

Lavoro ed Energia

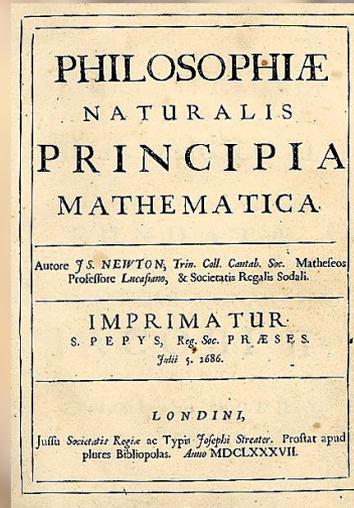
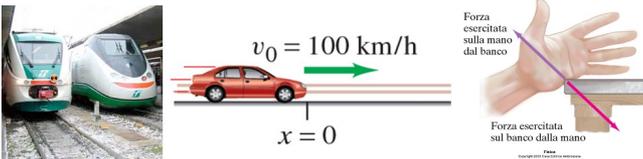
Le Tre Leggi della Dinamica

1. Ogni corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme fino a quando non agisca su di esso una forza risultante diversa da zero -> Sistemi di riferimento inerziali e non inerziali

2. La forza netta agente su un corpo è uguale al prodotto della sua massa m per l'accelerazione \vec{a} assunta dal corpo:

$$\vec{F}_{net} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (1) \quad \longrightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m}$$

3. Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

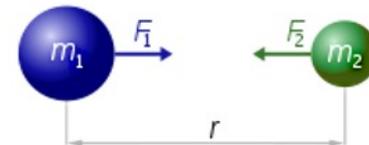


La Legge di Gravitazione Universale

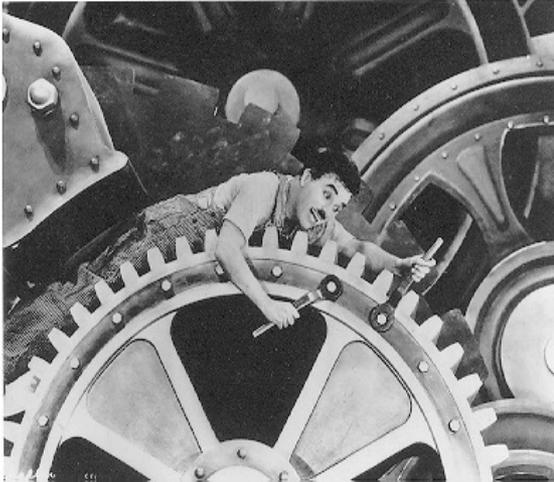
Estendendo **audacemente** le sue intuizioni sul sistema Terra-Luna al caso di due corpi qualunque dell'Universo, dotati di **masse** m_1 ed m_2 e posti ad una **distanza** reciproca r , Newton enunciò (nei "*Principia Mathematica*" del 1687) la sua celebre **legge di gravitazione universale**:

Ogni corpo dell'Universo attrae ogni altro corpo con una forza, agente lungo la linea che congiunge i centri dei due corpi, la cui intensità è direttamente proporzionale al prodotto delle rispettive masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra di esse:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



Lavoro compiuto da una Forza Costante



Il termine “**lavoro**” in fisica assume un significato molto preciso che elimina le **ambiguità** legate all’uso dello stesso termine nel linguaggio naturale.

Data una *forza costante* \vec{F} che, agendo su un corpo qualunque, produca uno *spostamento* \vec{d} del corpo medesimo, si definisce «*lavoro*» il *prodotto scalare dei vettori forza e spostamento*:

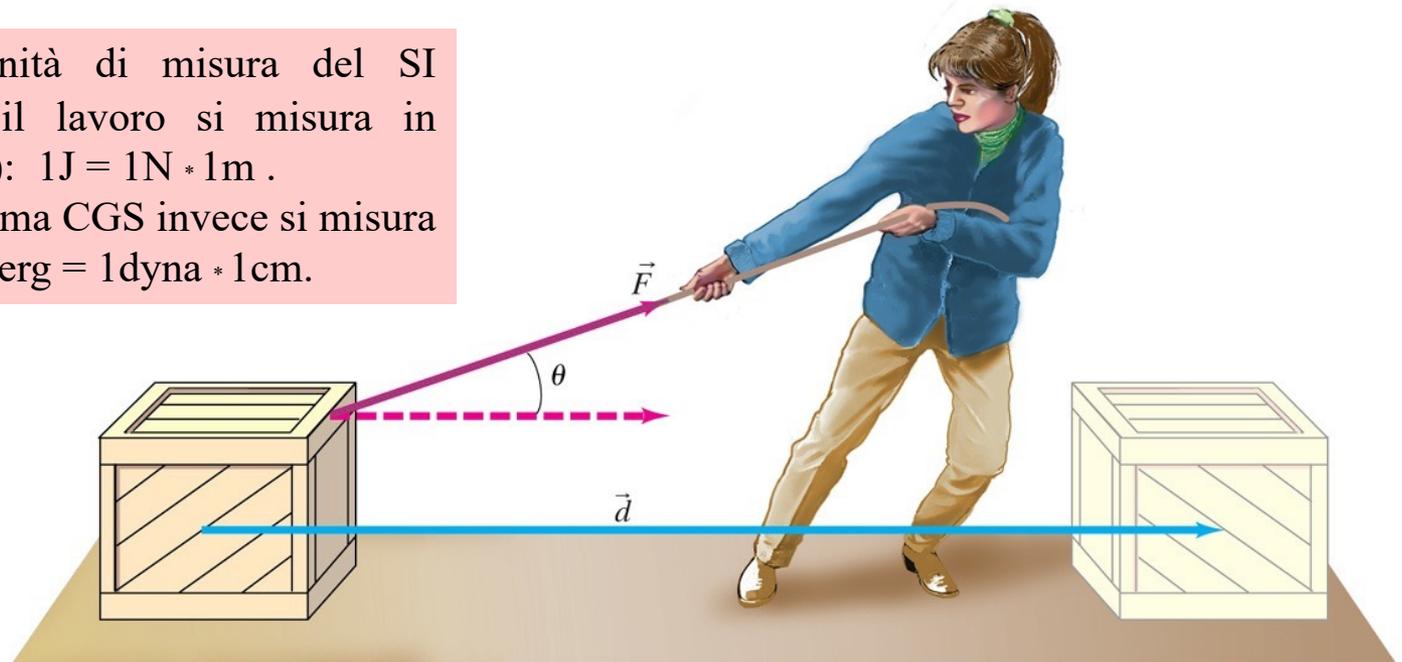
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$



James Joule

Nelle unità di misura del SI (MKS) il lavoro si misura in **Joule (J)**: $1\text{J} = 1\text{N} \cdot 1\text{m}$.

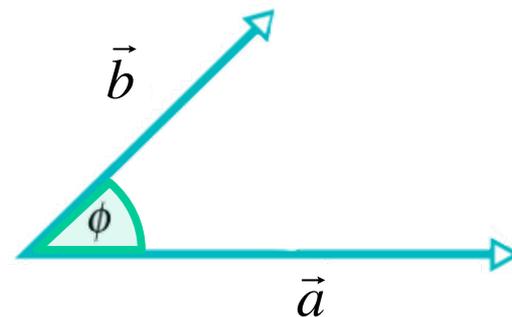
Nel sistema CGS invece si misura in **erg**: $1\text{erg} = 1\text{dyna} \cdot 1\text{cm}$.



Prodotto scalare di due vettori

Dati due vettori \vec{a} e \vec{b} , di moduli rispettivamente a e b e che formano un angolo Φ ($< 180^\circ$) l'uno rispetto all'altro, il loro **prodotto scalare** è definito dall'espressione:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi$$



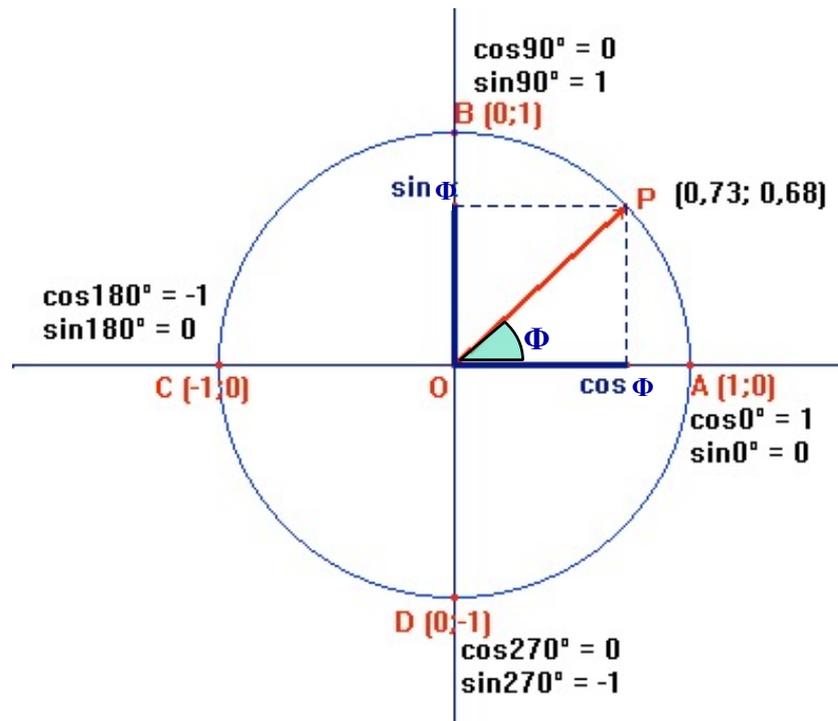
Tale prodotto si legge “*a scalar b*” ed evidentemente dà come risultato uno **scalare**, cioè un valore numerico che dipende dal valore dei **moduli** a e b e dal valore del **coseno** dell'angolo Φ (che è compreso tra 1 e -1).

Al variare dell'angolo Φ avremo dunque:

$$\phi = 0^\circ \rightarrow \cos \phi = 1 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = ab > 0$$

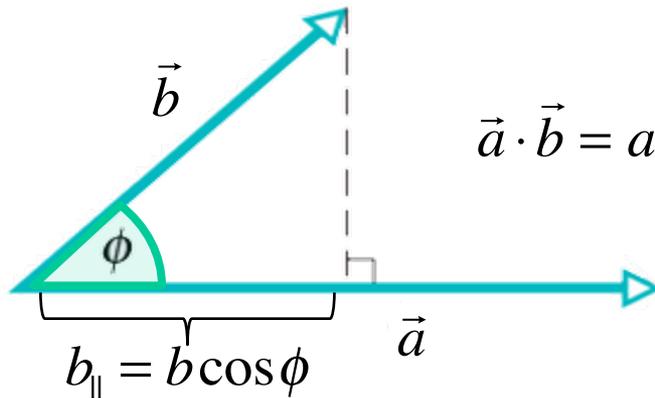
$$\phi = 180^\circ \rightarrow \cos \phi = -1 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -ab < 0$$

$$\phi = 90^\circ \rightarrow \cos \phi = 0 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



Calcolo del lavoro compiuto da una Forza Costante

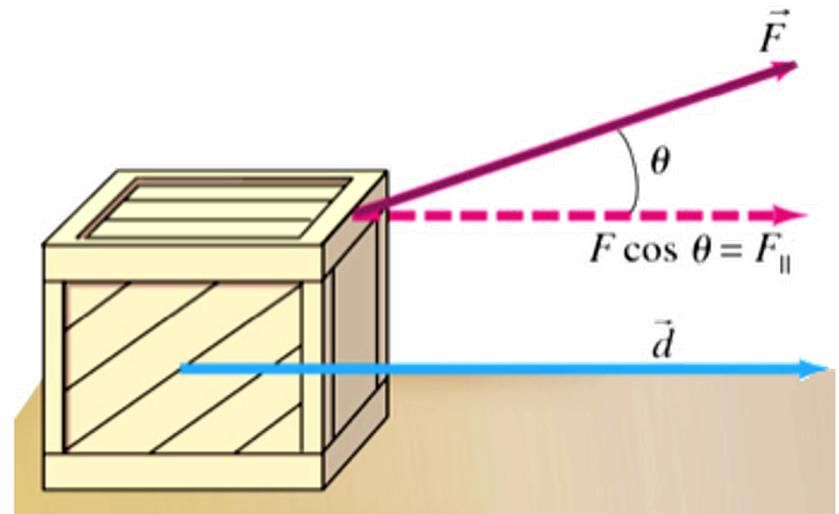
L'espressione del prodotto scalare ci dice che esso può essere considerato anche come il **prodotto del modulo di uno dei due vettori per la componente dell'altro vettore parallela alla direzione del primo**:



Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Ecco dunque che il lavoro che una **forza costante** \vec{F} compie per far percorrere ad un corpo uno **spostamento** \vec{d} , può essere così calcolato a partire dai moduli dei due vettori e dell'angolo che essi formano:

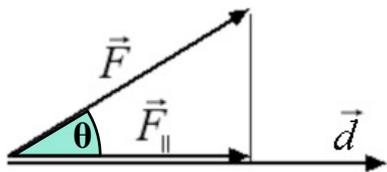
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \rightarrow W = Fd \cos \theta = F_{\parallel} d$$



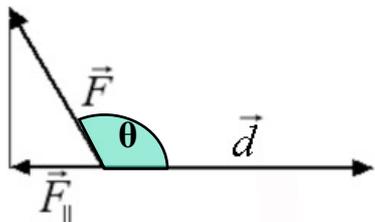
Proprietà del Lavoro di una Forza Costante

Il lavoro è quindi una grandezza scalare, definita da un valore numerico che dipenderà dalla componente F_{\parallel} della forza agente e che può essere sia **positivo** che **negativo**, a seconda che l'angolo θ tra forza e spostamento sia acuto o ottuso:

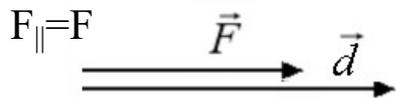
$$W = Fd \cos \theta = F_{\parallel} d$$



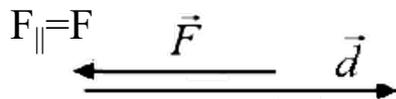
Se l'angolo θ è **acuto**, il suo coseno sarà: $0 < \cos \theta < 1$, dunque **il lavoro compiuto sarà positivo**: $0 < W < Fd$. In questo caso la componente F_{\parallel} della forza F agisce nella direzione del moto.



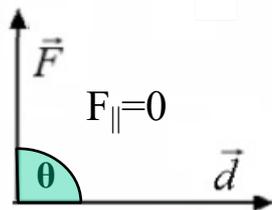
Se l'angolo θ è **ottuso**, il suo coseno sarà: $-1 < \cos \theta < 0$, dunque **il lavoro compiuto sarà negativo**: $-Fd < W < 0$. In questo caso la componente F_{\parallel} della forza F agisce in direzione opposta al moto.



Se $\theta = 0^\circ$, $\cos \theta = 1$, e dunque il lavoro compiuto sarà **massimo**, positivo ed esattamente uguale al **prodotto** dei moduli di forza e spostamento: $W = Fd$



Se $\theta = 180^\circ$, $\cos \theta = -1$, e dunque il lavoro compiuto sarà anche stavolta massimo, ma negativo, ed uguale a $W = -Fd$

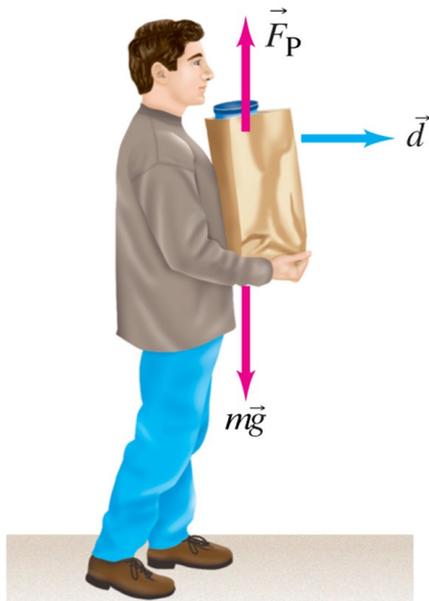


Se infine $\theta = 90^\circ$, cioè se forza e spostamento sono perpendicolari, sarà $\cos \theta = 0$ e dunque il lavoro compiuto sarà nullo: $W = 0$

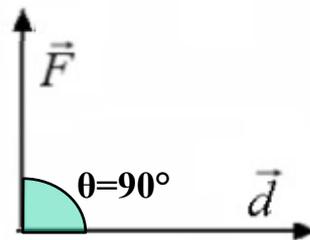
Un esempio controintuitivo...

Se un **uomo** è fermo in attesa dell'ascensore con un **pesante pacco** in mano, il senso comune ci direbbe che sta compiendo lavoro (per tenere sollevato il pacco), ma se siete stati attenti a quanto detto finora avrete capito, che dal punto di vista della fisica, ...**l'uomo non compie alcun lavoro!**

Infatti, nonostante egli eserciti una **forza F_P** diretta verso l'alto per contrastare la forza peso (e quindi, dal suo punto di vista, sta certamente faticando!), essendo il suo **spostamento nullo** ($d=0$) la fisica ci dice che $W = 0$.



Ma la cosa strana è che, a ben guardare, **l'uomo non ha compiuto lavoro nemmeno durante il tragitto** nel quale ha trasportato il pacco camminando dal supermercato all'ascensore... **Perchè???**



Semplicemente perchè durante il tragitto **la forza applicata è sempre perpendicolare allo spostamento** e dunque, come appena visto, si ha $\cos 90^\circ = 0$, cioè $W = Fd \cos 90^\circ = 0$ e la forza **non compie lavoro!**

Il lavoro di una forza costante

Esercizio

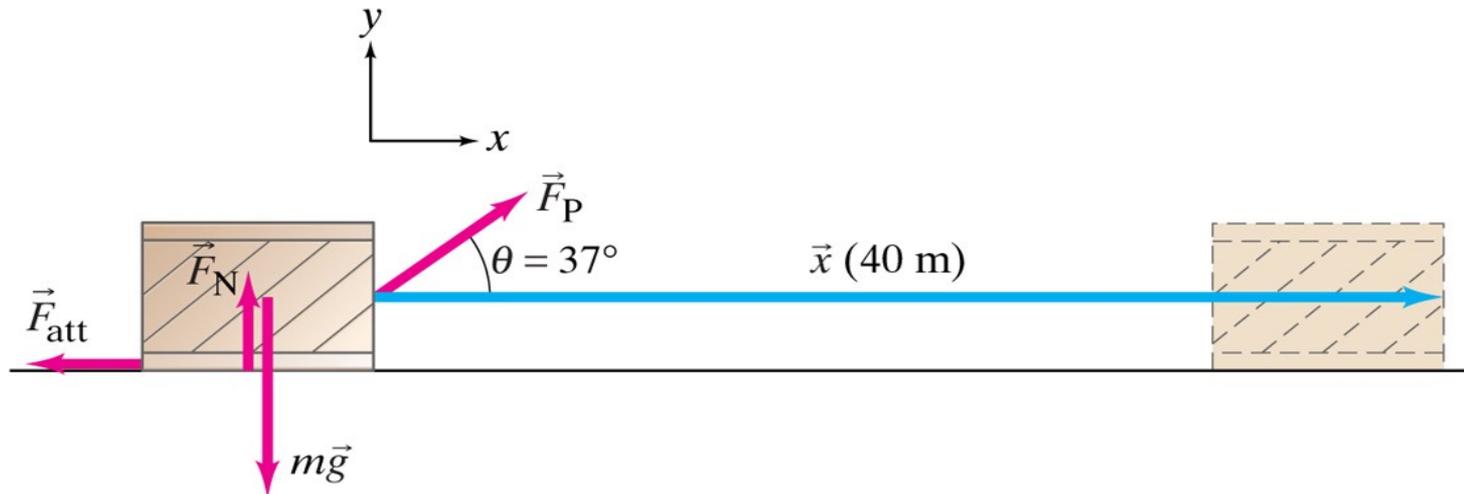
Una persona traina una **cassa** di massa 50 kg lungo una distanza $x = 40$ m lungo un **pavimento orizzontale** mediante una forza costante, $F_P = 100$ N, agente ad un angolo di 37° come in figura. Sapendo che il pavimento esercita una forza di **attrito** di modulo $F_{att} = 50$ N, calcolare **(a) il lavoro compiuto da ciascuna forza agente sulla cassa** e (b) il lavoro totale compiuto sulla cassa.

(a) Scegliendo il vettore spostamento lungo l'asse x , vediamo che sulla cassa agiscono **quattro forze**: la forza esercitata dalla persona che tira, di intensità F_P , la forza di attrito, di intensità F_{att} , la forza peso $F_G = mg$ diretta verso il basso e la forza normale esercitata verso l'alto dal pavimento. Vediamo qual è il **lavoro compiuto da ciascuna di queste forze** durante lo spostamento:

$$\left. \begin{aligned} W_G &= mgx \cos 90^\circ = 0 \\ W_N &= F_N x \cos 90^\circ = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Il lavoro della forza peso e di quella normale è nullo perchè} \\ \text{esse sono perpendicolari al vettore spostamento } \vec{x} . \end{array}$$

$$W_P = F_P x \cos \theta = (100\text{N})(40\text{m}) \cos 37^\circ = 3200\text{J} \quad \rightarrow W > 0 \text{ perchè la forza produce il moto}$$

$$W_{att} = F_{att} x \cos 180^\circ = (50\text{N})(40\text{m})(-1) = -2000\text{J} \quad \rightarrow W < 0 \text{ perchè la forza si oppone al moto}$$



Esercizio

Una persona traina una **cassa** di massa 50 kg lungo una distanza $x = 40$ m lungo un **pavimento orizzontale** mediante una forza costante, $F_P = 100$ N, agente ad un angolo di 37° come in figura. Sapendo che il pavimento esercita una forza di **attrito** di modulo $F_{att} = 50$ N, calcolare **(a) il lavoro compiuto da ciascuna forza agente sulla cassa** e **(b) il lavoro totale compiuto sulla cassa**.

(b) Essendo il lavoro una grandezza scalare, il **lavoro totale** può essere calcolato semplicemente come **somma algebrica** del lavoro compiuto dalle singole forze:

$$W_{tot} = W_G + W_N + W_P + W_{att} = 0 + 0 + 3200J - 2000J = 1200J$$

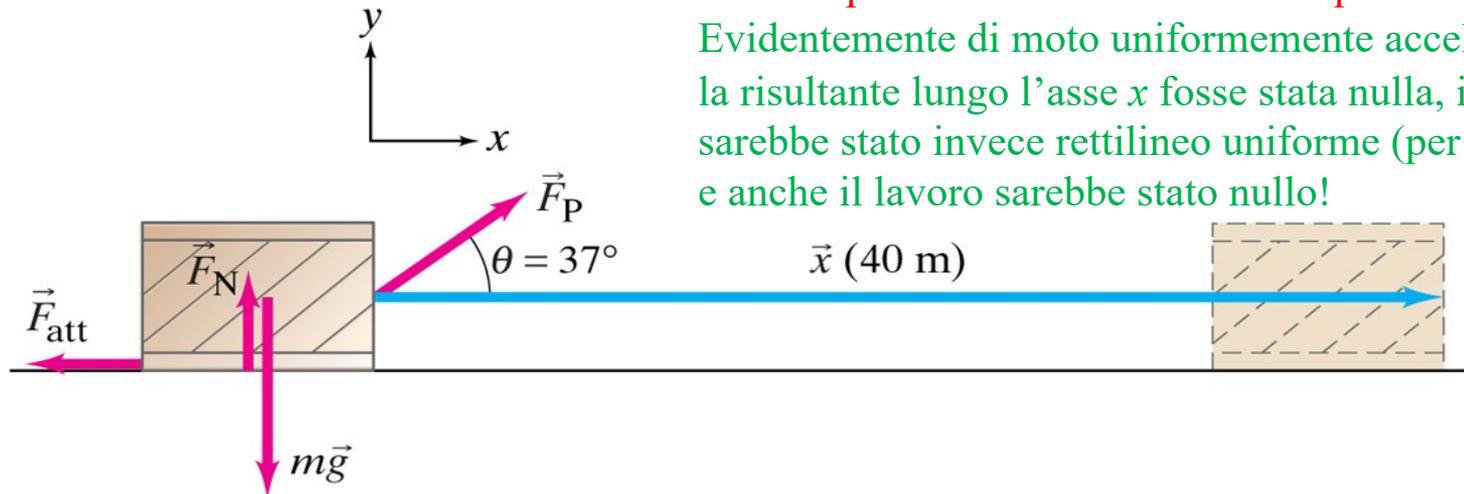
In alternativa, esso può essere calcolato determinando dapprima la componente della **forza risultante** nella direzione dello spostamento, e calcolando poi il lavoro da essa compiuto:

$$(F_{net})_x = F_P \cos \theta - F_{att} \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{tot} = (F_{net})_x x = (F_P \cos \theta - F_{att}) x = (100N \cos 37^\circ - 50N)(40m) = 1200J$$

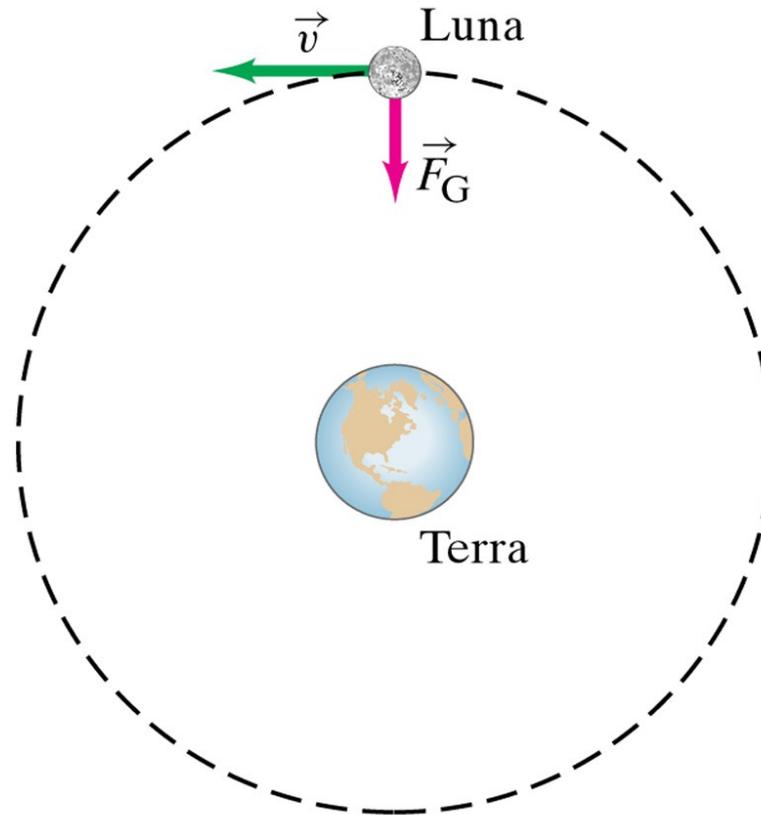
Di che tipo di moto si muoverà il corpo?

Evidentemente di moto uniformemente accelerato. Se la risultante lungo l'asse x fosse stata nulla, il moto sarebbe stato invece rettilineo uniforme (per inerzia) e anche il lavoro sarebbe stato nullo!



Esempio concettuale

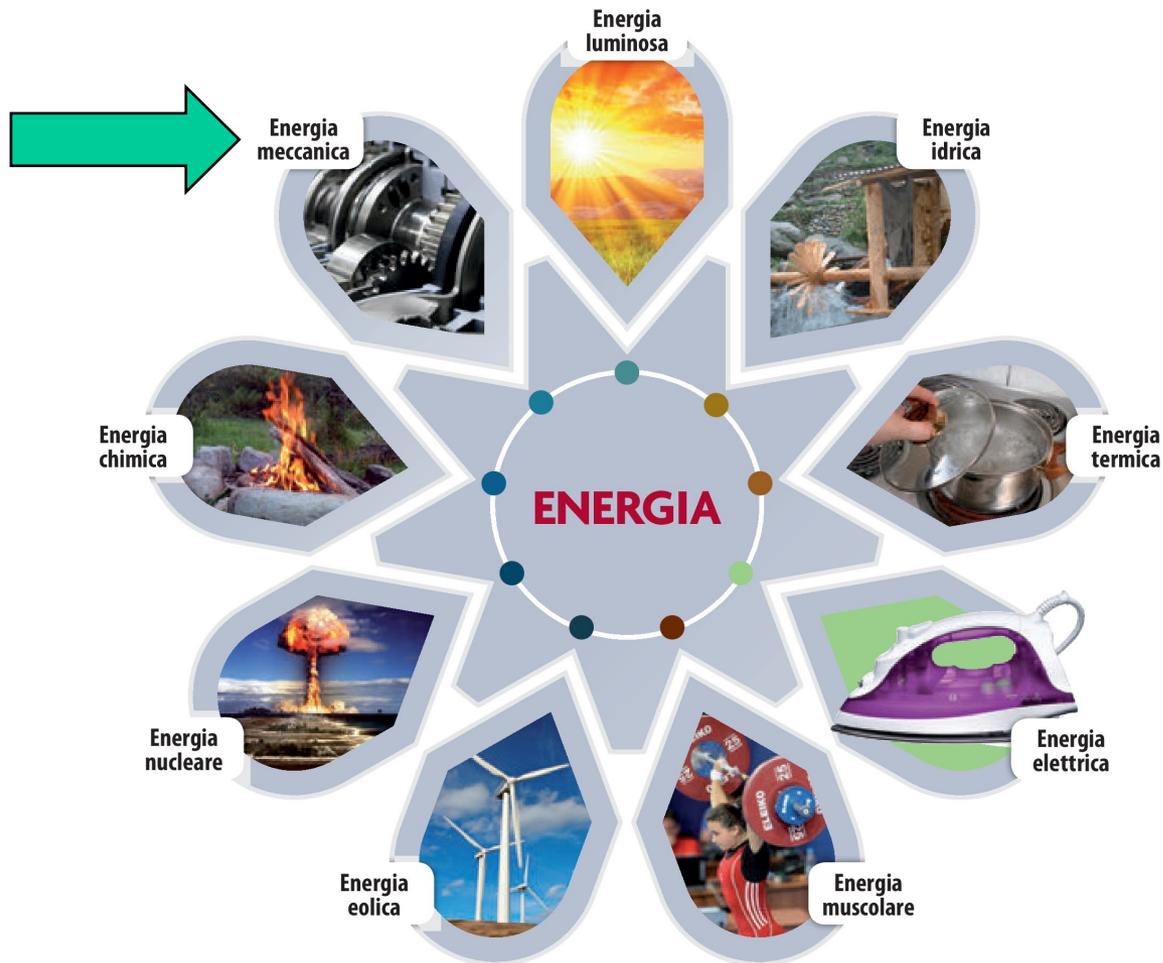
La **Luna**, come sappiamo, ruota attorno alla **Terra** su un'orbita quasi circolare, ivi trattenuta dalla forza gravitazionale esercitata dalla Terra. La **forza di gravità**, in questo caso, compie sulla Luna un lavoro (a) **positivo**, (b) **negativo** o (c) **nullo**?



Essendo la forza di gravità diretta verso il centro della Terra, essa è sempre **perpendicolare** allo spostamento, che invece è in ogni istante **tangente** alla traiettoria: dunque il **lavoro** compiuto dalla gravità della Terra sulla Luna mentre essa orbita è **nullo**!

Lavoro ed Energia Cinetica

Come il lavoro, anche il concetto di **energia** assume in fisica una connotazione peculiare. Ovviamente quello di energia è uno dei concetti scientifici più importanti e non ammette definizioni univoche, ma nell'ambito della *Meccanica*, che è quello a cui siamo interessati, esso è strettamente connesso con **la capacità di un corpo di compiere lavoro**.



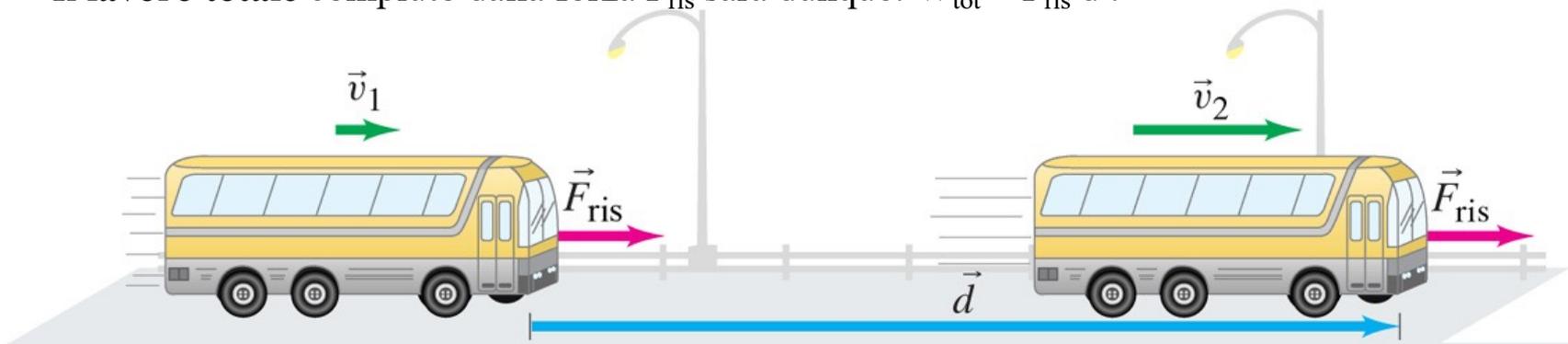
Lavoro ed Energia Cinetica

Come il lavoro, anche il concetto di **energia** assume in fisica una connotazione peculiare. Ovviamente quello di energia è uno dei concetti scientifici più importanti e non ammette definizioni univoche, ma nell'ambito della *Meccanica*, che è quello a cui siamo interessati, esso è strettamente connesso con **la capacità di un corpo di compiere lavoro**.

In particolare, quando un **oggetto in moto** urta su un altro oggetto (una palla di cannone contro un muro, un martello contro un chiodo, etc..), eserciterà su di esso una **forza** e ne provocherà un certo **spostamento**: così facendo esso mostra di essere in grado di **compiere lavoro proprio grazie al fatto che è in movimento**, e per questo diciamo che un oggetto in moto possiede una certa **energia cinetica**.



Per giungere ad una **definizione operativa** di energia cinetica, consideriamo un corpo di massa m (un autobus ad es.) che si muove in linea retta (moto unidimensionale) con una velocità iniziale v_1 , e immaginiamo di accelerarlo uniformemente con una forza risultante F_{ris} positiva, costante e parallela al suo moto, lungo la distanza d fino a portarlo alla velocità v_2 . Il **lavoro totale** compiuto dalla forza F_{ris} sarà dunque: $W_{\text{tot}} = F_{\text{ris}} d$.



Il Teorema dell'Energia Cinetica

Per la **seconda legge di Newton** sarà anche $F_{\text{ris}} = ma$, dove l'accelerazione a può essere ricavata utilizzando una delle **equazioni cinematiche** del moto uniformemente accelerato unidimensionale:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \rightarrow a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$$

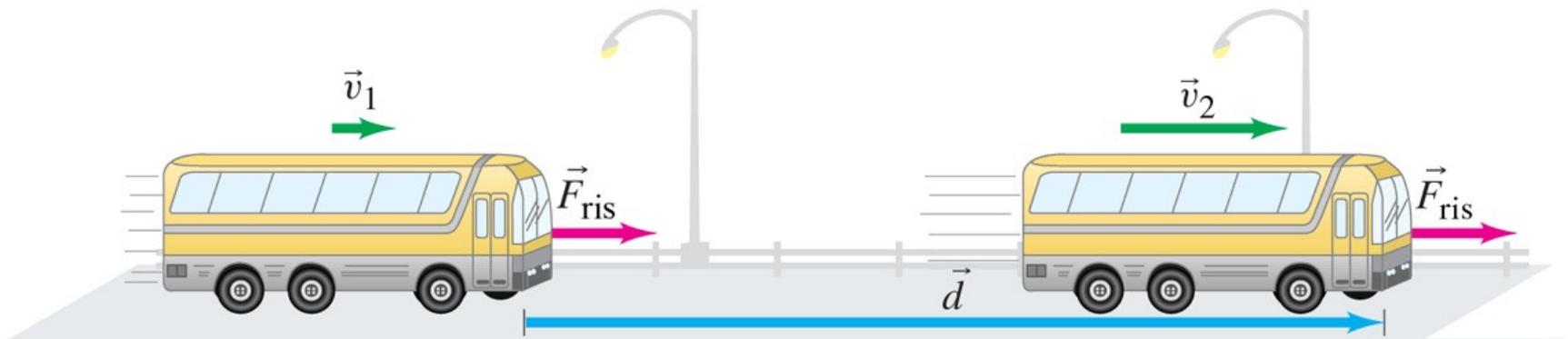
Sostituendo l'espressione della forza in quella del lavoro compiuto avremo quindi:

$$W_{\text{tot}} = F_{\text{ris}} d = mad = m \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2d} \right) d = m \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) \rightarrow W_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Se definiamo **energia cinetica traslazionale** la quantità: $K = \frac{1}{2} m v^2$

avremo infine: $W_{\text{tot}} = K_2 - K_1 \rightarrow W_{\text{tot}} = \Delta K$

espressione valida anche per traslazioni in 3 dimensioni e per forze variabili, che prende il nome di **Teorema dell'Energia Cinetica**: «Il lavoro totale compiuto da una forza su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo stesso».



Il Teorema dell'Energia Cinetica

Per la **seconda legge di Newton** sarà anche $F_{ris} = ma$, dove l'accelerazione a può essere ricavata utilizzando una delle **equazioni cinematiche** del moto uniformemente accelerato unidimensionale:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \rightarrow a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$$

Sostituendo l'espressione della forza in quella del lavoro compiuto avremo quindi:

$$W_{tot} = F_{ris} d = mad = m \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2d} \right) d = m \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) \rightarrow W_{tot} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Se definiamo **energia cinetica traslazionale** la quantità: $K = \frac{1}{2} m v^2$

avremo infine: $W_{tot} = K_2 - K_1 \rightarrow W_{tot} = \Delta K$

espressione valida anche per traslazioni in 3 dimensioni e per forze variabili, che prende il nome di **Teorema dell'Energia Cinetica**: «Il lavoro totale compiuto da una forza su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo stesso».

Dalla definizione di **energia cinetica traslazionale** ricaviamo che:

1) l'energia cinetica, nel SI, viene misurata con la **stessa unità di misura del lavoro**, cioè in **Joule**. Infatti dall'analisi dimensionale dell'espressione di K si ricava che: $[K] = [m][v]^2 = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{N m} = \text{Joule}$. Del resto è naturale che sia così alla luce del teorema dell'energia cinetica, che equipara il lavoro alla differenza di energia cinetica.

Il Teorema dell'Energia Cinetica

Per la **seconda legge di Newton** sarà anche $F_{ris} = ma$, dove l'accelerazione a può essere ricavata utilizzando una delle **equazioni cinematiche** del moto uniformemente accelerato unidimensionale:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \rightarrow a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$$

Sostituendo l'espressione della forza in quella del lavoro compiuto avremo quindi:

$$W_{tot} = F_{ris}d = mad = m\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}\right)d = m\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right) \rightarrow W_{tot} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Se definiamo **energia cinetica traslazionale** la quantità: $K = \frac{1}{2}mv^2$

avremo infine: $W_{tot} = K_2 - K_1 \rightarrow W_{tot} = \Delta K$

espressione valida anche per traslazioni in 3 dimensioni e per forze variabili, che prende il nome di **Teorema dell'Energia Cinetica: «Il lavoro totale compiuto da una forza su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo stesso».**

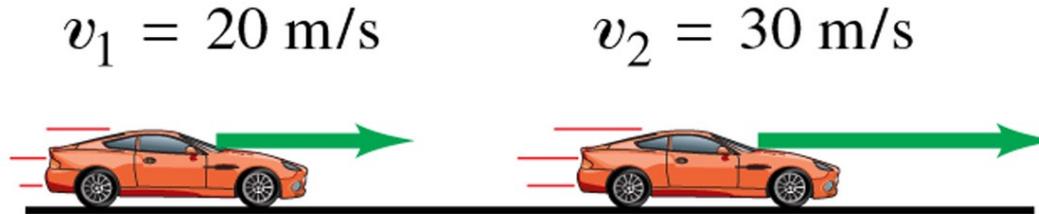
Dalla definizione di **energia cinetica traslazionale** ricaviamo anche che:

2) l'energia cinetica è direttamente proporzionale alla massa ma **direttamente proporzionale al quadrato della velocità**: ciò significa che, se la massa di un corpo raddoppia, la sua energia cinetica raddoppia, ma se è la velocità del corpo a raddoppiare, la sua energia cinetica diventa quattro volte maggiore: il corpo sarà quindi in grado di compiere un lavoro quattro volte maggiore (e, se si tratta ad es. di un'auto che urta contro un'altra auto, dei **danni** quattro volte maggiori!)

Esercizio 1

Lavoro compiuto su un'automobile per aumentarne l'energia cinetica.

Quanto lavoro è necessario per accelerare un'automobile di massa 1000kg da 20m/s a 30m/s?



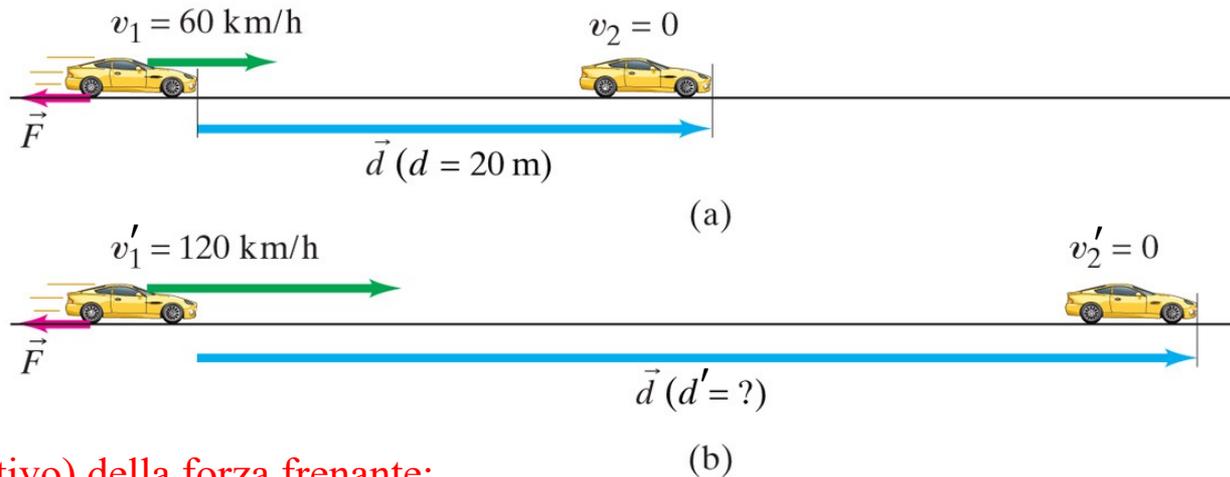
Utilizzando il teorema dell'energia cinetica avremo immediatamente:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} 1000 \text{kg} \left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{1}{2} 1000 \text{kg} \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} 1000 \text{kg} (900 - 400) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 2.5 \cdot 10^5 \text{J} \end{aligned}$$

Esercizio 2

Lavoro necessario per fermare un'automobile.

Un'automobile che viaggia a 60 km/h è in grado, frenando, di fermarsi in un tratto di 20m (a). Se l'automobile stesse viaggiando a velocità doppia, cioè a 120 km/h, quale sarebbe la sua distanza di arresto (b)? Si assuma che la massima forza frenante, in prima approssimazione, sia indipendente dalla velocità



Lavoro (negativo) della forza frenante:

$$W = -F d = 0 - \frac{1}{2} m v_1^2 \longrightarrow F = \frac{1}{2} m v_1^2 \frac{1}{d}$$

$$W' = -F d' = 0 - \frac{1}{2} m v_1'^2 \longrightarrow F = \frac{1}{2} m v_1'^2 \frac{1}{d'}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 \frac{1}{d} = \frac{1}{2} m v_1'^2 \frac{1}{d'}$$

$$d' = \frac{v_1'^2}{v_1^2} d = \frac{(120 \text{ km/h})^2}{(60 \text{ km/h})^2} d$$

$$d' = (2)^2 d = 4(20 \text{ m}) = 80 \text{ m}$$



<https://www.youtube.com/watch?v=b5xM75MPMwc>

L'energia cinetica

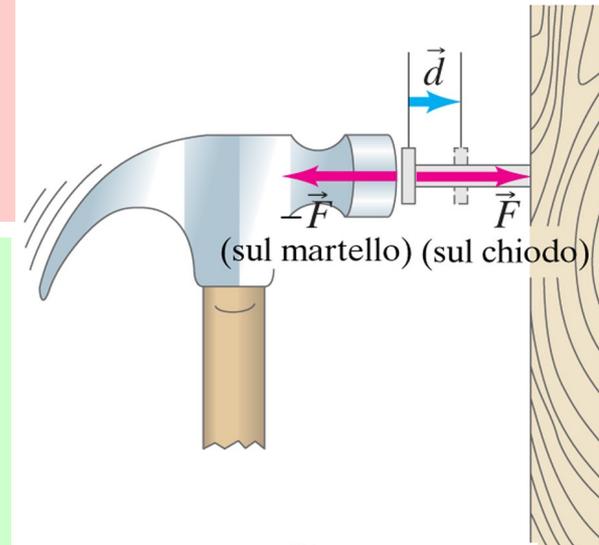
Esempio concettuale

Consideriamo un **martello** in movimento che batte su un **chiodo** (vedi figura) e cerchiamo di capire cosa succede dal punto di vista del lavoro e della variazione di energia cinetica.

Ricordiamo che, per il Teorema dell'Energia Cinetica:

Il lavoro totale compiuto da una forza su un corpo è uguale alla variazione (positiva o negativa) dell'energia cinetica del corpo:

$$W_{tot} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow W_{tot} = K_2 - K_1 \rightarrow W_{tot} = \Delta K$$



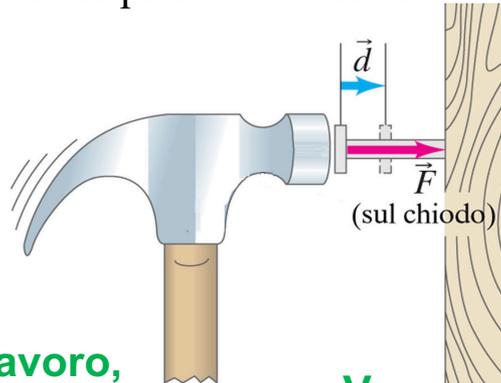
Fisica
Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

1) Nell'istante in cui **il martello colpisce il chiodo**, esso esercita su di esso una **forza** di intensità F diretta verso destra e si **sposta** assieme al chiodo di un tratto d nella stessa direzione. Dunque, per la **terza legge di Newton**, il chiodo restituisce al martello una forza uguale e contraria, cioè anch'essa di intensità F ma diretta verso sinistra. Essendo lo spostamento del martello verso destra, **il lavoro W_{MC} compiuto sul martello dal chiodo** è negativo, $W_{MC} = Fd \cos 180^\circ = -Fd = \Delta K_M < 0$, dunque l'energia cinetica del martello diminuisce (di solito fino a zero, in quanto il martello arriva a fermarsi).

2) D'altro canto, mentre rallenta fino a fermarsi, il martello compie lavoro positivo sul chiodo, in quanto quest'ultimo si sposta verso destra a causa della forza F diretta anch'essa verso destra. Infatti **il lavoro W_{CM} compiuto sul chiodo dal martello** è $W_{CM} = Fd \cos 0^\circ = Fd = \Delta K_C > 0$, e quindi (essendo ΔK_C uguale ed opposta ad ΔK_M) l'energia cinetica del chiodo aumenta della stessa quantità di cui quella del martello era diminuita: possiamo concluderne che il martello, a causa della sua energia cinetica, è stato capace di compiere un lavoro positivo sul chiodo, **trasferendogli** così la sua energia cinetica (che a sua volta servirà al chiodo per compiere lavoro sulla parete conficcandosi dentro di essa...).

Lavoro come Energia in Transito

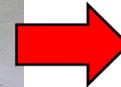
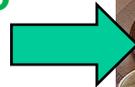
Riassumendo, quindi, possiamo considerare il lavoro come una forma di **energia in transito** da un oggetto ad un altro (un po' come il denaro transita da un conto corrente ad un altro). Infatti un **lavoro totale positivo** su un oggetto fa **aumentare** la sua energia cinetica (proprio come un versamento di denaro fa aumentare il saldo di un conto corrente), mentre un **lavoro totale negativo** la fa **diminuire** (come un prelievo fa diminuire il saldo di un conto corrente). Se invece il lavoro totale su un oggetto è **nullo**, la sua energia cinetica resta **costante**, e quindi resta costante anche la sua velocità (se non ci sono prelievi o versamenti anche il saldo di un conto corrente resta costante...).



Lavoro,
positivo, fatto
dal martello
sul chiodo



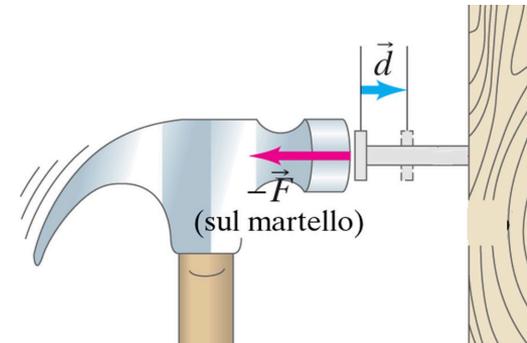
Versamento
di energia
cinetica



Prelievo
di energia
cinetica

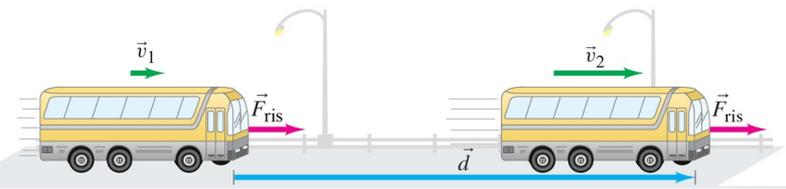


Lavoro,
negativo, fatto
dal chiodo sul
martello



Lavoro come Energia in Transito

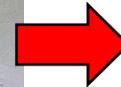
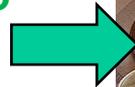
Riassumendo, quindi, possiamo considerare il lavoro come una forma di **energia in transito** da un oggetto ad un altro (un po' come il denaro transita da un conto corrente ad un altro). Infatti un **lavoro totale positivo** su un oggetto fa **aumentare** la sua energia cinetica (proprio come un versamento di denaro fa aumentare il saldo di un conto corrente), mentre un **lavoro totale negativo** la fa **diminuire** (come un prelievo fa diminuire il saldo di un conto corrente). Se invece il lavoro totale su un oggetto è **nulla**, la sua energia cinetica resta **costante**, e quindi resta costante anche la sua velocità (se non ci sono prelievi o versamenti anche il saldo di un conto corrente resta costante...).



Lavoro,
positivo, fatto
dalla spinta
del motore



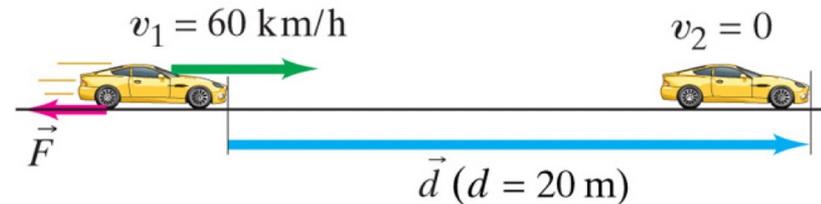
Versamento
di energia
cinetica



Prelievo
di energia
cinetica

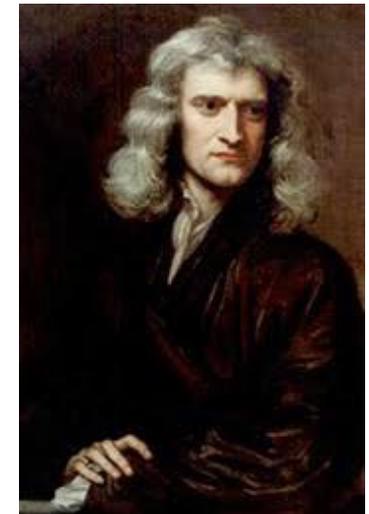
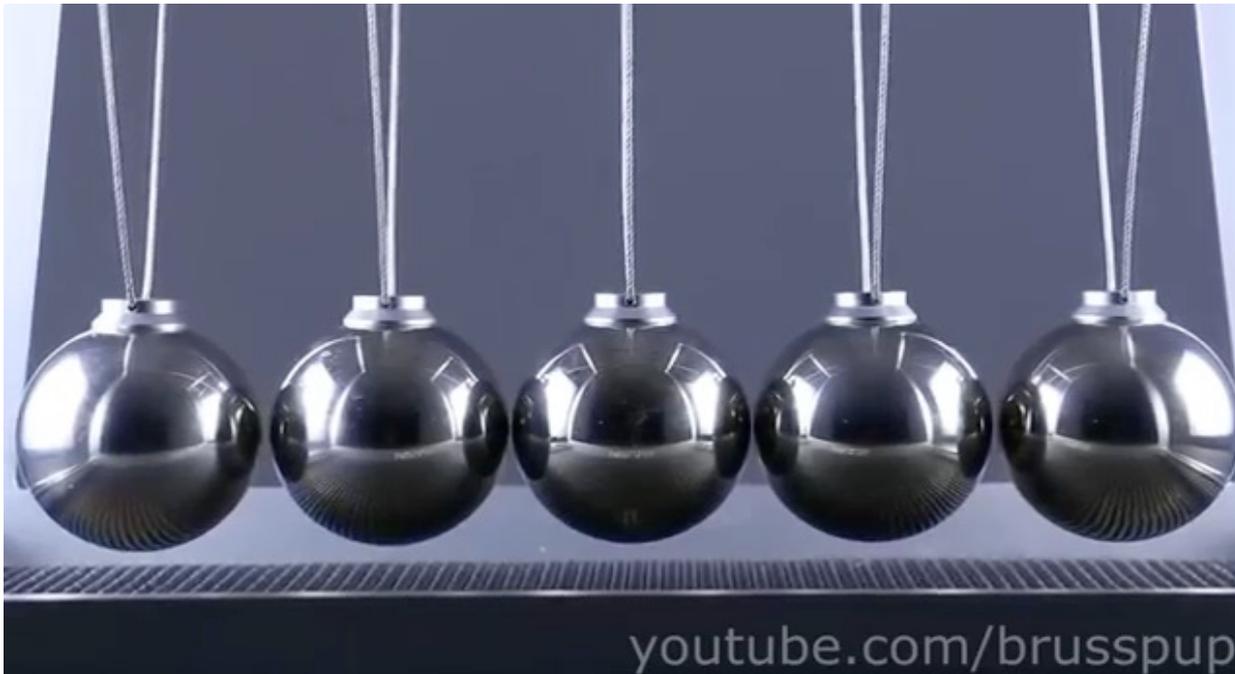


Lavoro,
negativo, fatto
dalla forza di
attrito dei freni



Lavoro come Energia in Transito

Riassumendo, quindi, possiamo considerare il lavoro come una forma di **energia in transito** da un oggetto ad un altro (un po' come il denaro transita da un conto corrente ad un altro). Infatti un **lavoro totale positivo** su un oggetto fa **aumentare** la sua energia cinetica (proprio come un versamento di denaro fa aumentare il saldo di un conto corrente), mentre un **lavoro totale negativo** la fa **diminuire** (come un prelievo fa diminuire il saldo di un conto corrente). Se invece il lavoro totale su un oggetto è **nullo**, la sua energia cinetica resta **costante**, e quindi resta costante anche la sua velocità (se non ci sono prelievi o versamenti anche il saldo di un conto corrente resta costante...).



Pendolo di Newton