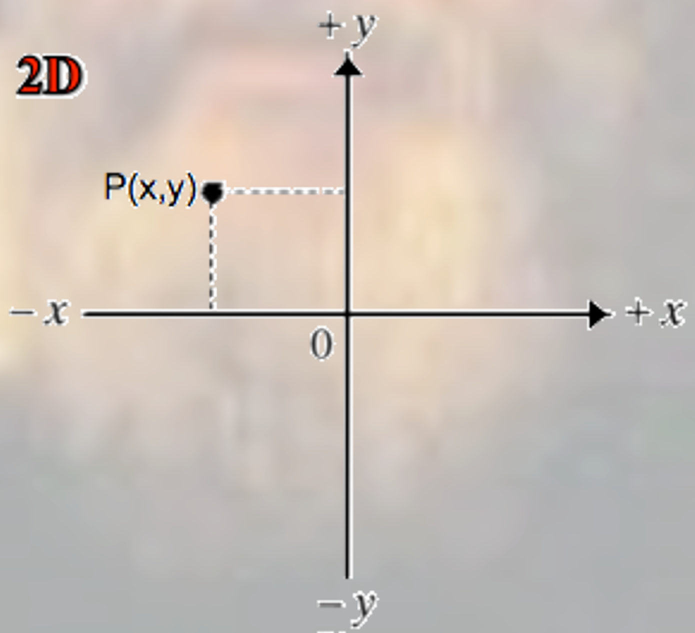
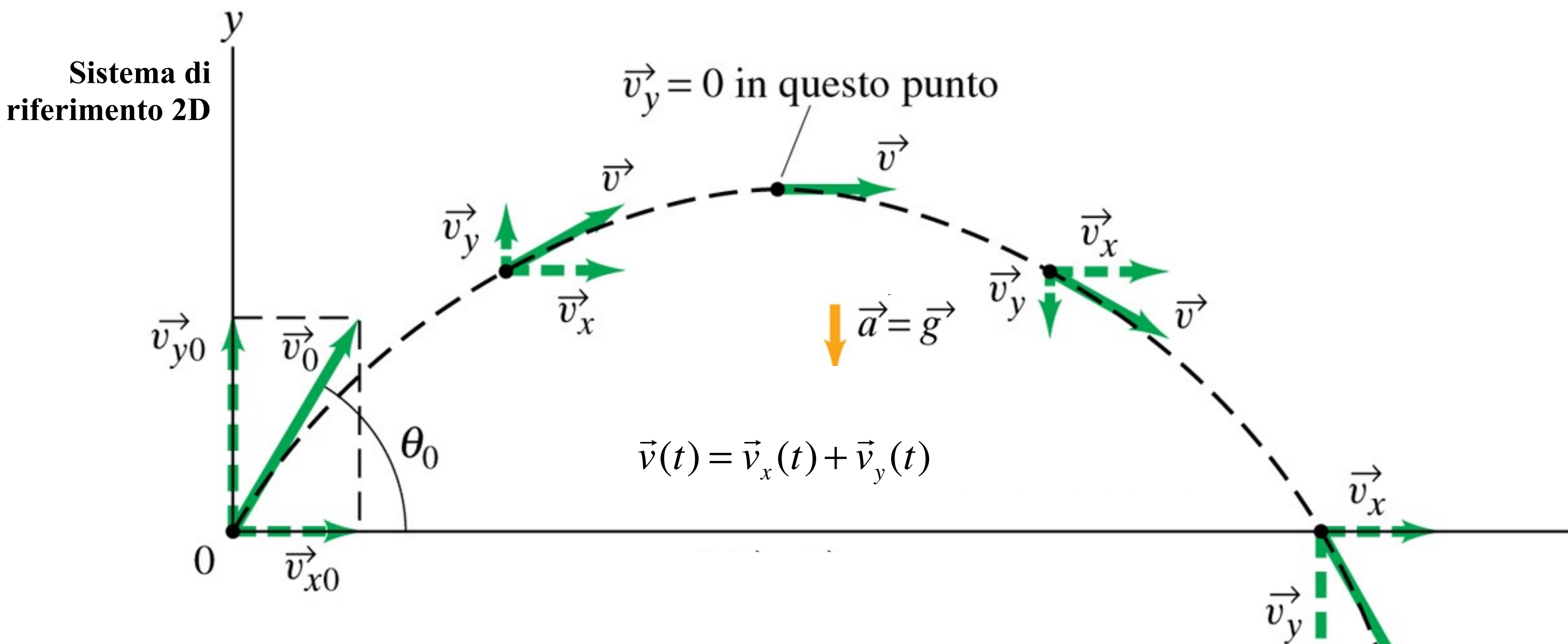
LA CINEMATICA in DUE DIMENSIONI

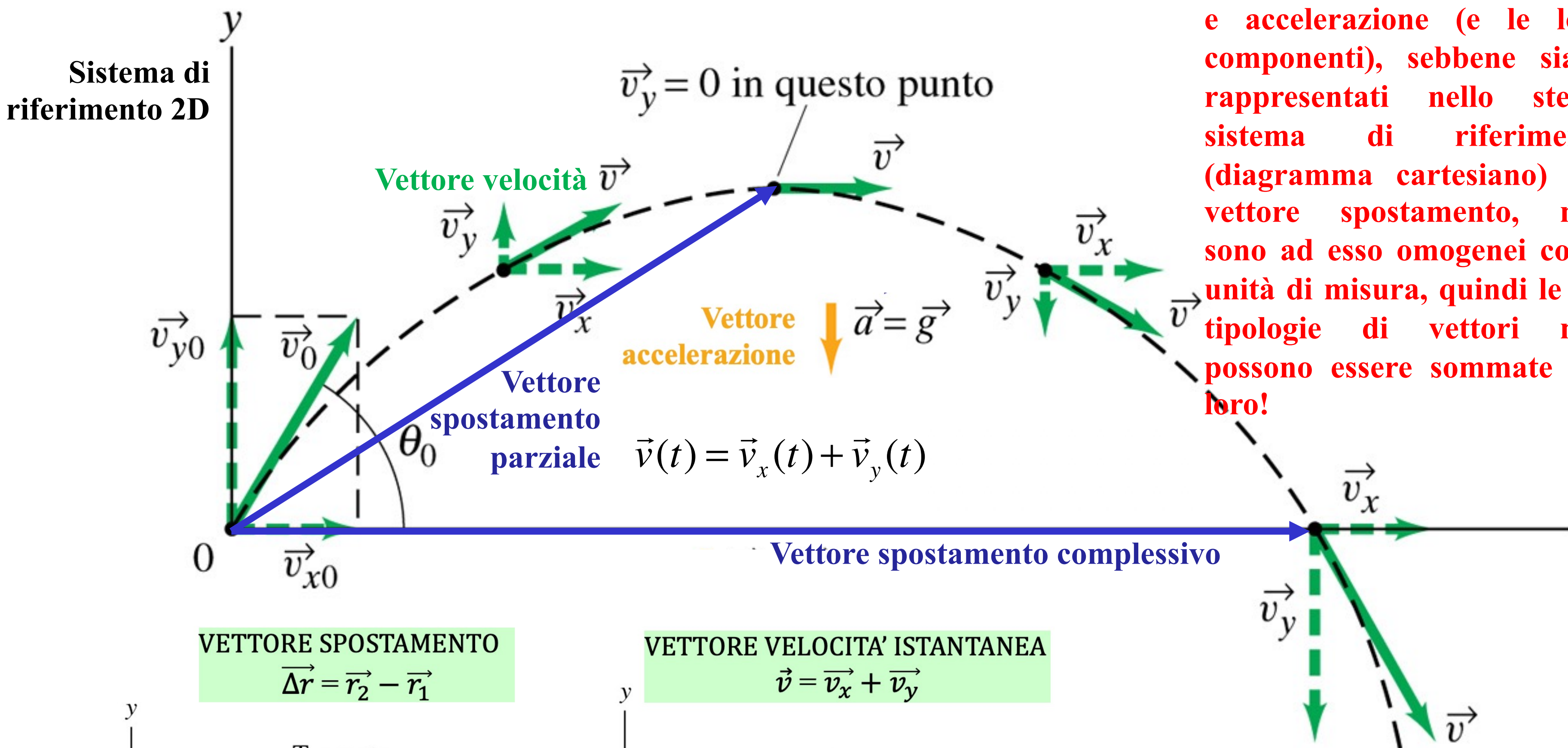


Moto di un proiettile in due dimensioni: Sommario



Se l'oggetto è lanciato a partire dall'origine con un certo **angolo iniziale $\boldsymbol{\theta_0}$** positivo e minore di 90°, notiamo che è presente una **componente verticale positiva** della velocità $v_{y0} > 0$ che, a causa della accelerazione di gravità, decresce uniformemente fino ad annullarsi quando l'oggetto raggiunge il punto più alto della traiettoria, dopodiché cresce nuovamente in modulo ma con verso opposto. La **componente orizzontale** v_{x0} resta invece costante come nell'esempio precedente. La traiettoria complessiva è adesso una **parabola** completa.

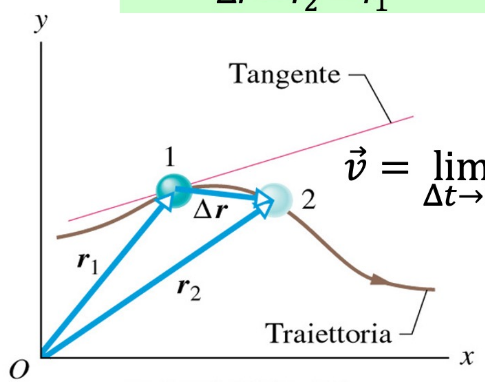
Moto di un proiettile in due dimensioni: Sommario



Attenzione: i vettori velocità e accelerazione (e le loro componenti), sebbene siano rappresentati nello stesso sistema di riferimento (diagramma cartesiano) del vettore spostamento, non sono ad esso omogenei come unità di misura, quindi le tre tipologie di vettori non possono essere sommate tra loro!

VETTORE SPOSTAMENTO

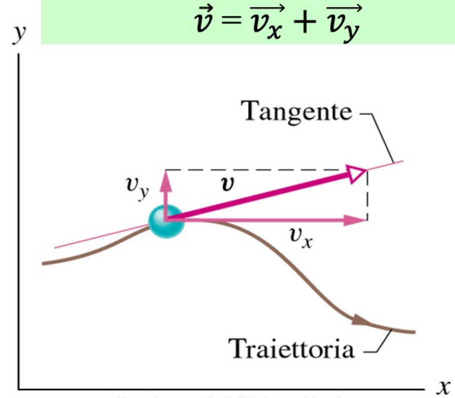
$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$



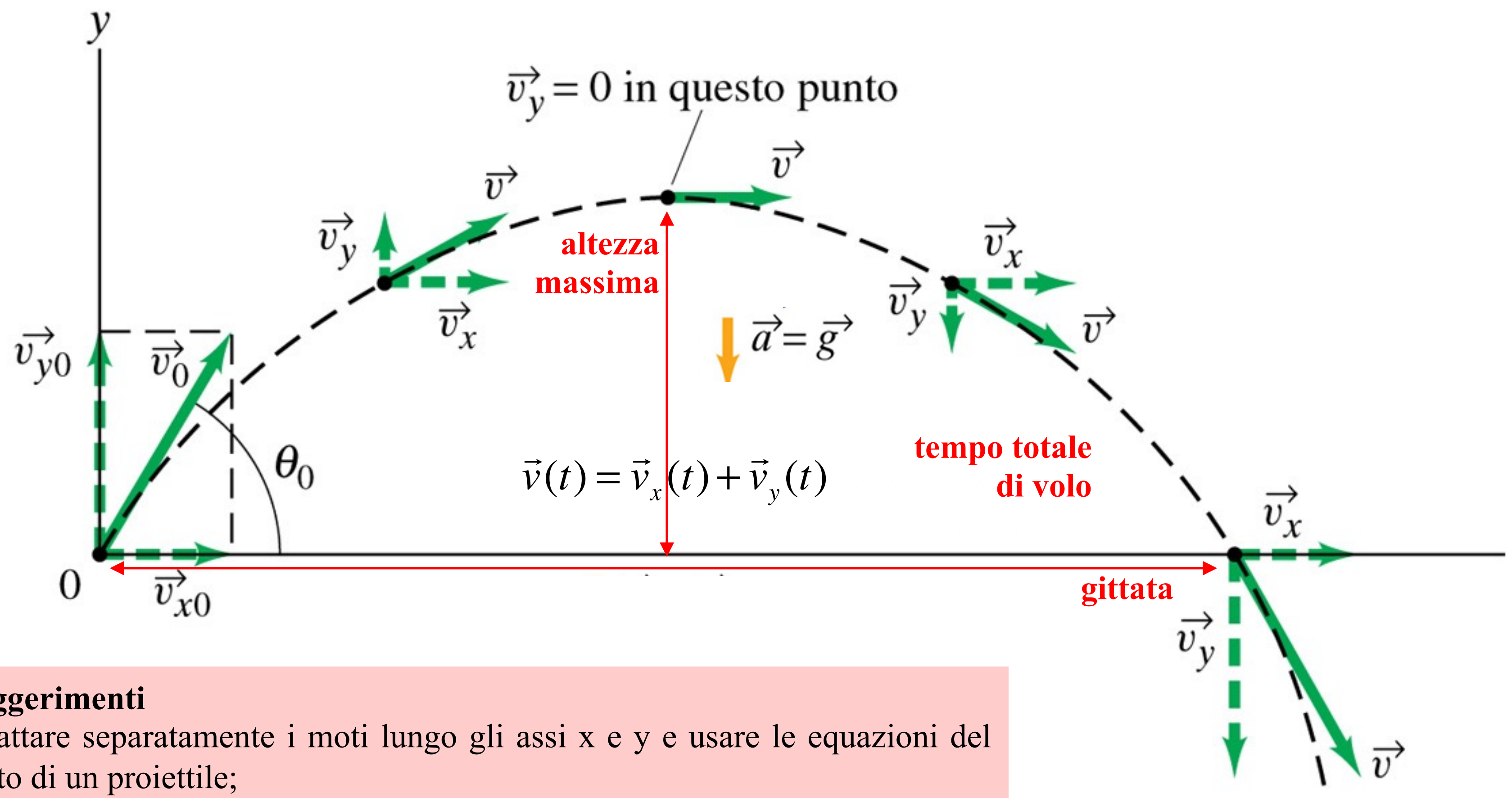
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

VETTORE VELOCITA' ISTANTANEA

$$\vec{v} = \vec{v_x} + \vec{v_y}$$



Esercizi sul moto di un proiettile in due dimensioni



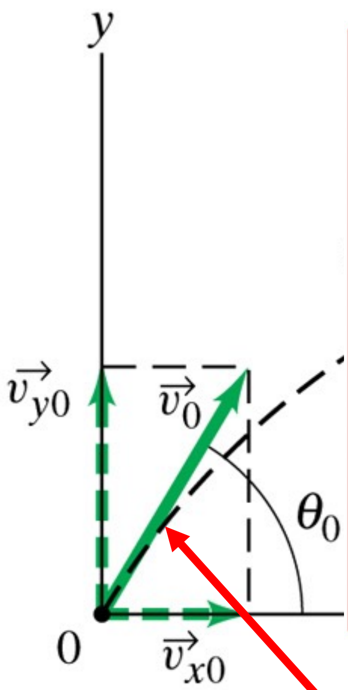
Suggerimenti

-Trattare separatamente i moti lungo gli assi x e y e usare le equazioni del moto di un proiettile;

-Ricordare che il moto lungo x avviene a velocità costante mentre quello lungo y è a velocità variabile.

-Considerare che il **tempo totale che il pallone trascorre in aria e l'altezza massima che raggiunge** sono determinati solo dal moto lungo y, mentre la **distanza massima in orizzontale (gittata)** è determinata dal moto congiunto lungo gli assi x e y;

Esercizi sul moto di un proiettile in due dimensioni



Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. ($a_x = 0$, $a_y = -g = \text{cost}$)

moto orizzontale (uniforme $a_x=0$, $v_x=\text{cost.}$)

(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0} t$

moto verticale (unif.accel. $a_y = -g$)

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2$

(III-y) $v_y{}^2 = v_{y0}{}^2 - 2g(y - y_0)$

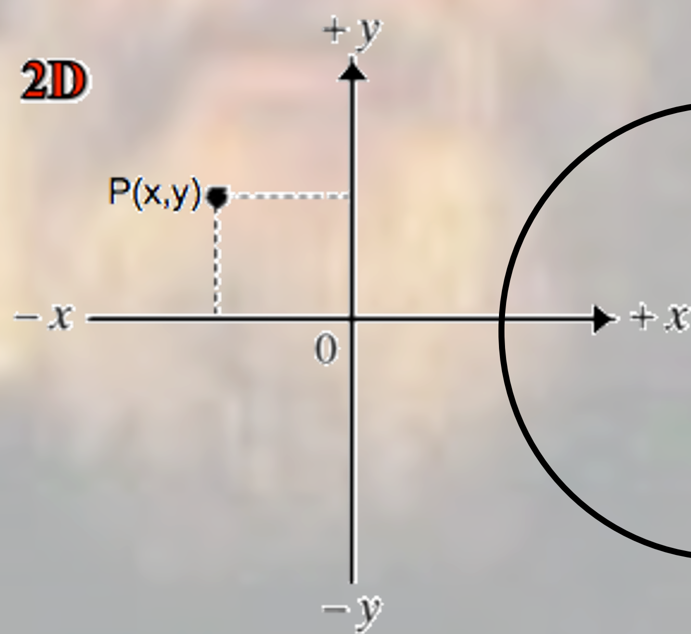
Velocità vettoriale iniziale:

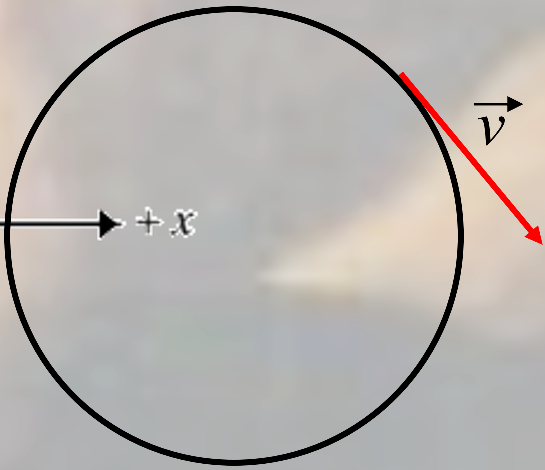
$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

Componenti:

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 ; \; v_{y0} = v_0 sen\theta_0$$

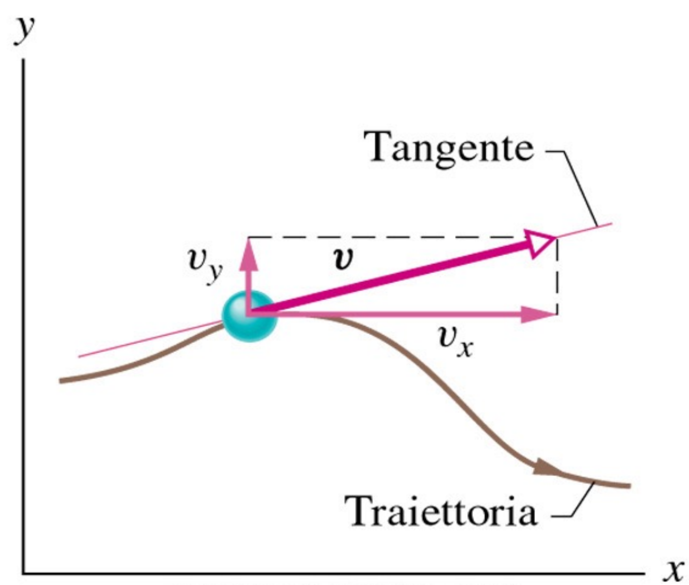
CINEMATICA del Moto Circolare Uniforme

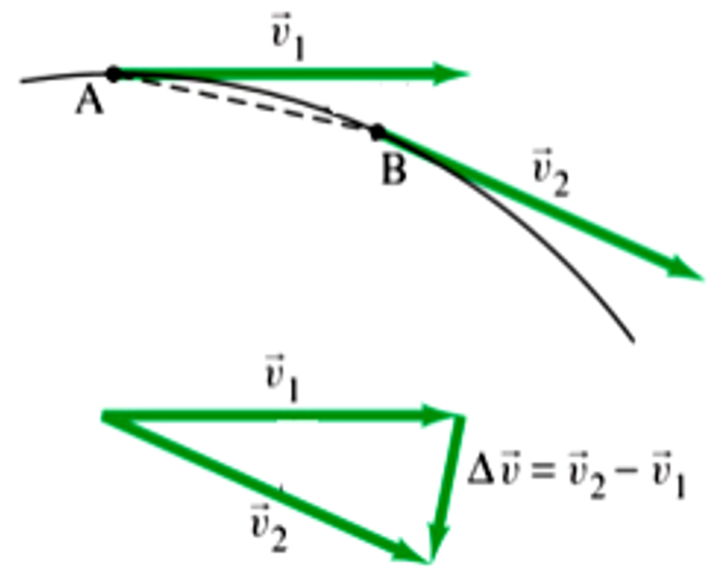




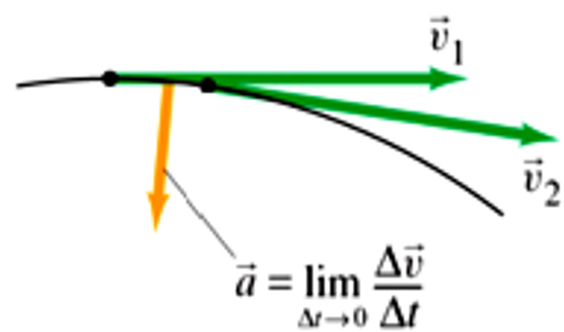
Velocità e Accelerazione in due dimensioni

Abbiamo visto che, in due dimensioni, la **velocità vettoriale istantanea** è sempre **tangente** in ogni punto alla traiettoria del punto materiale in movimento. Dunque, su **traiettorie curve**, il vettore velocità cambia continuamente direzione durante il moto del corpo considerato.

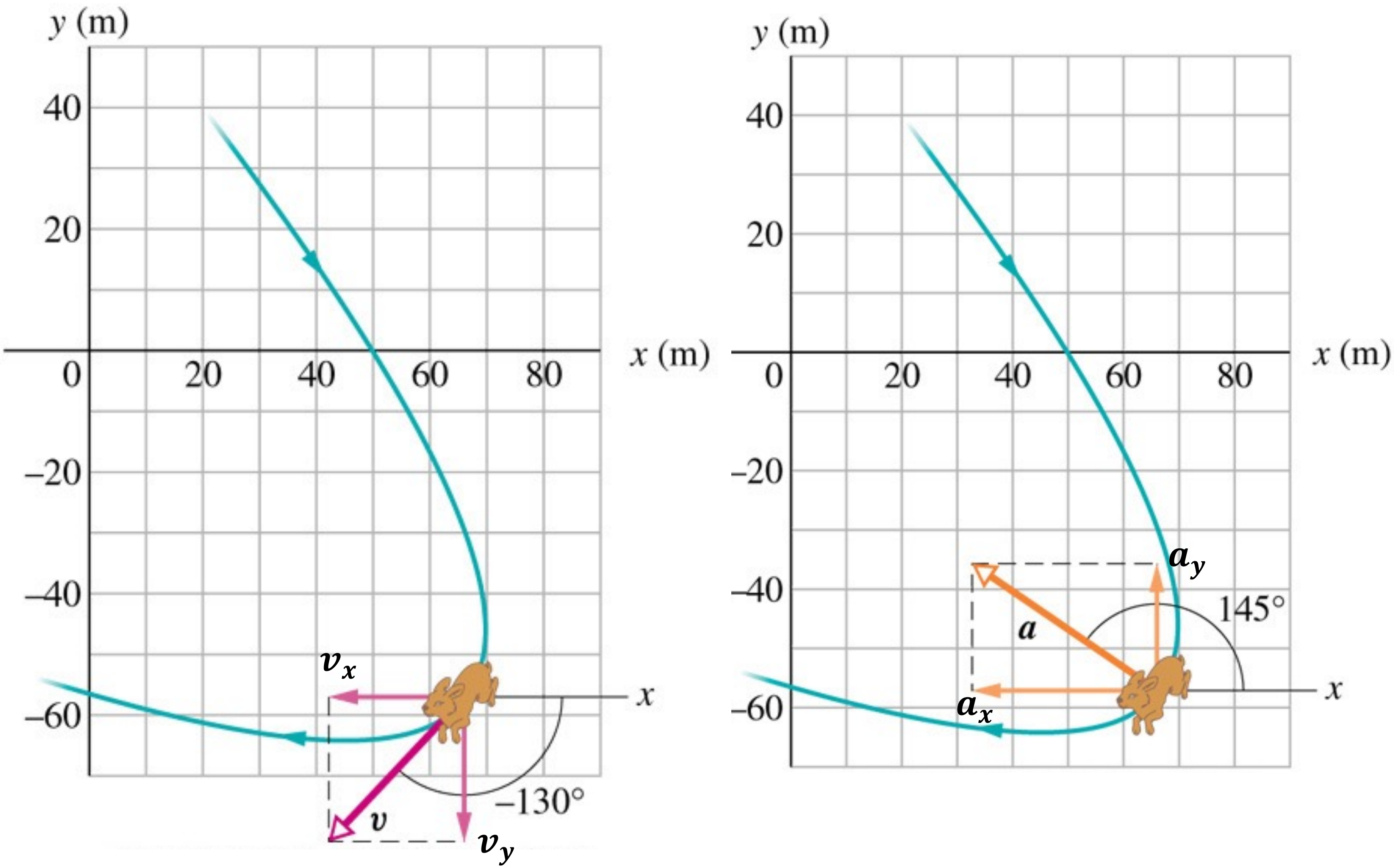




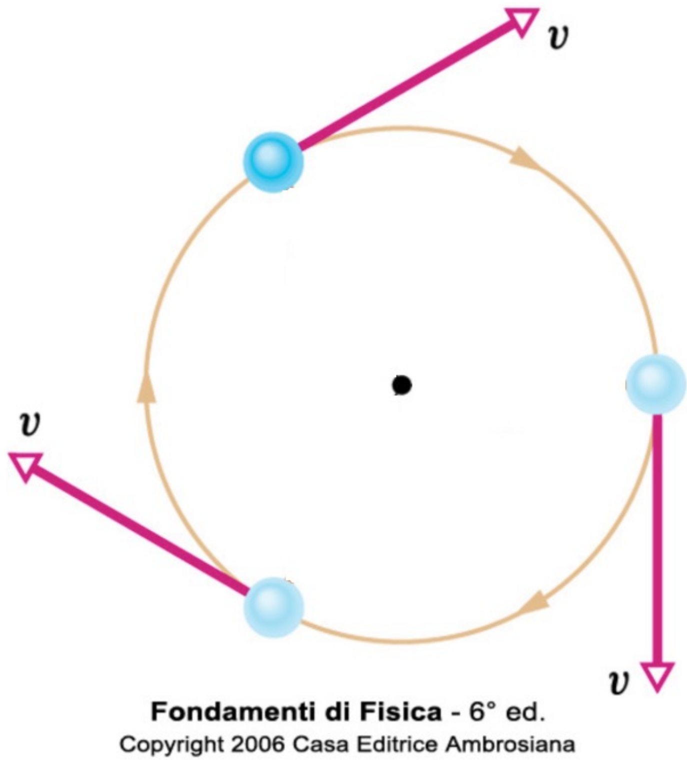
Questo cambiamento di direzione della velocità è **causato da un'accelerazione vettoriale istantanea** che risulta essere rappresentata da un vettore **perpendicolare alla velocità e diretto sempre verso l'interno della curva**.



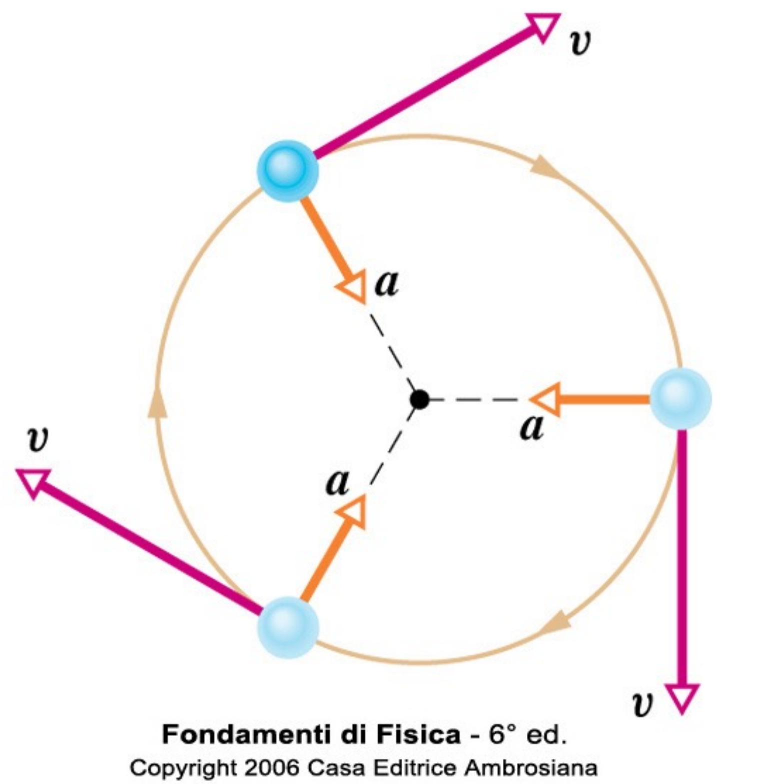
Velocità e Accelerazione in due dimensioni



Moto circolare uniforme



Un oggetto (particella) si definisce in **moto circolare uniforme** se si muove lungo una circonferenza con una velocità scalare costante *v*.
Poichè il **vettore velocità *v*** è tangente in ogni punto alla traiettoria, **anche se il suo modulo resta costante** (e pari appunto alla velocità scalare *v*) **la sua direzione cambia ad ogni istante!**



Questo cambiamento uniforme di direzione del **vettore velocità** deve essere prodotto, come abbiamo visto, da una **accelerazione vettoriale** costante, perpendicolare in ogni punto al vettore della velocità istantanea: dunque, in questo caso, il vettore accelerazione sarà diretto verso il centro del cerchio considerato, per cui si parla di **accelerazione centripeta**.

Accelerazione Centripeta

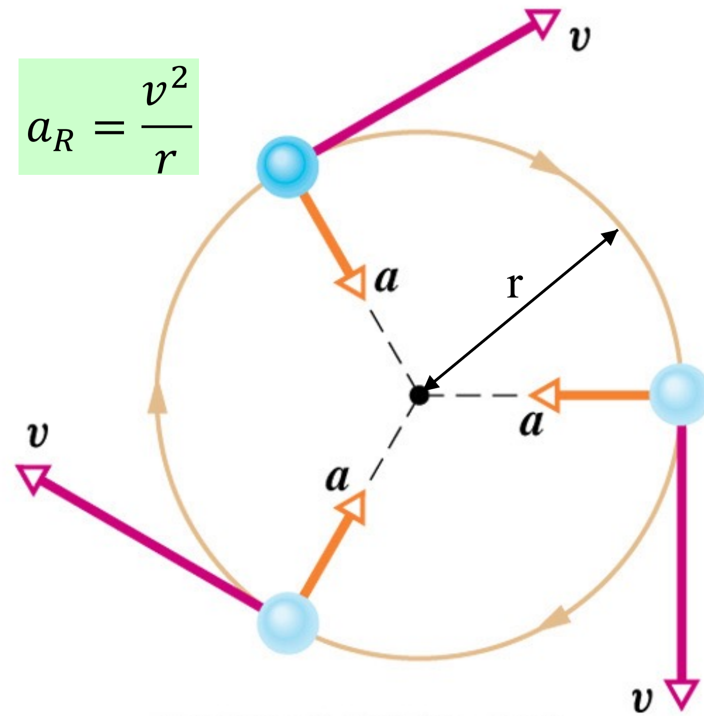
Si può dimostrare che *per un oggetto che si muove lungo una circonferenza di raggio r, con velocità scalare costante v, l'accelerazione centripeta – costante e diretta verso il centro del cerchio – ha* **modulo** $\boldsymbol{a_R = v^2 / r}$ **.**

Osservazioni

1) Nel moto circolare uniforme i vettori velocità e accelerazione sono **perpendicolari** tra di loro in ogni punto della traiettoria: questo è un ulteriore esempio che illustra l'errore che si compie pensando che velocità e accelerazione debbano avere sempre la stessa direzione.

2) Non sorprende il fatto che il **modulo** dell'accelerazione centripeta sia *direttamente proporzionale* a *v* (al quadrato) e *inversamente proporzionale* a r: infatti, maggiore è la velocità scalare *v*, più rapidamente il vettore velocità cambia direzione, mentre all'aumentare del raggio questo cambiamento di direzione avviene sempre più lentamente.

$$a_R = \frac{v^2}{r}$$



Fondamenti di Fisica - 6° ed.

Periodo e frequenza nel moto circolare uniforme

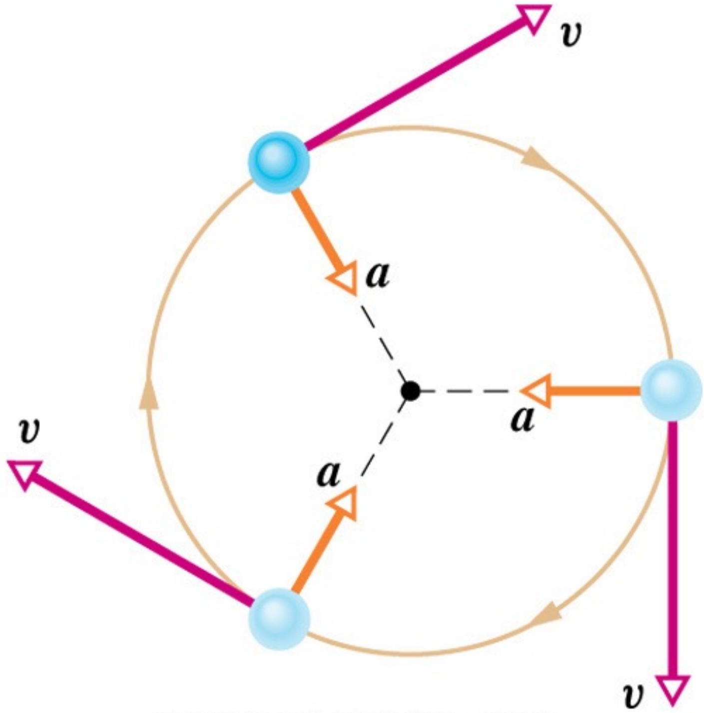
Il moto circolare uniforme è spesso descritto in termini di **frequenza** f, intesa come numero di giri al secondo (Hertz) compiuti dall'oggetto che ruota, e di **periodo** T, che rappresenta invece il tempo necessario affinchè l'oggetto compia un giro completo della circonferenza.

Periodo e frequenza sono legati dall'ovvia relazione: $T = \frac{1}{f}$

Se infatti, ad esempio, l'oggetto ruota con una frequenza di 3Hz (cioè di 3 giri al secondo, o 3 s^{-1}), il suo periodo sarà evidentemente pari a 1/3 s.

Osserviamo inoltre che per un oggetto che ruoti a velocità scalare costante su una circonferenza di lunghezza $C = 2\pi r$, la **velocità scalare** v sarà legata al periodo di rotazione T o alla frequenza f dalla importante relazione:

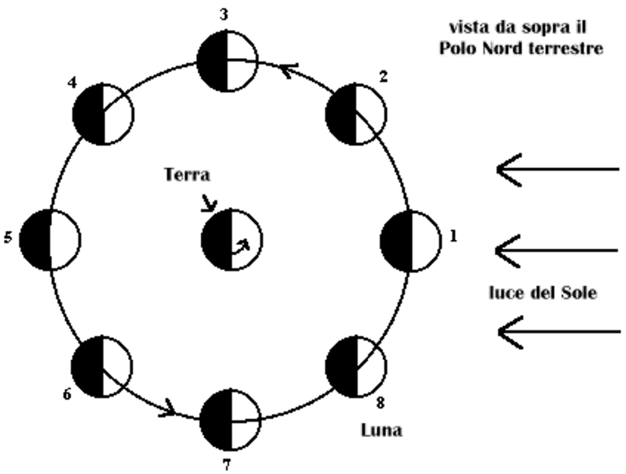
$$v = \frac{C}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$



YouTube IT https://www.youtube.com/watch?v=tgZ1O5wbL6E

Accelerazione centripeta della Luna

Esempio
La Luna gira attorno alla Terra seguendo una traiettoria (orbita) approssimativamente circolare con un raggio di circa 384.000 km, e impiega un tempo T=27.3 giorni (periodo) a percorrere un'orbita completa a velocità scalare uniforme.
Determinare l'accelerazione della Luna rispetto alla Terra.



Suggerimento
Occorre servirsi della velocità di rotazione *v*, convertendo le grandezze disponibili in unità del Sistema Internazionale (SI).

La **lunghezza** dell'orbita lunare è pari a $C = 2\pi r, \quad con \quad r = 3.84 \cdot 10^8 m$

Il **periodo** di rotazione, espresso in secondi, è $T = (27.3 giorni)\dfrac{24.0h}{giorno}\dfrac{3600s}{h} = 2.36 \cdot 10^6 s$

Dunque, essendo la velocità scalare di rotazione $v = 2\pi r / T$, avremo una **accelerazione centripeta** di modulo pari a :

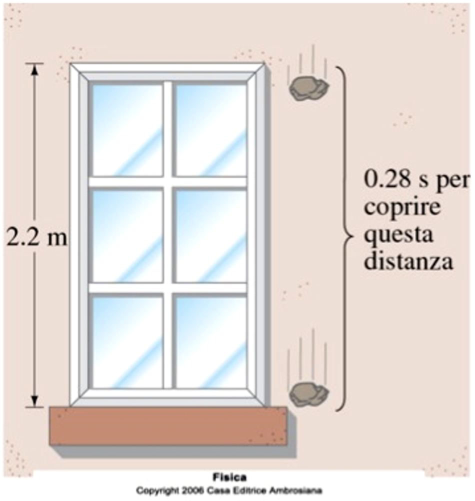
$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 (3.84 \cdot 10^8 m)}{(2.36 \cdot 10^6 s)^2} = 0.00272 \quad m/s^2 = 2.72 \cdot 10^{-3} m/s^2$$

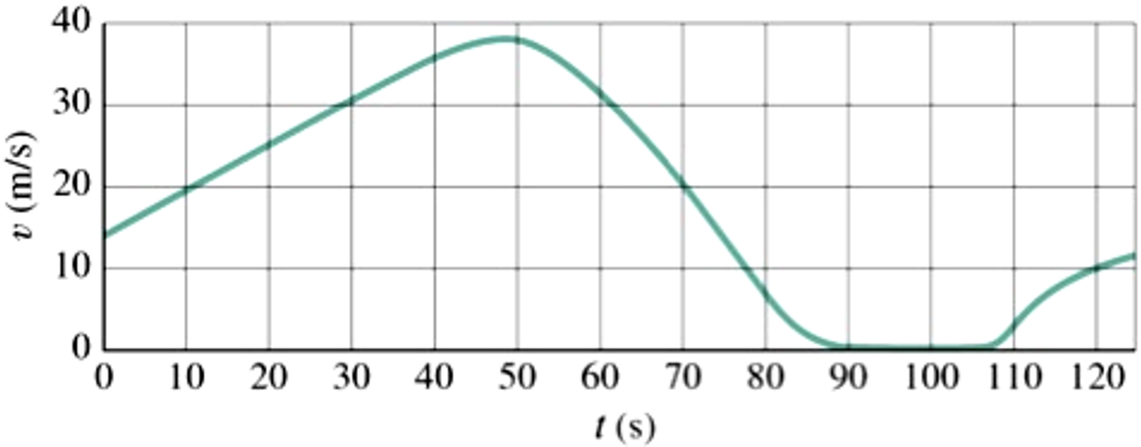
Riscrivendo questo risultato in termini della **accelerazione di gravità** $g=9.80 m/s^2$, avremo:

$$a_R = 2.72 \cdot 10^{-3} m/s^2 \left(\frac{g}{9.80 m/s^2} \right) = 2.78 \cdot 10^{-4} g << g$$

Esercizi Cinematica 1-D

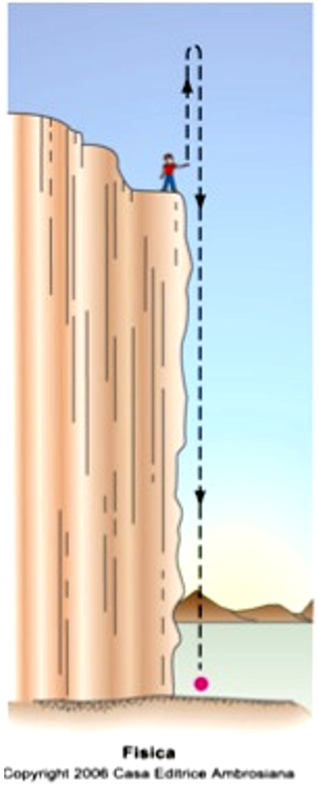
Esercizio 1
Una **pietra in caduta libera** impiega 0.28 s per oltrepassare una finestra alta 2.2 m (vedi figura a destra). Da quale altezza, rispetto alla sommità della finestra, è caduta la pietra?





Esercizio 2
Nella figura in alto è mostrata la **velocità di un treno in funzione del tempo**. (a) In quale istante è massima la sua velocità? (b) Durante quali intervalli di tempo, se ce ne sono, la velocità è costante? (c) Durante quali intervalli di tempo, se esistono, l’accelerazione è costante? (d) In quale istante l’accelerazione ha modulo massimo?

Esercizi Cinematica 1-D



Esercizio 3

Una **statuetta induista di Shiva danzante** viene lanciata verticalmente verso l'alto, con una velocità di 12.0 m/s, dal bordo di uno strapiombo alto 70 m (vedi figura). (a) Dopo quanto tempo raggiungerà la base dello strapiombo? (b) Quale sarà la sua velocità appena prima di colpire il suolo? (c) Qual è la distanza totale percorsa?

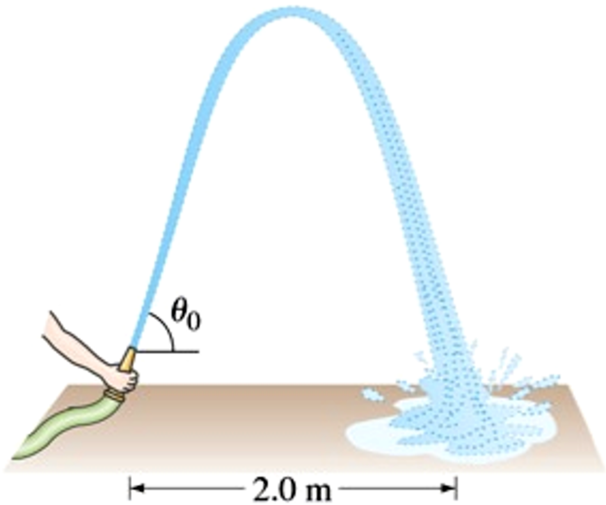
Esercizio 4

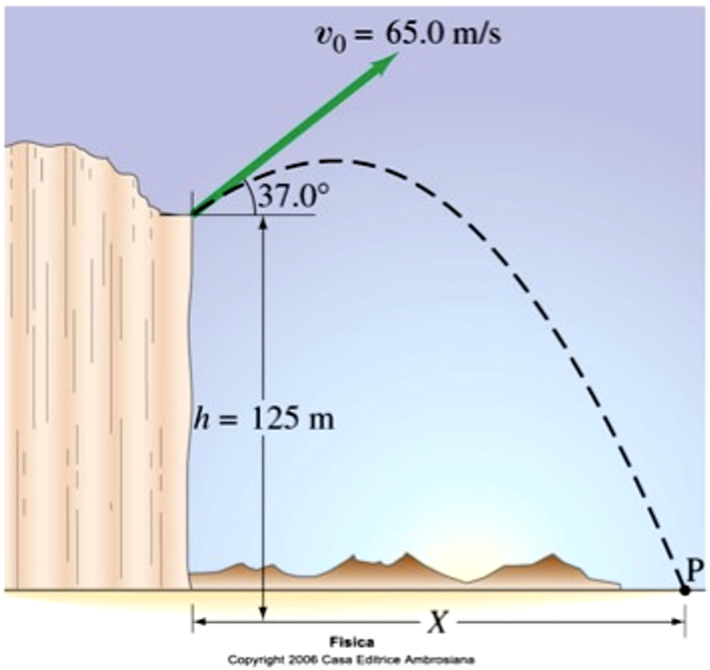
Due treni partono da due stazioni distanti 20 km dirigendosi uno verso l'altro rispettivamente alla velocità costante di $v_1 = 50{,}00$ km/h e $v_2 = 100{,}00$ km /h. Dopo quanto tempo si incontrano?

Esercizi Cinematica 2-D

Esercizio 1

La canna di una pompa antincendio, tenuta vicino al suolo, espelle l'acqua a una velocità pari a 6.8 m/s. A quale/i angolo/i deve essere orientata la canna per fare ricadere l'acqua a una distanza di 2.0 m (vedi figura)? Perchè gli angoli sono due? Disegnate le due traiettorie.

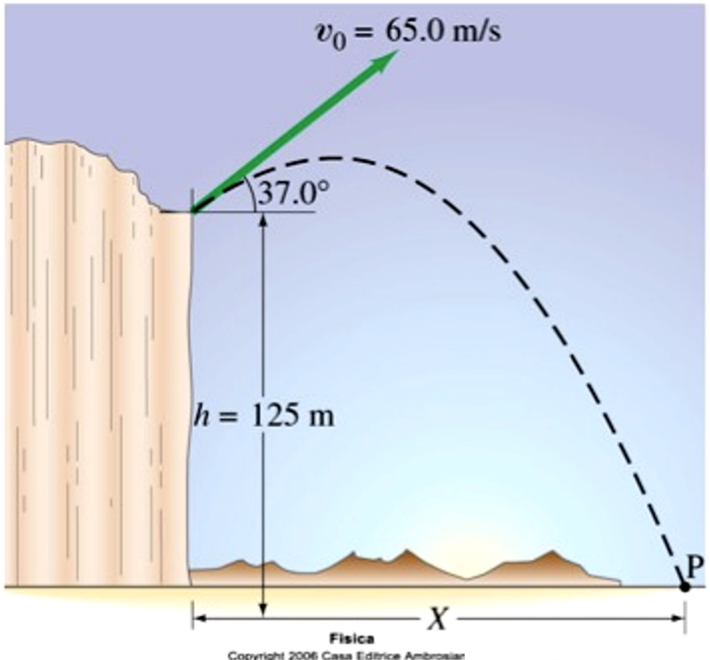




Esercizio 2

Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura). (a) Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno. (b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe. Nell'istante immediatamente prima di colpire il punto P, trovate (c) le componenti orizzontale e verticale della sua velocità, (d) il modulo della velocità e (e) l'angolo formato dal vettore velocità con l'orizzontale. (f) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Esercizi Cinematica 2-D



Esercizio 2

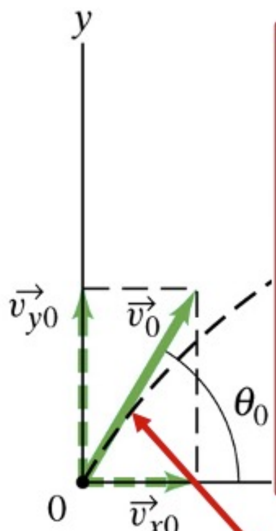
Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura). (a) Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno. (b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe. Nell'istante immediatamente prima di colpire il punto P, trovate (c) le componenti orizzontale e verticale della sua velocità, (d) il modulo della velocità e (e) l'angolo formato dal vettore velocità con l'orizzontale. (f) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

Componenti:

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0; \; v_{y0} = v_0 sen\theta_0$$



Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. ($a_x = 0$, $a_y = -g = cost$)

moto orizzontale (uniforme a_x=0, v_x=cost.)

(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

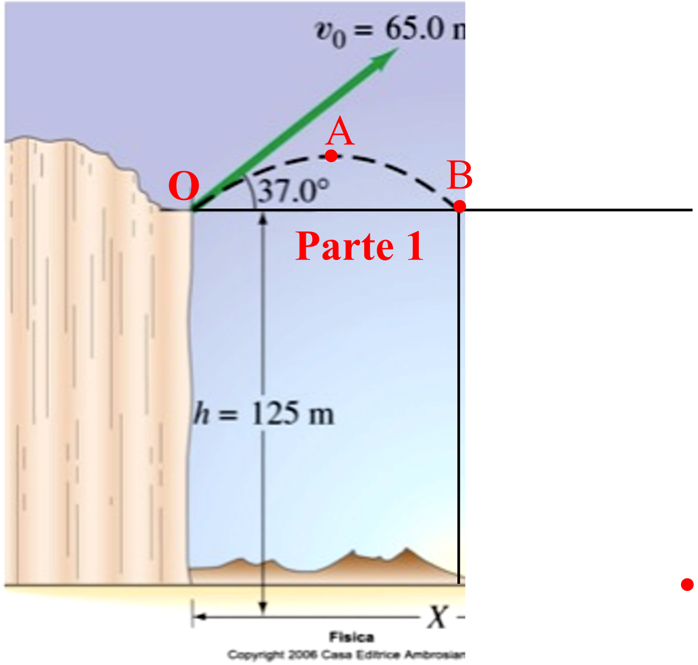
moto verticale (unif.accel. $a_y = -g$)

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

(III-y) $v_y^{\,2} = v_{y0}^{\,2} - 2g(y - y_0)$

Esercizi Cinematica 2-D



Esercizio 2

Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura). (a) Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno. (b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe. Nell'istante immediatamente prima di colpire il punto P, trovate (c) le componenti orizzontale e verticale della sua velocità, (d) il modulo della velocità e (e) l'angolo formato dal vettore velocità con l'orizzontale. (f) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Parte 1 (origine del sistema di riferimento 2D nel punto O: $x_o = 0, y_o = 0$)

$$v_{x0} = 65\, m/s \cos(37°) = 51.91 m/s$$
$$v_{y0} = 65\, m/s\, sen(37°) = 39.12 m/s$$

Componenti della velocità iniziale (nel punto O)

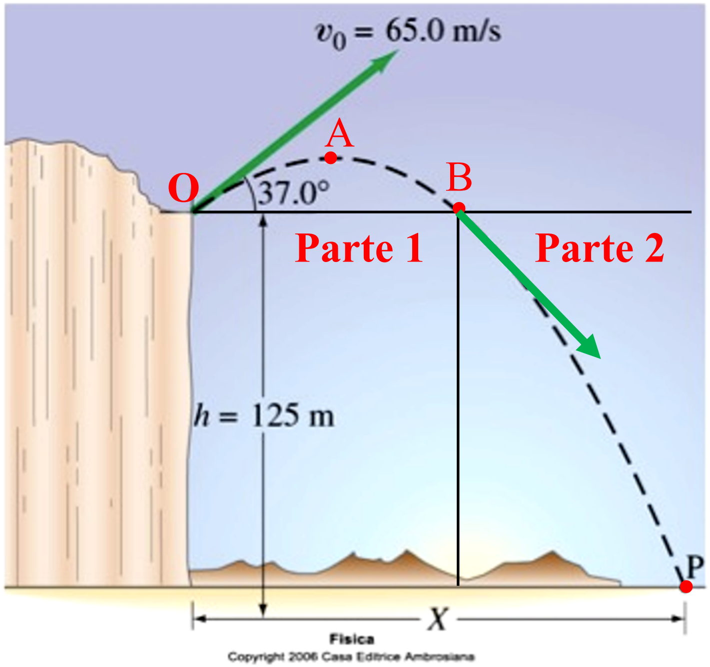
Calcoliamo, per mezzo dell'equazione I-y, il tempo necessario al proiettile per passare dal punto O al punto A (dove $v_y = 0$) e poi quello per arrivare al punto B (che è il doppio del precedente):

$$v_y = v_{y0} - gt \ \rightarrow 0 = v_{y0} - gt_A \ \rightarrow gt_A = v_{y0} \ \rightarrow \ t_A = \frac{v_{y0}}{g} = 3.99\, s \ \rightarrow t_B = 2t_A = 7.98 s$$

Dopodichè sostituiamo il valore t_B nell'equazione II-x (moto uniforme) per ottenere la gittata x_B:

$$x_B = x_0 + v_{x0}t_B \ \rightarrow \ x_B = 0 + (51.91 m/s)(7.98 s) = 414.24 \text{ m}$$

Esercizi Cinematica 2-D



Esercizio 2

Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura). (a) Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno. (b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe. Nell'istante immediatamente prima di colpire il punto P, trovate (c) le componenti orizzontale e verticale della sua velocità, (d) il modulo della velocità e (e) l'angolo formato dal vettore velocità con l'orizzontale. (f) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Parte 2 (origine del sistema di riferimento 2D nel punto B: $x_o = x_B, y_o = 0$)

Adesso spostiamo l'origine nel punto B e prendiamo queste nuove componenti della velocità iniziale:

$$\left.\begin{aligned} v_{x0} &= 51.91 m/s \\ v_{y0} &= -39.12 m/s \end{aligned}\right\}$$

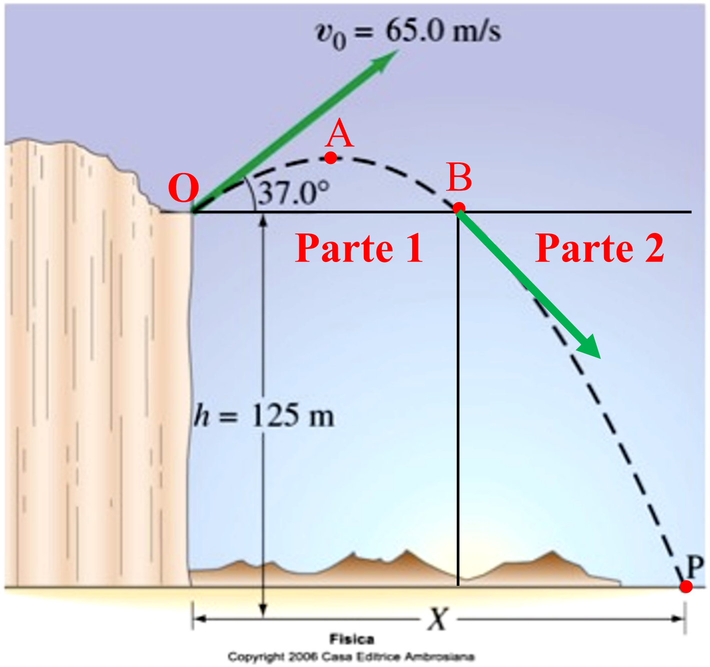
Componenti della velocità nel punto B (la v_{y0} è invertita per questioni di simmetria rispetto al punto O).

Utilizziamo l'equazione II-y per ricavare il tempo impiegato dal proiettile per passare dal punto B al punto P:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - v_{y0}t + y = 0 \rightarrow \frac{9.8\frac{m}{s^2}}{2}t^2 + 39.12\frac{m}{s}t - 125m = 0$$

Questa equazione ha due soluzioni, una negativa (che scartiamo) e una positiva, che è: $t_{BP} = 2.45$s

Esercizi Cinematica 2-D



Esercizio 2

Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura). (a) Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno. (b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe. Nell'istante immediatamente prima di colpire il punto P, trovate (c) le componenti orizzontale e verticale della sua velocità, (d) il modulo della velocità e (e) l'angolo formato dal vettore velocità con l'orizzontale. (f) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Parte 2 (origine del sistema di riferimento 2D nel punto B: $x_o = x_B, y_o = 0$)

Quindi il tempo totale di volo sarà:

$$t_{tot} = t_B + t_{BP} = 7.98s + 2.45s = 10.43s$$

Sostituendo t_{BP} nella solita equazione II-x per il moto uniforme, e considerando che $x_o = x_B$, otteniamo la gittata complessiva:

$$x_P = x_B + v_{x0}t_{BP} \;\rightarrow\; x_P = 414.24m + (51.91m/s)(2.45s) = 414.24m + 127.18m$$
$$= 541.42m$$

Provate a rispondere da soli alle altre domande…

Esercizi Cinematica 2-D

Esercizio 3
Durante il servizio, un tennista cerca di colpire la palla orizzontalmente. Qual'è la velocità minima che deve essere impressa alla palla per superare la rete alta 0.90 m e posta a circa 15.0 m di distanza dal tennista, se la palla viene lanciata da 2.50 m di altezza? Dove cadrà la palla, se sfiora la rete? E in tal caso sarà un servizio valido (cioè la palla cadrà entro 7.0 m dalla rete)? Quanto a lungo resterà in aria?