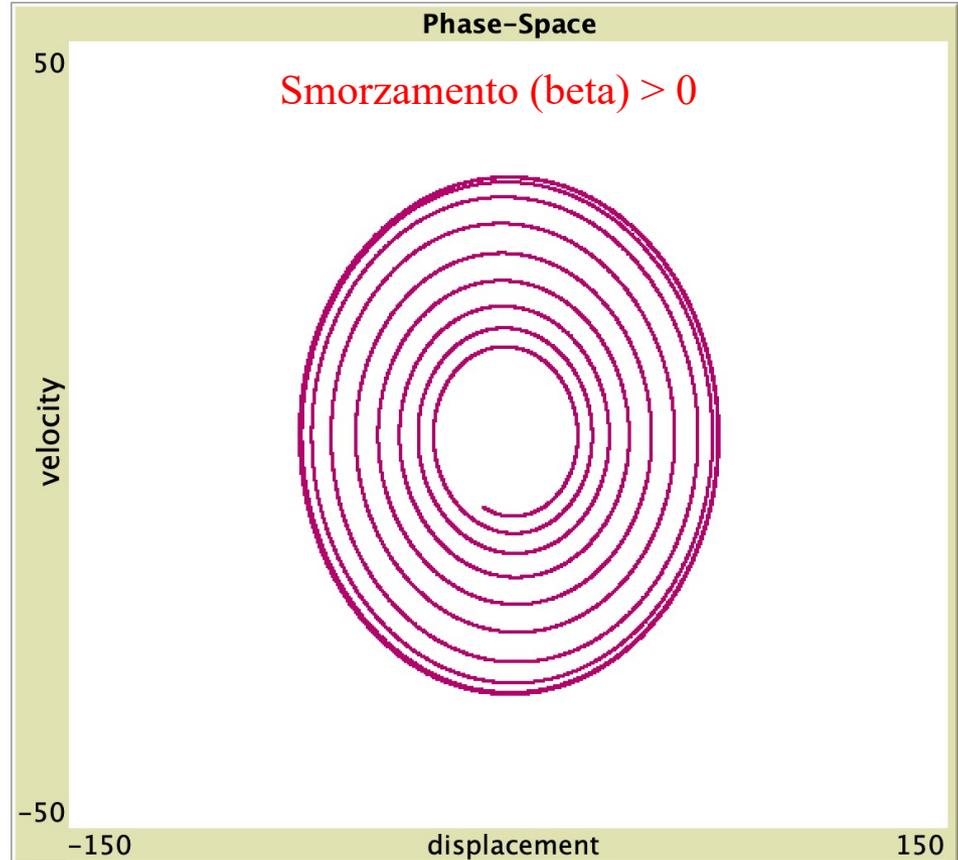
initial-displacement    -71.7

initial-velocity    0.0

damping strenght    elastic constant

beta    0.028    kappa    0.211

dt = Integration Step    0.010



# Acrobati che saltano e conservazione dell'energia

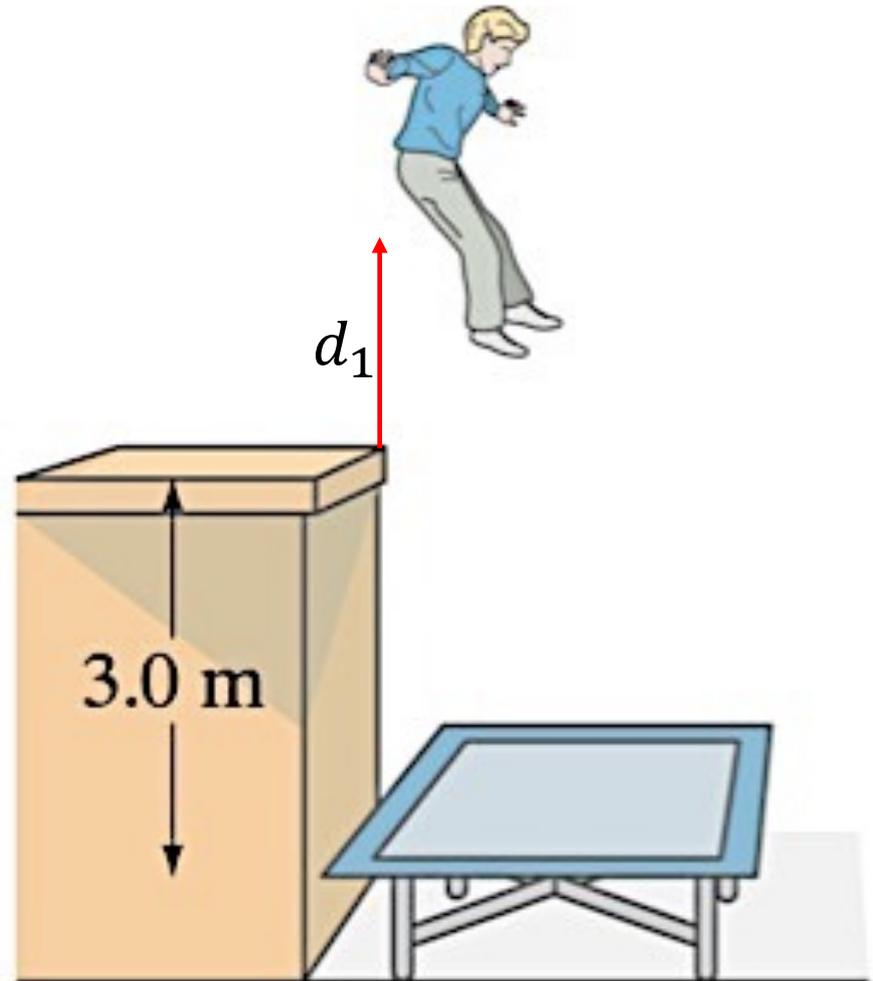
A volte alcuni esercizi possono essere risolti utilizzando solo le leggi della cinematica e della dinamica ...

## Esercizio

L'acrobata di un circo, di massa 65 Kg, per esibirsi su un tappeto elastico salta verticalmente verso l'alto dalla cima della piattaforma in figura con una velocità di 5.0 m/s. (a) Quale sarà la sua velocità nell'atterrare sul tappeto elastico, 3.0 m più in basso?

Cinematica 1D:  $0 = v_{in}^2 - 2gd_1$

$$d_1 = \frac{v_{in}^2}{2g} = \frac{\left(\frac{5m}{s}\right)^2}{2\left(\frac{9.8m}{s^2}\right)} = \frac{25 m^2/s^2}{19.6 m/s^2} = 1.28m$$



Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

# Acrobati che saltano e conservazione dell'energia

A volte alcuni esercizi possono essere risolti utilizzando solo le leggi della cinematica e della dinamica ...

## Esercizio

L'acrobata di un circo, di massa 65 Kg, per esibirsi su un tappeto elastico salta verticalmente verso l'alto dalla cima della piattaforma in figura con una velocità di 5.0 m/s. (a) Quale sarà la sua velocità nell'atterrare sul tappeto elastico, 3.0 m più in basso?

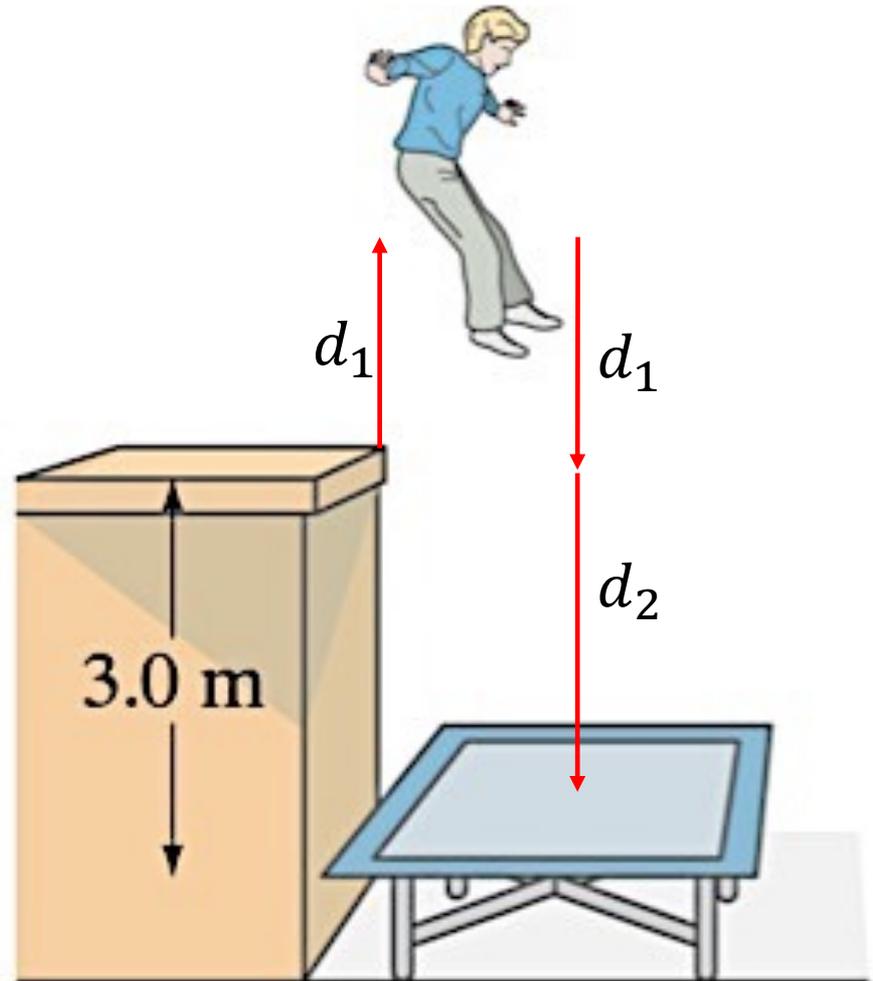
**Cinematica 1D:**  $0 = v_{in}^2 - 2gd_1$

$$d_1 = \frac{v_{in}^2}{2g} = \frac{\left(\frac{5m}{s}\right)^2}{2\left(\frac{9.8m}{s^2}\right)} = \frac{25 m^2/s^2}{19.6 m/s^2} = 1.28m$$

**Conservazione energia:**

$$0 + mg(d_1 + d_2) = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 + 0$$

$$v_{fin}^2 = \sqrt{2g(d_1 + d_2)} = 9.16 \frac{m}{s}$$



Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

# Acrobati che saltano e conservazione dell'energia

A volte alcuni esercizi possono essere risolti utilizzando solo le leggi della cinematica e della dinamica ...

## Esercizio

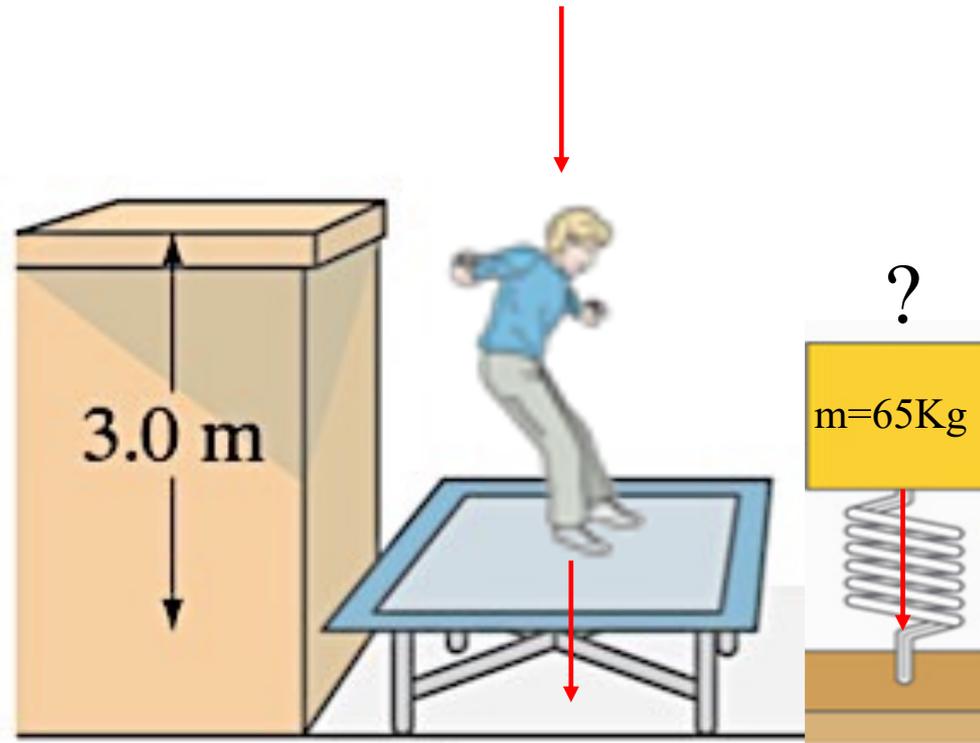
L'acrobata di un circo, di massa 65 Kg, per esibirsi su un tappeto elastico salta verticalmente verso l'alto dalla cima della piattaforma in figura con una velocità di 5.0 m/s. (a) Quale sarà la sua velocità nell'atterrare sul tappeto elastico, 3.0 m più in basso? (b) Se il tappeto elastico si comporta come una molla di costante elastica  $6.2 \cdot 10^4$  N/m, di quanto si abbasserà?

Legge di Hooke:  $F_M = -kx$

Equilibrio tra forze:

$$F_M = F_G \rightarrow kx = mg$$

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{65 \text{ Kg } 9.8 \text{ m/s}^2}{6.2 \cdot 10^4 \text{ N/m}} = 0.01 \text{ m}$$



**?** Sembra che la velocità di arrivo sul tappeto elastico non conti! Ma questo è strano...

# Acrobati che saltano e conservazione dell'energia

Altre volte invece richiedono esplicitamente l'utilizzo del concetto di energia...

## Esercizio

L'acrobata di un circo, di massa 65 Kg, per esibirsi su un tappeto elastico salta verticalmente verso l'alto dalla cima della piattaforma in figura con una velocità di 5.0 m/s. (a) Quale sarà la sua velocità nell'atterrare sul tappeto elastico, 3.0 m più in basso? (b) Se il tappeto elastico si comporta come una molla di costante elastica  $6.2 \cdot 10^4$  N/m, di quanto si abasserà?

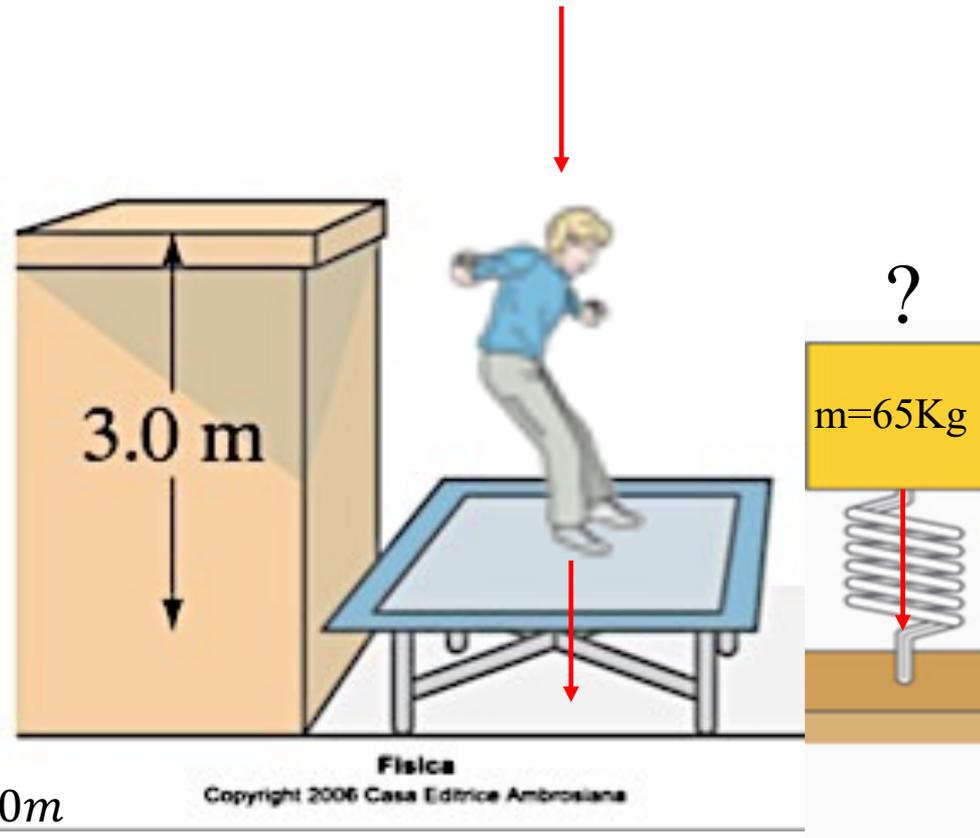
Energia potenziale  
Elastica:

$$U_{el} = \frac{1}{2} kx^2$$

Conservazione energia:

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv_{fin}^2$$

$$x^2 = \frac{mv_{fin}^2}{k} \rightarrow x = \sqrt{\frac{65\text{Kg} (9.16 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{6.2 \cdot 10^4 \text{ N/m}}} = 0.30\text{m}$$



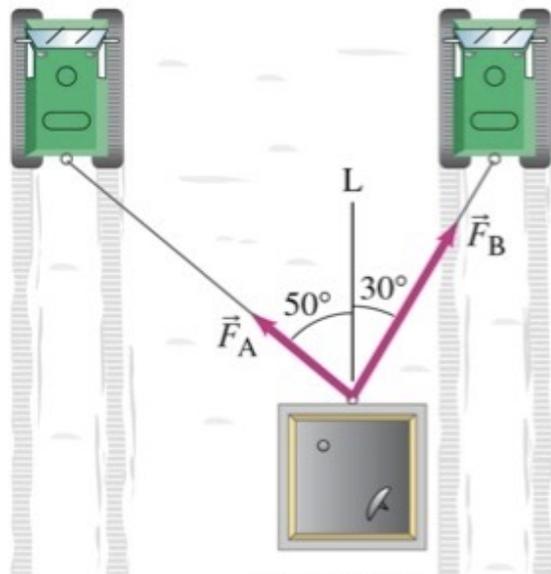
# Esercizi Dinamica

## Esercizio 1

(a) Qual'è l'accelerazione di due paracadutisti in caduta libera (massa di 132 Kg, inclusi i paracadute) quando la forza diretta verso l'alto dovuta alla resistenza dell'aria è uguale a un quarto del loro peso? (b) Dopo aver aperto il paracadute, i due paracadutisti discendono tranquillamente verso il terreno a velocità costante. Qual'è ora la forza dovuta alla resistenza dell'aria sui paracadutisti e sui loro paracadute?



(a)  $-7.4\text{m/s}^2$  (b)  $1.29 \cdot 10^3\text{N}$



Vista dall'alto  
Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

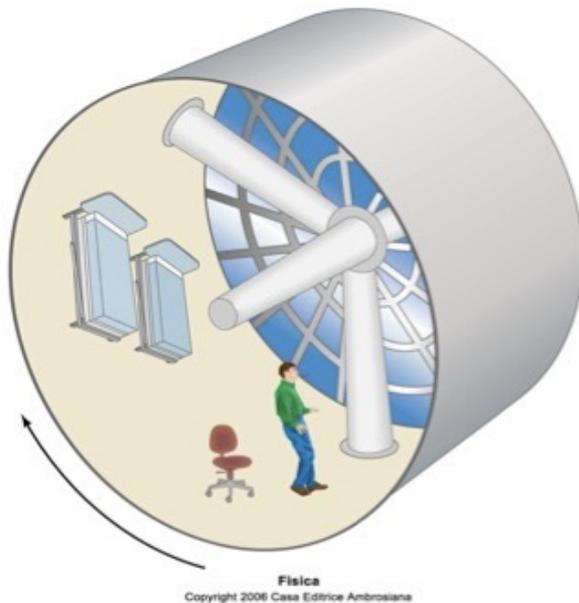
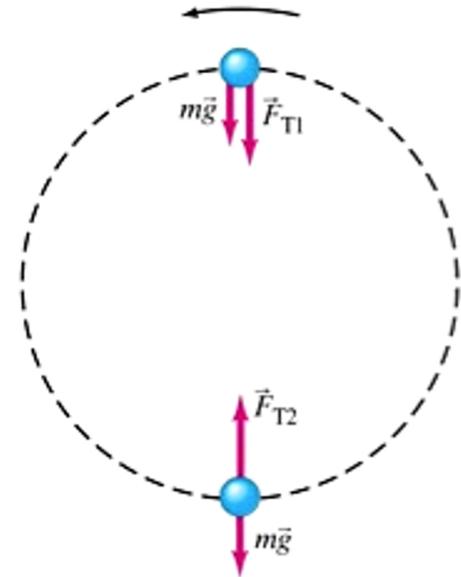
## Esercizio 2

Due gatti delle nevi rimorchiano una unità di alloggiamento in una nuova località alla base McMurdo in Antartide, come mostrato in figura. La somma delle due forze  $\vec{F}_A$  e  $\vec{F}_B$  esercitate sull'unità dai cavi orizzontali è parallela alla linea L, e  $F_A = 4500\text{ N}$ . Determinate  $F_B$  e il modulo di  $\vec{F}_A + \vec{F}_B$ .

(a)  $6.9 \cdot 10^3\text{N}$  (b)  $8.9 \cdot 10^3\text{N}$

### Esercizio 5

Una pallina, legata all'estremità di una corda, viene fatta roteare a velocità costante su una circonferenza verticale di raggio 72.0 cm, come mostrato in figura. Se la sua velocità è di 4.00 m/s e la sua massa è 0.300 Kg, calcolate la tensione della corda quando la palla si trova (a) nel punto più alto e (b) nel punto più basso del suo percorso.



### Esercizio 6

Con che rapidità deve ruotare la nave spaziale cilindrica mostrata in figura affinché gli occupanti avvertano una gravità simulata pari a  $0.60g$ ? Assumete che la nave spaziale abbia diametro 32 m, e date la risposta in termini di tempo necessario per una rivoluzione.



Fisica  
Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

### Esercizio 7

Tarzan pensa di superare una gola oscillando appeso a una liana, come mostrato in figura. Se le sue braccia sono in grado di esercitare una forza di 1400 N sulla fune, qual'è la massima velocità che può sopportare nel punto più basso della sua traiettoria? La sua massa è 80 Kg e la liana è lunga 5.5 m.



### Esercizio 8

Un pianoforte da 330 Kg scivola verso il basso per 3.6 m lungo un piano inclinato di  $28^\circ$  e viene mantenuto a velocità costante da un uomo che lo frena spingendo indietro parallelamente al piano inclinato. Il coefficiente di attrito effettivo è 0.40. Calcolate: (a) la forza esercitata dall'uomo sul pianoforte; (b) il lavoro compiuto dall'uomo sul pianoforte; (c) il lavoro compiuto dalla forza di attrito; (d) il lavoro compiuto dalla forza di gravità; (e) il lavoro totale compiuto sul pianoforte.

### Esercizio 9

Il carrello delle montagne russe mostrato nella figura qui accanto viene trasportato fino al punto 1, dove è abbandonato da fermo. Supponendo che non ci sia attrito, calcolate la velocità nei punti 2, 3 e 4.

