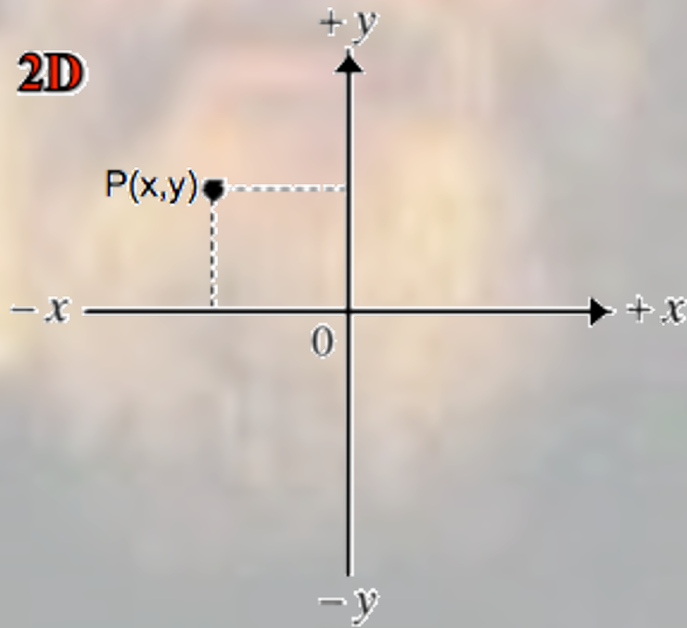


## LA CINEMATICA in DUE DIMENSIONI



# Moto di un proiettile in due dimensioni



**Galileo** fu il primo a capire che il moto di un proiettile soggetto alla gravità può essere analizzato molto più semplicemente ed efficacemente prendendo in considerazione **separatamente** le componenti orizzontale e verticale del moto. Così facendo, poiché l'accelerazione di gravità è diretta costantemente verso il basso (asse  $y$  negativo), il moto lungo l'asse  $y$  sarà **uniformemente accelerato**; il moto lungo l'asse  $x$  invece, non essendo soggetto ad accelerazione, sarà **uniforme** (cioè a velocità costante). **La velocità vettoriale complessiva sarà data quindi, ad ogni istante, dalla somma delle sue componenti lungo i due assi coordinati:**  $\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$

## Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. ( $a_x = 0$ , $a_y = -g = \text{cost}$ )

**moto orizzontale (uniforme  $a_x = 0$ ,  $v_x = \text{cost.}$ )**

$$\text{(I-x)} \quad v_x = v_{x0}$$

$$\text{(II-x)} \quad x = x_0 + v_{x0}t$$

**moto verticale (unif.accel.  $a_y = -g$ )**

$$\text{(I-y)} \quad v_y = v_{y0} - gt$$

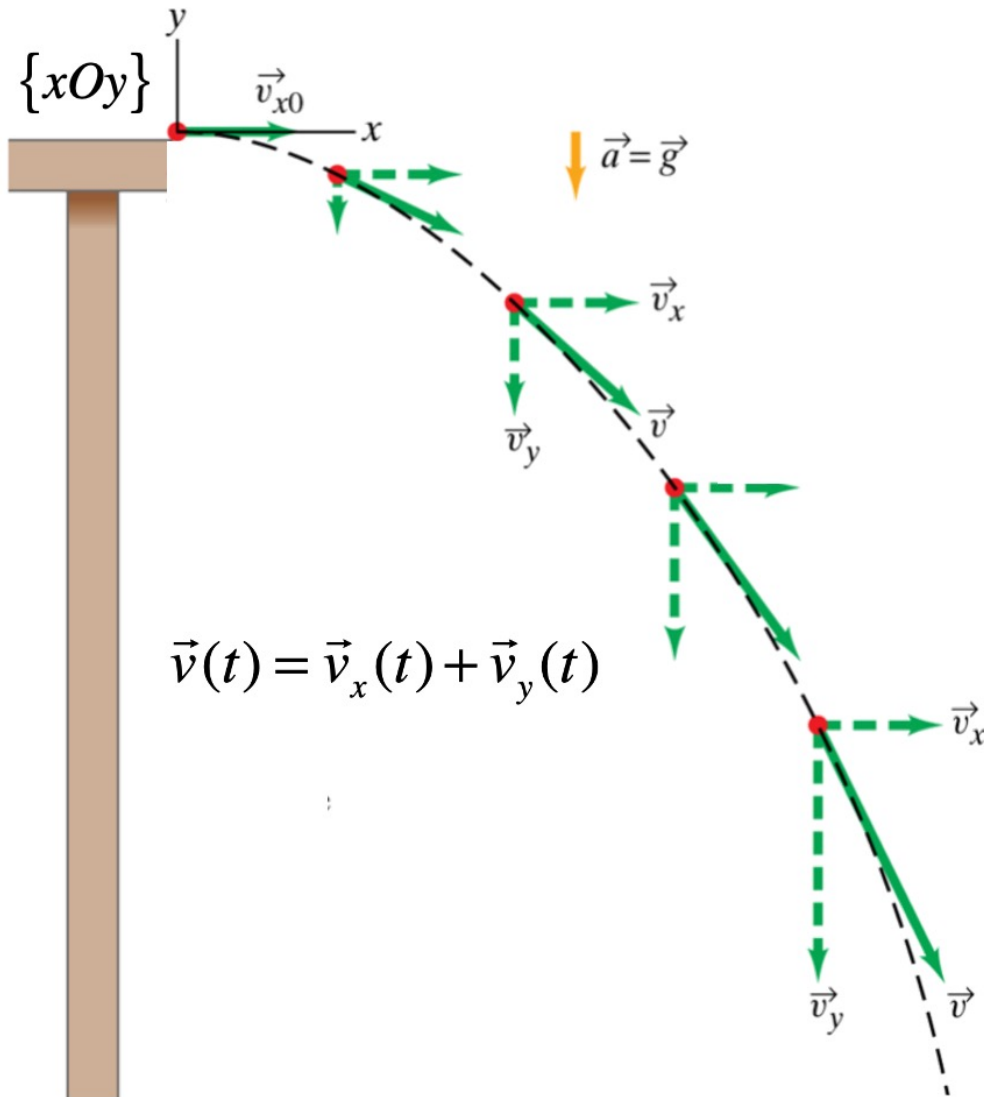
$$\text{(II-y)} \quad y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{(III-y)} \quad v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$$

**Velocità vettoriale iniziale:**

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

# Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1



Equazioni del moto per  
le due componenti  
indipendenti

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} = \text{cost.} ; & x(t) = v_{x0}t \\ v_y(t) = -gt ; & y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

**Combinando i moti lungo i due assi si  
ottiene una traiettoria parabolica  
(in questo caso un arco di parabola)**

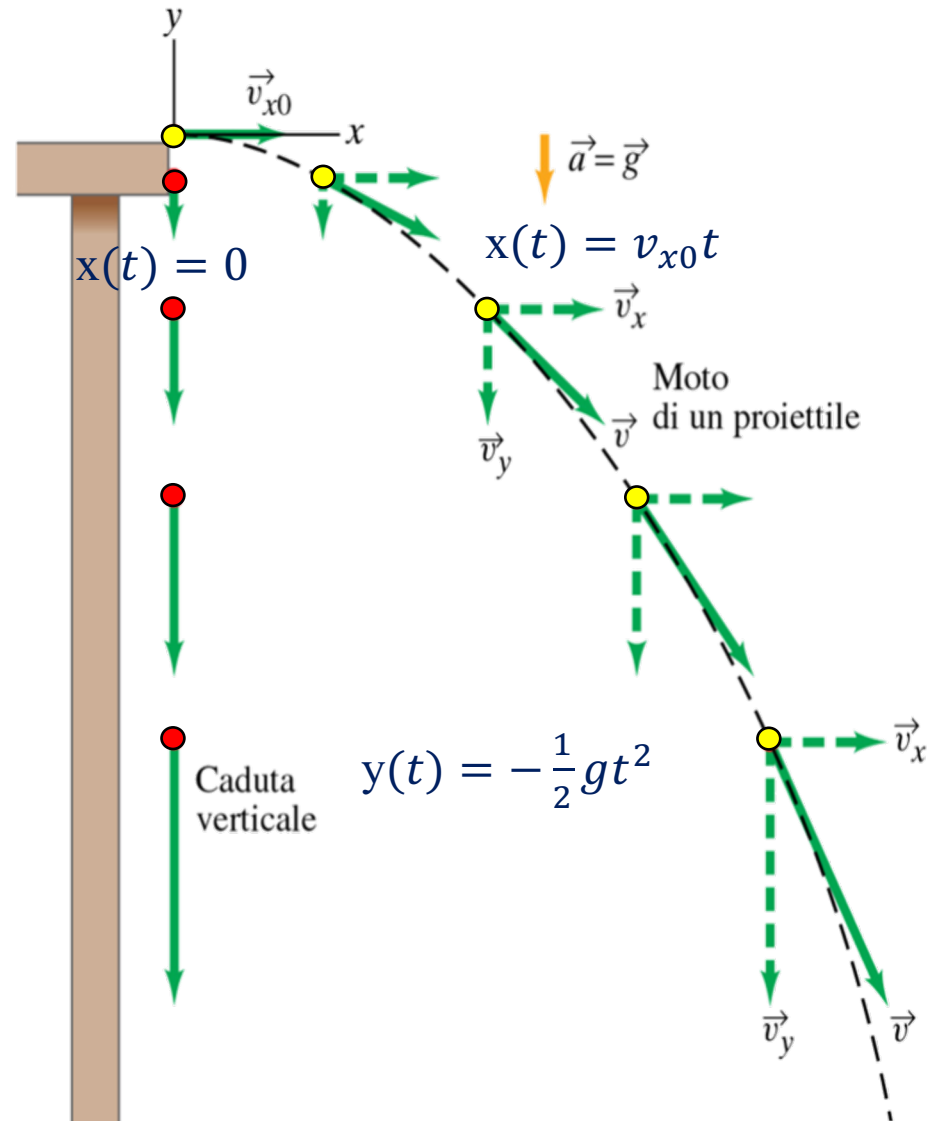
# Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1

## Quesito

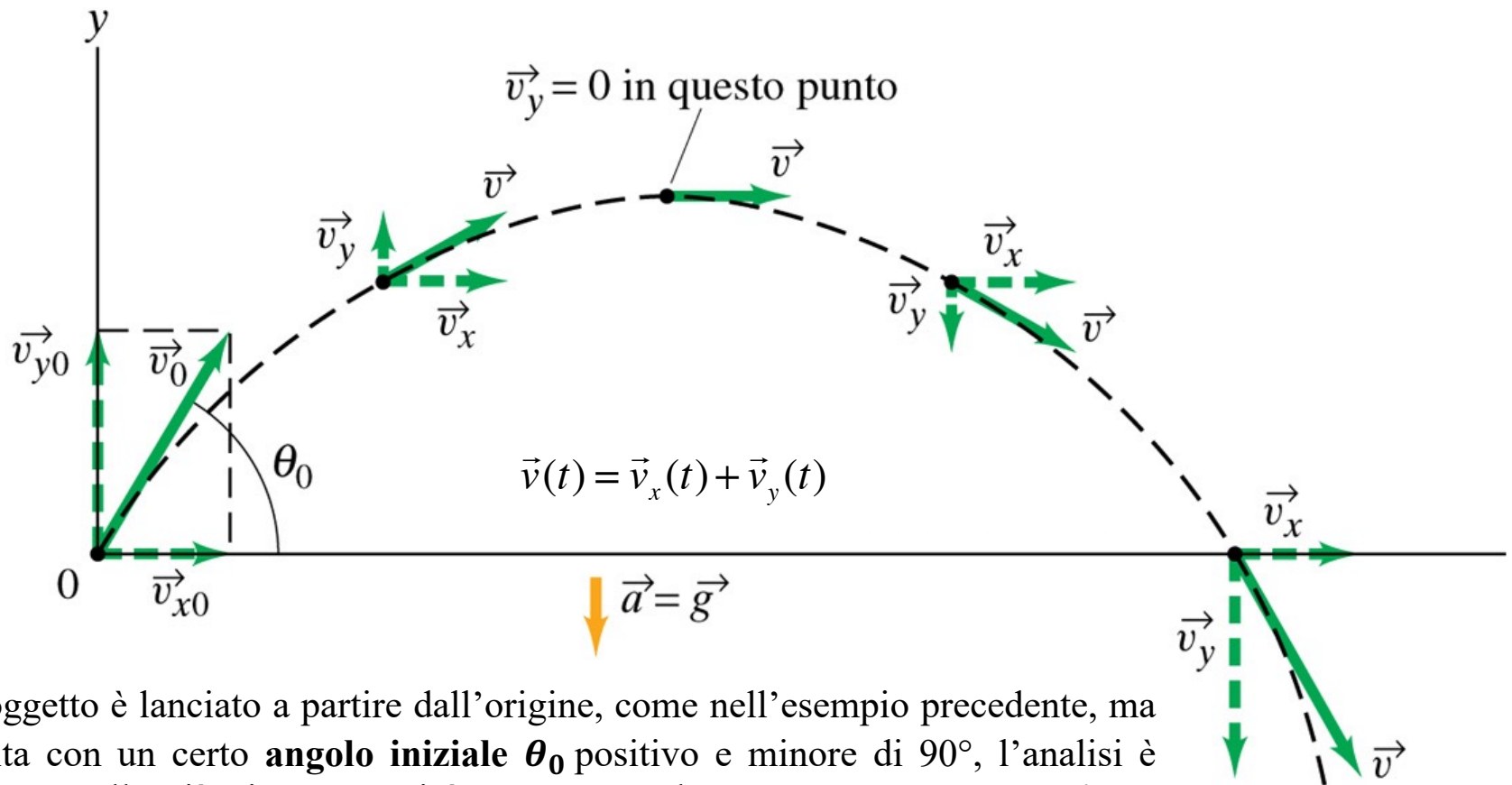
Se contemporaneamente alla pallina (gialla) dell'esempio precedente un'altra pallina (rossa) viene lasciata cadere dal bordo del tavolo da ferma ( $v_{x0}=0$  e  $v_{y0}=0$ ), quale delle due palline raggiungerà prima il suolo?

## Risposta

Le due palline raggiungono il suolo **contemporaneamente**, perchè il loro moto (uniformemente accelerato) lungo la direzione **verticale** è il medesimo (essendo la componente verticale della velocità  $v_{y0}=0$  in entrambi i casi). Il moto **differisce** invece lungo la componente **orizzontale** (moto uniforme), in quanto la velocità  $v_{x0}$  iniziale è differente nei due casi – diversa da zero per la pallina gialla, uguale a zero per la rossa .

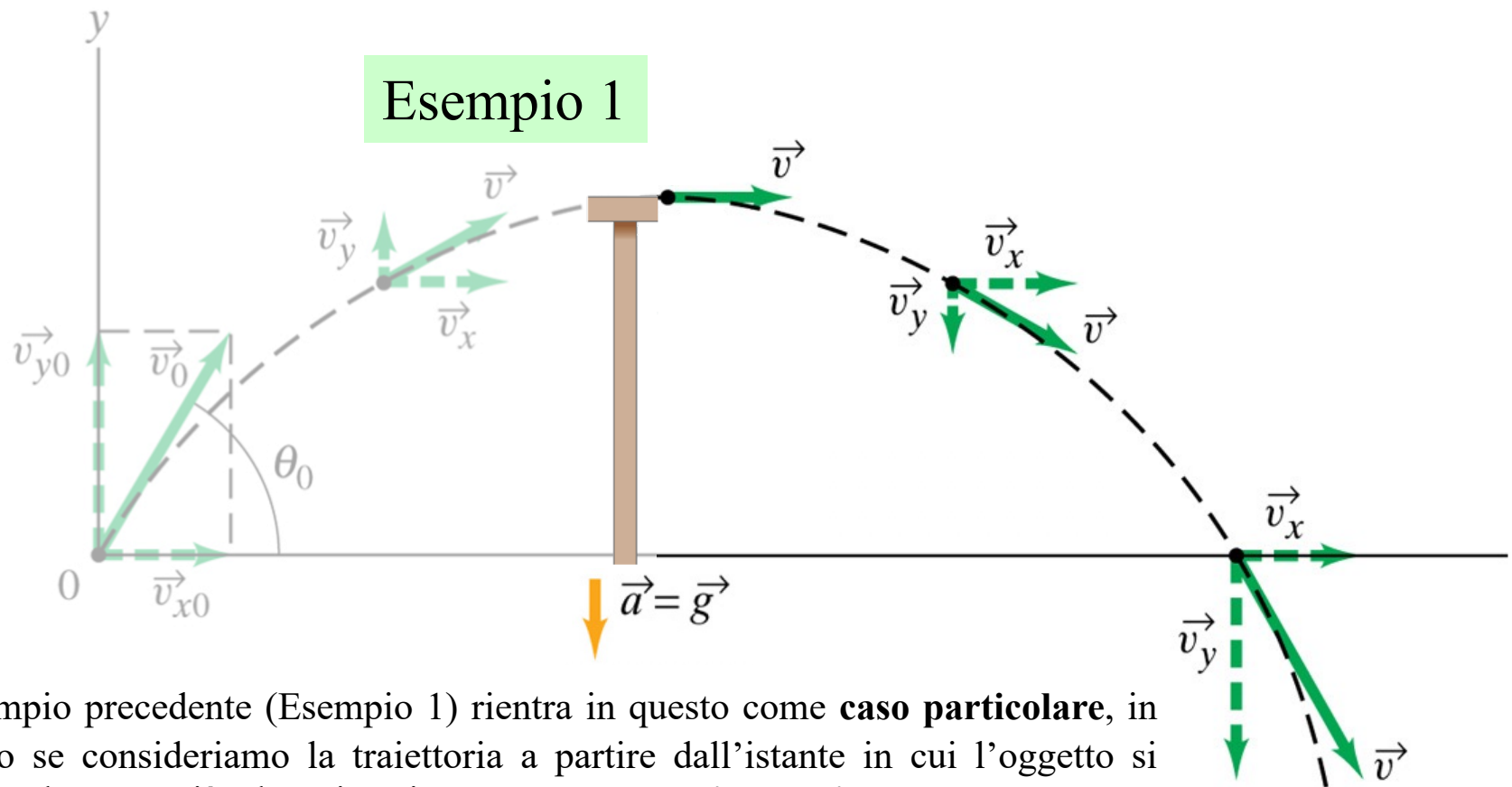


## Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 2



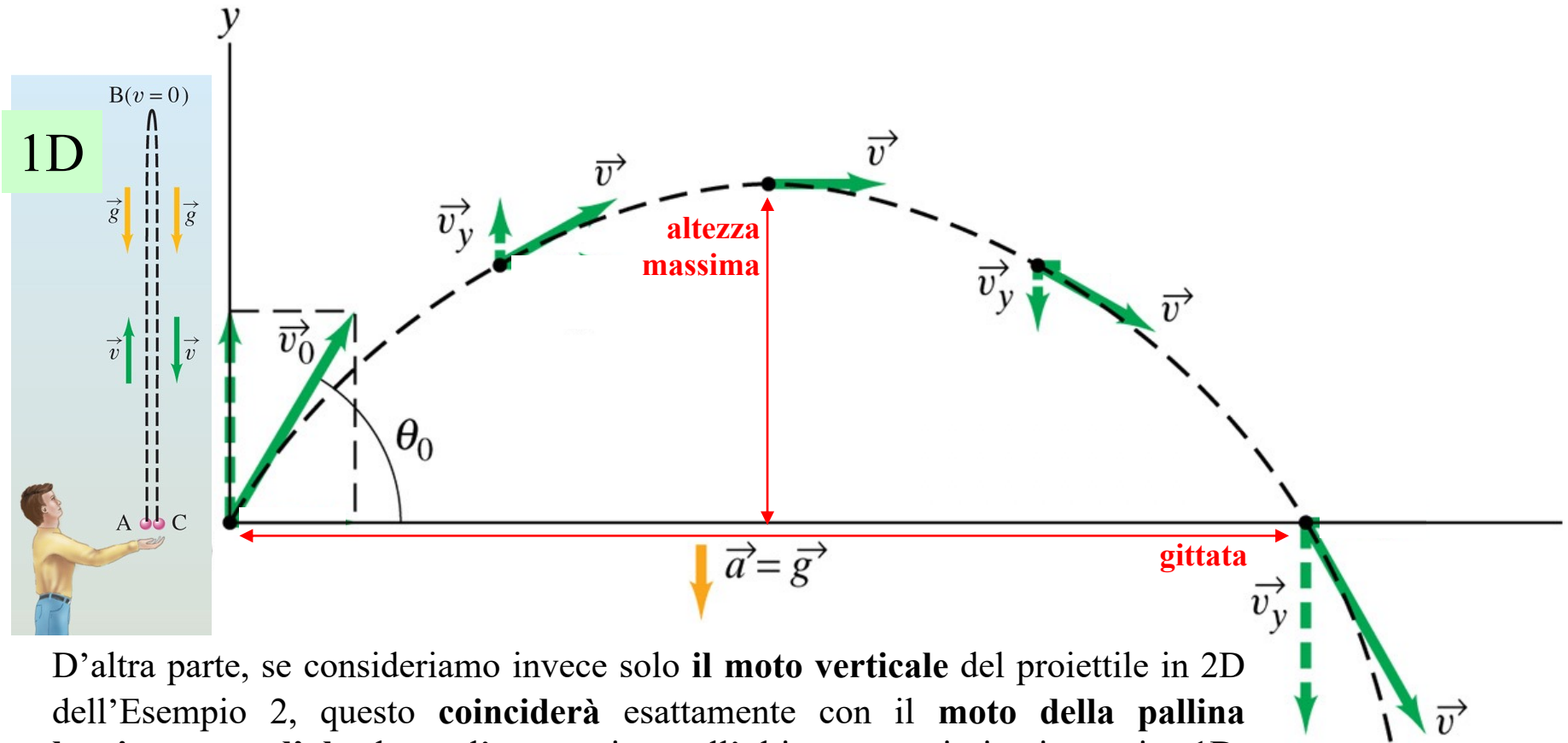
Se l'oggetto è lanciato a partire dall'origine, come nell'esempio precedente, ma stavolta con un certo **angolo iniziale**  $\theta_0$  positivo e minore di  $90^\circ$ , l'analisi è simile a quella già vista ma qui è presente anche una **componente verticale positiva** della velocità  $v_{y0} > 0$  che a causa della gravità decresce uniformemente fino ad annullarsi quando l'oggetto raggiunge il punto più alto della traiettoria, dopodiché cresce nuovamente in modulo ma con verso opposto. La **componente orizzontale**  $v_{x0}$  resta invece costante come nell'esempio precedente. La traiettoria complessiva è adesso una **parabola completa**.

## Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 2



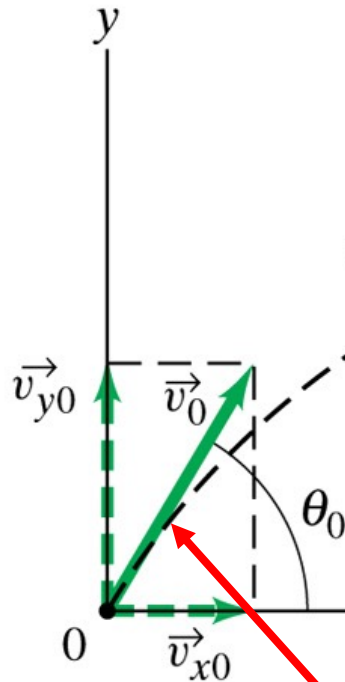
L'esempio precedente (Esempio 1) rientra in questo come **caso particolare**, in quanto se consideriamo la traiettoria a partire dall'istante in cui l'oggetto si trova nel punto più alto, ritroviamo esattamente l'**arco di parabola** percorso dalla pallina che, rotolando, cadeva dal tavolo con velocità verticale iniziale nulla...

## Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 2



D'altra parte, se consideriamo invece solo **il moto verticale** del proiettile in 2D dell'Esempio 2, questo **coinciderà** esattamente con il **moto della pallina lanciata verso l'alto** lungo l'asse  $y$  visto nell'ultimo esempio in cinematica 1D. Da questa analogia possiamo dedurre che **l'altezza massima** raggiunta dal proiettile e il suo **tempo totale di volo** coincideranno con quelli della pallina (se lanciata con la stessa velocità verticale iniziale  $v_{y0}$ ) e quindi non dipenderanno dalla componente  $v_{x0}$ , la quale entrerà in gioco solo nel calcolo della **gittata** del proiettile (cioè la distanza dall'origine del punto in cui il proiettile tocca terra).

# Esercizi sul moto di un proiettile in due dimensioni



## Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. ( $a_x = 0$ , $a_y = -g = \text{cost}$ )

**moto orizzontale (uniforme  $a_x = 0$ ,  $v_x = \text{cost.}$ )**

$$\text{(I-x)} \quad v_x = v_{x0}$$

$$\text{(II-x)} \quad x = x_0 + v_{x0}t$$

**moto verticale (unif. accel.  $a_y = -g$ )**

$$\text{(I-y)} \quad v_y = v_{y0} - gt$$

$$\text{(II-y)} \quad y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{(III-y)} \quad v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$$

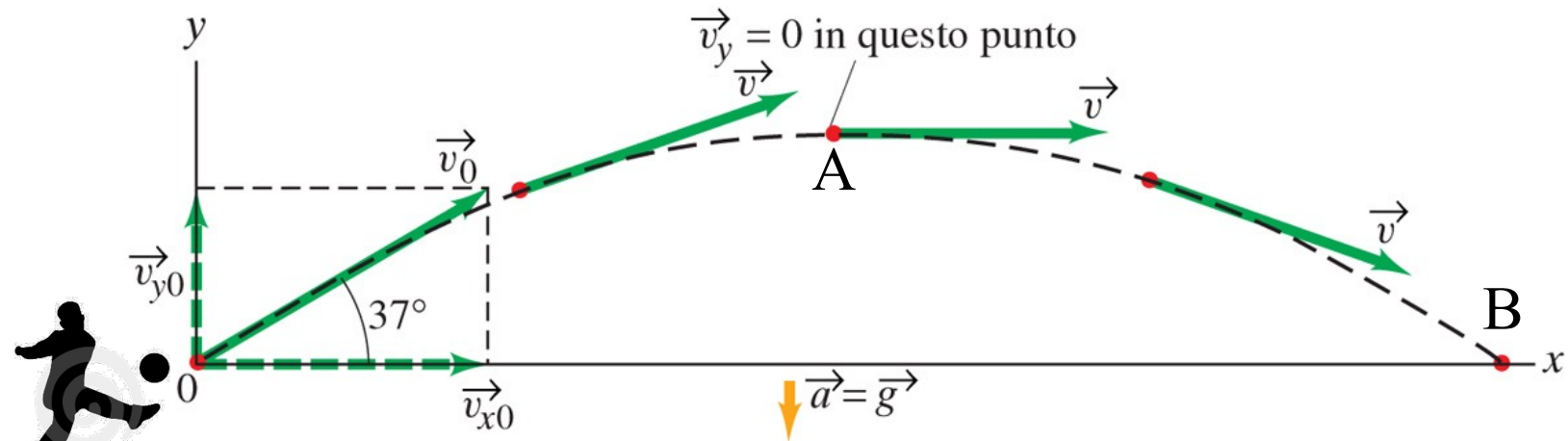
**Velocità vettoriale iniziale:**

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

**Componenti:**

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta_0; \quad v_{y0} = v_0 \text{sen} \theta_0$$





### Esercizio

Un pallone viene calciato a un angolo  $\theta=37.0^\circ$  con una velocità iniziale  $v_0=20\text{m/s}$ , come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:

(a) l'altezza massima  $y_A$  raggiunta dal pallone nel punto A

...

### Suggerimenti

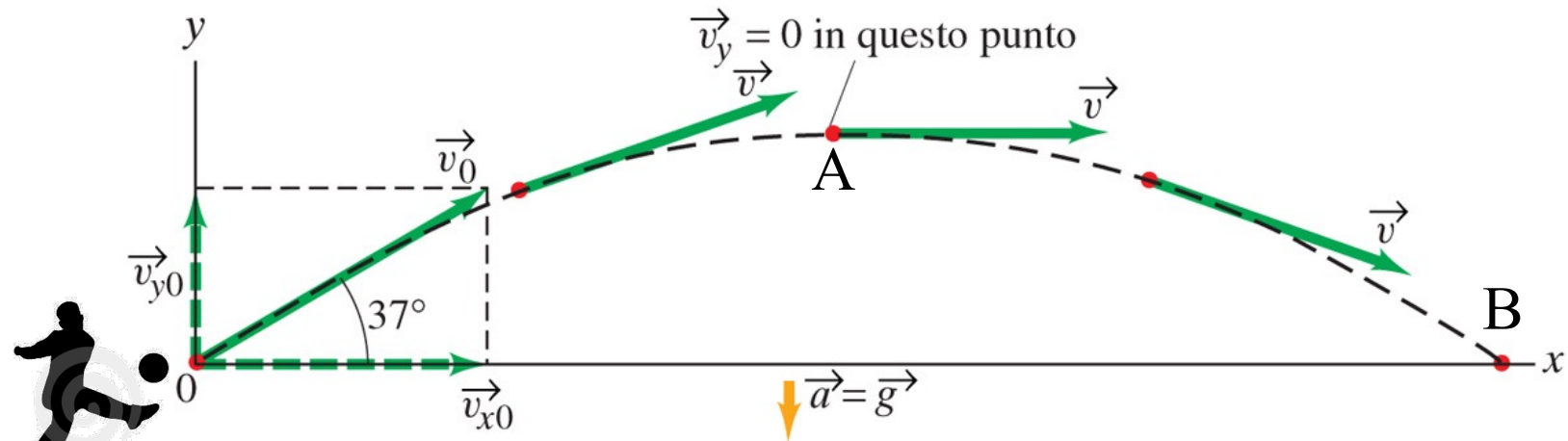
- Trattare separatamente i moti lungo gli assi x e y e usare le equazioni del moto di un proiettile;
- Ricordare che il moto lungo x avviene a velocità costante mentre quello lungo y è a velocità variabile.
- Considerare che il **tempo totale che il pallone trascorre in aria** e l'**altezza massima che raggiunge** sono determinati solo dal moto lungo y, mentre la **distanza massima in orizzontale (gittata)** è determinata dal moto congiunto lungo gli assi x e y;

Innanzitutto occorre scomporre la velocità iniziale nelle sue componenti:

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta ; v_{y0} = v_0 \sin \theta$$

$$v_{x0} = v_0 \cos 37.0^\circ = (20.0\text{m/s})(0.799) = 16.0\text{m/s}$$

$$v_{y0} = v_0 \sin 37.0^\circ = (20.0\text{m/s})(0.602) = 12.0\text{m/s}$$



### Esercizio

Un pallone viene calciato a un angolo  $\theta=37.0^\circ$  con una velocità iniziale  $v_0=20\text{m/s}$ , come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:

(a) l'altezza massima  $y_A$  raggiunta dal pallone nel punto A

...

## Equazioni del moto di un proiettile ( $a_x=0$ , $a_y = -g = \text{cost}$ )

**moto orizzontale ( $a_x=0$ ,  $v_x=\text{cost.}$ )**

**UNIFORME**

**(I-x)**  $v_x = v_{x0}$

**(II-x)**  $x = x_0 + v_{x0}t$

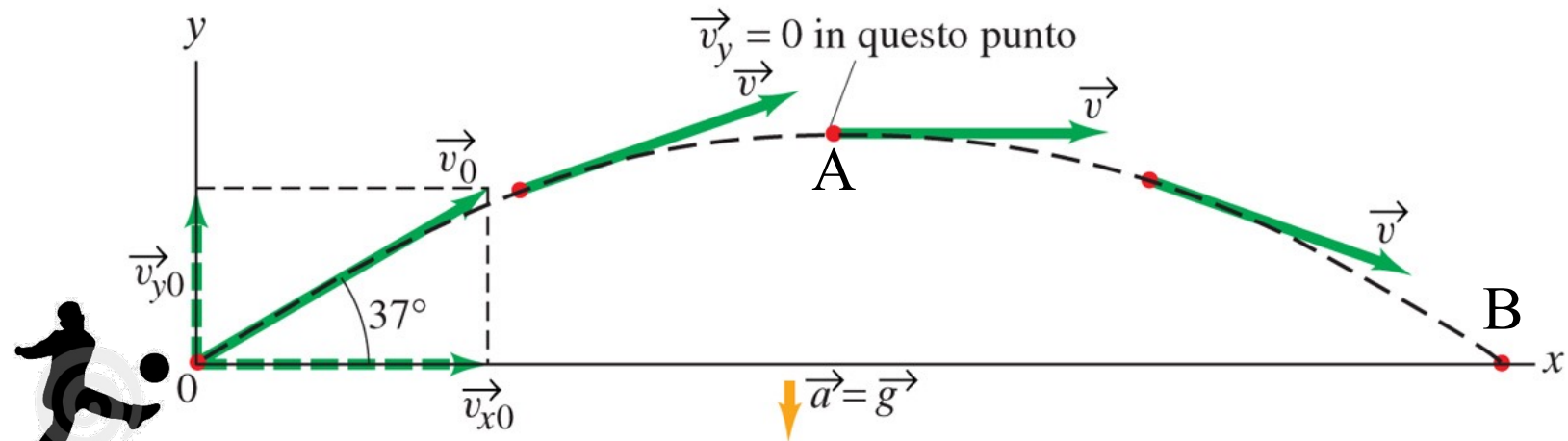
**moto verticale ( $a_y = -g$ )**

**UNIFORMEMENTE ACCELERATO**

**(I-y)**  $v_y = v_{y0} - gt$

**(II-y)**  $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

**(III-y)**  $v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$



### Esercizio

Un pallone viene calciato a un angolo  $\theta=37.0^\circ$  con una velocità iniziale  $v_0=20\text{m/s}$ , come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:

(a) l'altezza massima  $y_A$  raggiunta dal pallone nel punto A

...

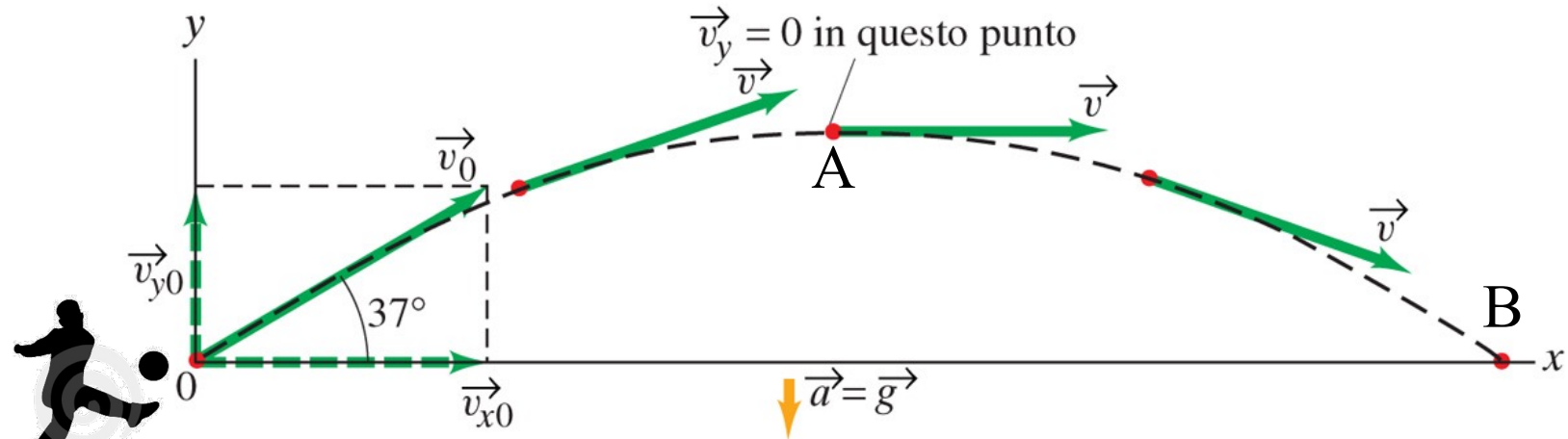
Nel punto A la velocità ha direzione orizzontale, dunque  $v_y=0$  e il tempo  $t_A$  necessario a raggiungere il punto A sarà dato dall'equazione I-y risolta rispetto a t:

$$v_y = v_{y0} - gt \rightarrow t_A = \frac{v_{y0}}{g} = \frac{12.0\text{m/s}}{9.80\text{m/s}^2} = 1.22\text{s}$$

da cui, essendo  $x_0=0$  ed  $y_0=0$ , dall'equazione II-y si ricava la coordinata  $y_A$  della massima altezza:

$$y_A = v_{y0}t_A - \frac{1}{2}gt_A^2 = (12.0\text{m/s})(1.22\text{s}) - \frac{1}{2}(9.80\text{m/s}^2)(1.22\text{s})^2 = 7.35\text{m}$$

Questo risultato si poteva ricavare anche utilizzando solo l'equazione III-y (considerando che il pallone raggiunge la quota  $y_A$  con velocità  $v_y=0$ ) ma in questo modo abbiamo ottenuto una informazione supplementare sul tempo  $t_A$  che ci risulterà utile per rispondere alle prossime domande...



### Esercizio

Un pallone viene calciato a un angolo  $\theta=37.0^\circ$  con una velocità iniziale  $v_0=20\text{m/s}$ , come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:

...

(b) il tempo trascorso prima che il pallone tocchi terra nel punto B

...

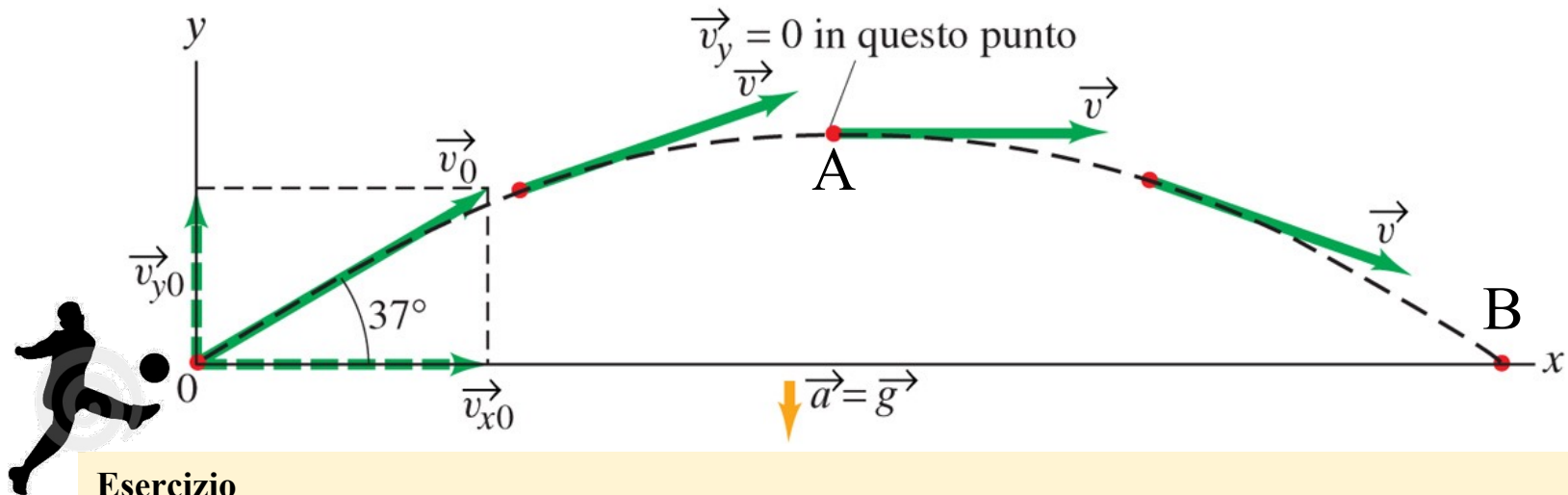
Sarebbe semplicemente uguale al doppio del tempo  $t_A$  necessario a raggiungere il punto A:

$$t_B = 2t_A = 2 \cdot (1.22\text{s}) = 2.44\text{s}$$

ma è possibile ricavarlo anche dall'equazione II-y con  $y_0=0$  ed  $y=0$ , risolvendola rispetto al tempo:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 0 = 0 + (12\text{m/s})t - \frac{1}{2}(9.80\text{m/s}^2)t^2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \left[ \frac{1}{2}(9.80\text{m/s}^2)t - 12.0\text{m/s} \right]t &= 0 & \rightarrow t = 0 \\ \rightarrow t_B &= \frac{2(12.0\text{m/s})}{(9.80\text{m/s}^2)} = 2.45\text{s} \end{aligned}$$



### Esercizio

Un pallone viene calciato a un angolo  $\theta=37.0^\circ$  con una velocità iniziale  $v_0=20\text{m/s}$ , come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:

...

- (c) la distanza a cui tocca terra nel punto B
- (d) le componenti del vettore velocità nel punto A
- (e) le componenti del vettore accelerazione nel punto A

**moto orizzontale ( $a_x=0, v_x=\text{cost.}$ )**  
**UNIFORME**

**(I-x)**  $v_x = v_{x0}$

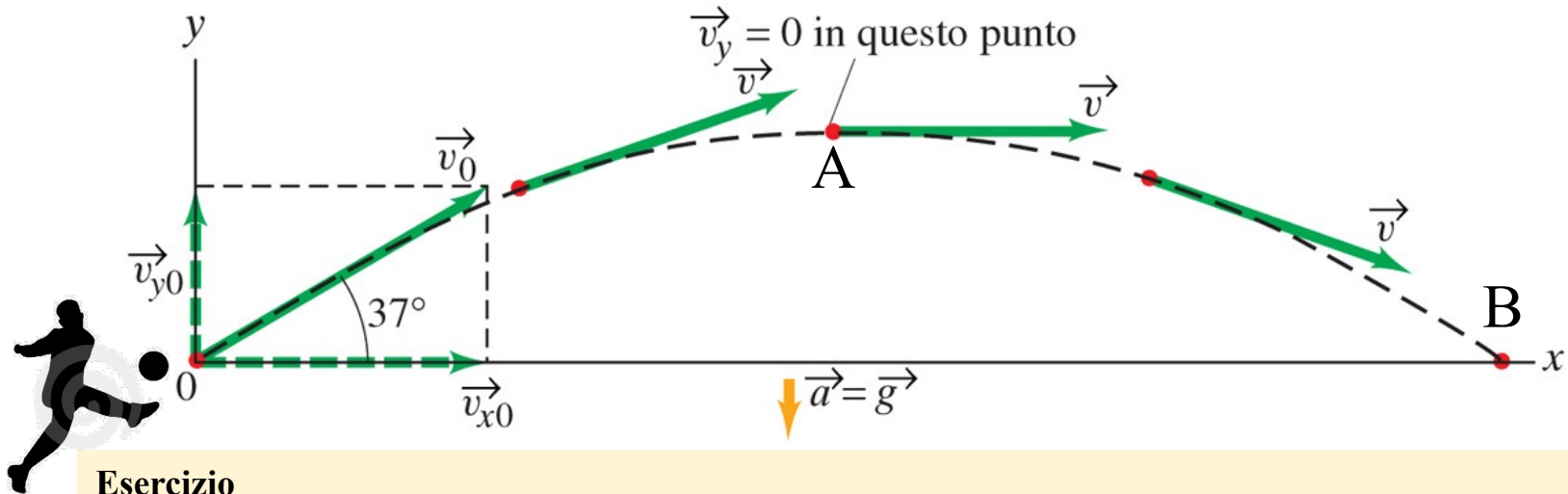
**(II-x)**  $x = x_0 + v_{x0}t$

**moto verticale ( $a_y = -g$ )**  
**UNIFORMEMENTE ACCELERATO**

**(I-y)**  $v_y = v_{y0} - gt$

**(II-y)**  $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

**(III-y)**  $v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$



### Esercizio

Un pallone viene calciato a un angolo  $\theta=37.0^\circ$  con una velocità iniziale  $v_0=20\text{m/s}$ , come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:

...

- (c) la distanza a cui tocca terra nel punto B
- (d) le componenti del vettore velocità nel punto A
- (e) le componenti del vettore accelerazione nel punto A

(c) La coordinata  $x_B$  si ricava semplicemente sostituendo  $t_B$  nell'equazione II-x con  $x_0=0$  e  $v_{x0}=16.0\text{m/s}$ :

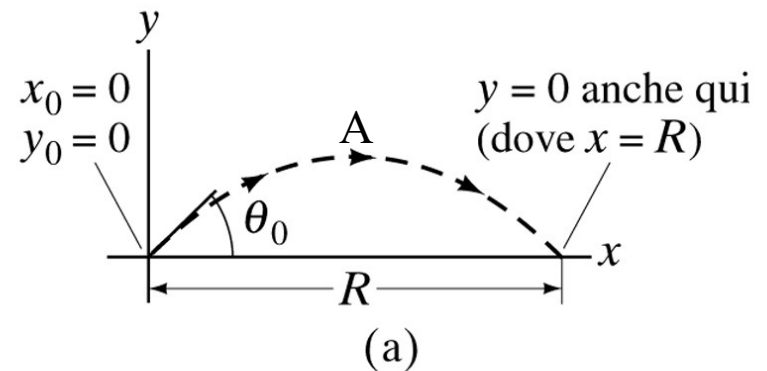
$$x = x_0 + v_{x0}t \rightarrow x_B = v_{x0}t_B = (16.0\text{m/s})(2.45\text{s}) = 39.2\text{m}$$

(d) La componente y della velocità nel punto A è nulla, mentre la componente x resta costante per tutta la durata del moto e dunque è uguale a  $v_{xA}=v_{x0}=16.0\text{m/s}$ ;

(e) Il vettore accelerazione, ormai dovrebbe essere chiaro, è sempre costante, di modulo pari a  $g$  e rivolto verso il basso.

# Gittata orizzontale di un proiettile

La **gittata orizzontale** di un proiettile è definita come la *distanza orizzontale percorsa dal proiettile prima di tornare all'altezza iniziale  $y=y_0$*  (che di solito è quella del suolo). E' interessante derivare una **formula generale** che permetta di calcolare la gittata orizzontale  $R$  di un proiettile sparato al tempo  $t=0$  dall'origine  $(x_0, y_0)$  di un sistema di riferimento (nel verso delle  $x$  crescenti) in funzione della sua velocità iniziale  $v_0$  e del suo angolo di sparo  $\theta_0$ .



Calcoliamo il tempo totale di volo dall'equazione (I-y) per il moto verticale, ponendo a zero la componente  $y$  della velocità nel punto A e poi raddoppiando il tempo necessario a raggiungere quel punto:

$$0 = v_{y0} - gt_A \rightarrow t_A = \frac{v_{y0}}{g} \rightarrow t = 2 \frac{v_{y0}}{g}$$

...e sostituiamo nell'equazione per il moto orizzontale:

$$R = x = v_{x0}t \rightarrow R = v_{x0} \left( \frac{2v_{y0}}{g} \right) = \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} = \frac{2v_0^2 \text{sen}\theta_0 \cos\theta_0}{g} \quad \text{essendo: } \vec{v}_0 \begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_{y0} = v_0 \text{sen}\theta_0 \end{cases}$$

Da qui, utilizzando l'identità trigonometrica  $2\text{sen}\theta\cos\theta=\text{sen}2\theta$ , avremo infine l'espressione cercata:

$$\rightarrow R = \frac{v_0^2 \text{sen}2\theta_0}{g}$$

## Nota

Da questa equazione si vede che **la gittata orizzontale aumenta col quadrato di  $v_0$** , perciò una velocità iniziale doppia (a parità di angolo di sparo  $\theta_0$ ) porta ad un incremento di quattro volte nella gittata massima!

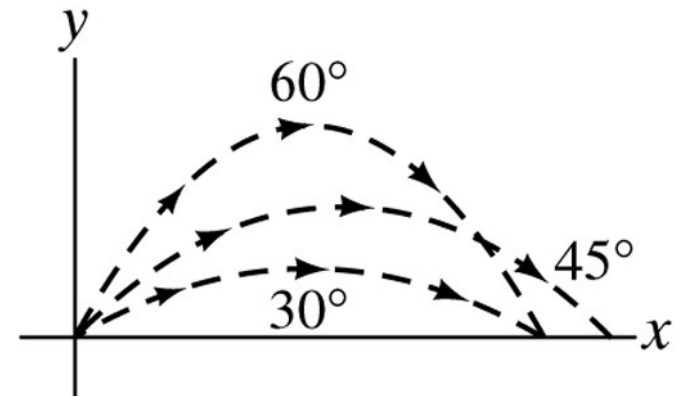
# Gittata orizzontale di un proiettile

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

Fissata invece la velocità iniziale  $v_0$ , e facendo variare l'angolo di sparo  $\theta_0$ , dalla formula appena vista avremo che la **gittata massima**  $R_{\max}$  si otterrà quando il  $\sin(2\theta_0)$  assume il suo valore massimo (=1), e cioè quando:

$$2\theta_0 = 90^\circ \rightarrow \theta_0 = 45^\circ \text{ per cui } R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Ovviamente se la **resistenza** dell'aria non è trascurabile (come si è tacitamente supposto finora) la gittata – per un certo valore della velocità iniziale – sarà minore di quella appena calcolata, e si può verificare che il suo valore massimo si ottiene per un angolo minore di  $45^\circ$ .



angolo in gradi	angolo in radianti	seno
0°	0	0
30°	0,52	0,5
45°	0,79	0,71
60°	1,05	0,87
90°	1,57	1
180°	3,14	0



# Simulare la traiettoria di un proiettile in 2D

<https://ccl.northwestern.edu/netlogo/download.shtml>

# NetLogo



[Home](#)  
[Download](#)  
[Help](#)  
[Forum](#)  
[Resources](#)  
[Extensions](#)  
[FAQ](#)  
[NetLogo Publications](#)  
[Contact Us](#)  
[Donate](#)

Models:  
[Library](#)  
[Community](#)

## Download NetLogo

Most computers can run NetLogo (see [system requirements](#)). If you would like to run NetLogo on a Chromebook or in a web browser, please see if [NetLogo Web](#) will meet your needs.

Multiple versions of NetLogo can be installed on the same computer; installing a new one doesn't remove the old one.

**Version:**

More versions [here](#).  
For help using old models with new versions see the [Transition Guide](#).

SETUP

GO

GO - 1 step

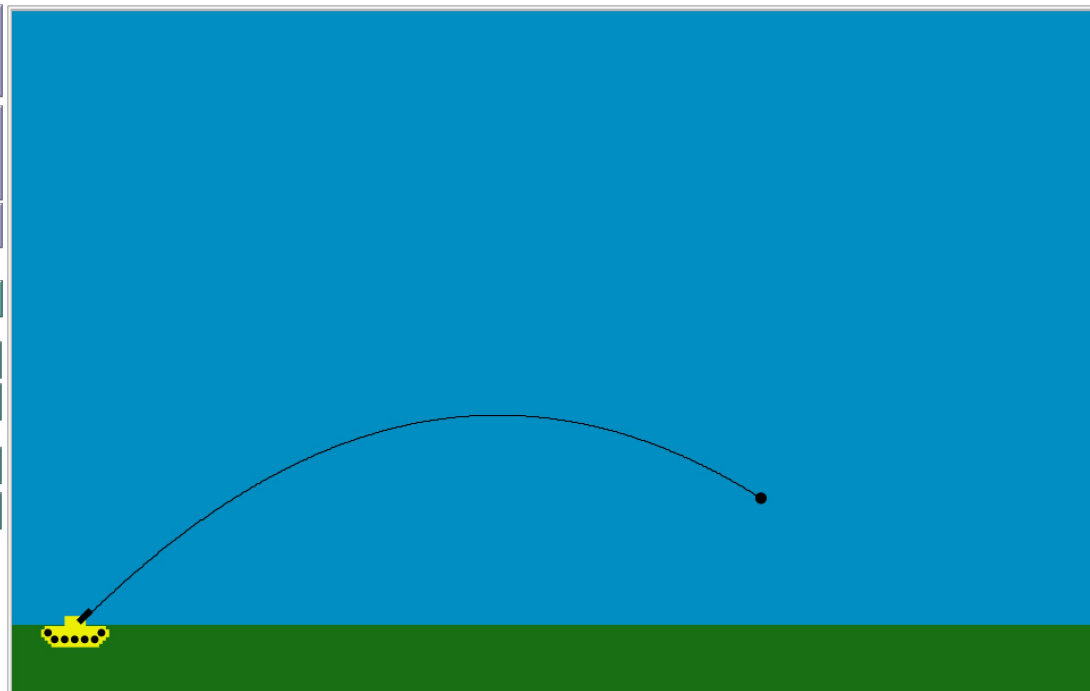
tankx 46 m

initial-velocity 77.65 m/s

angle 45 degree

dt 0.02

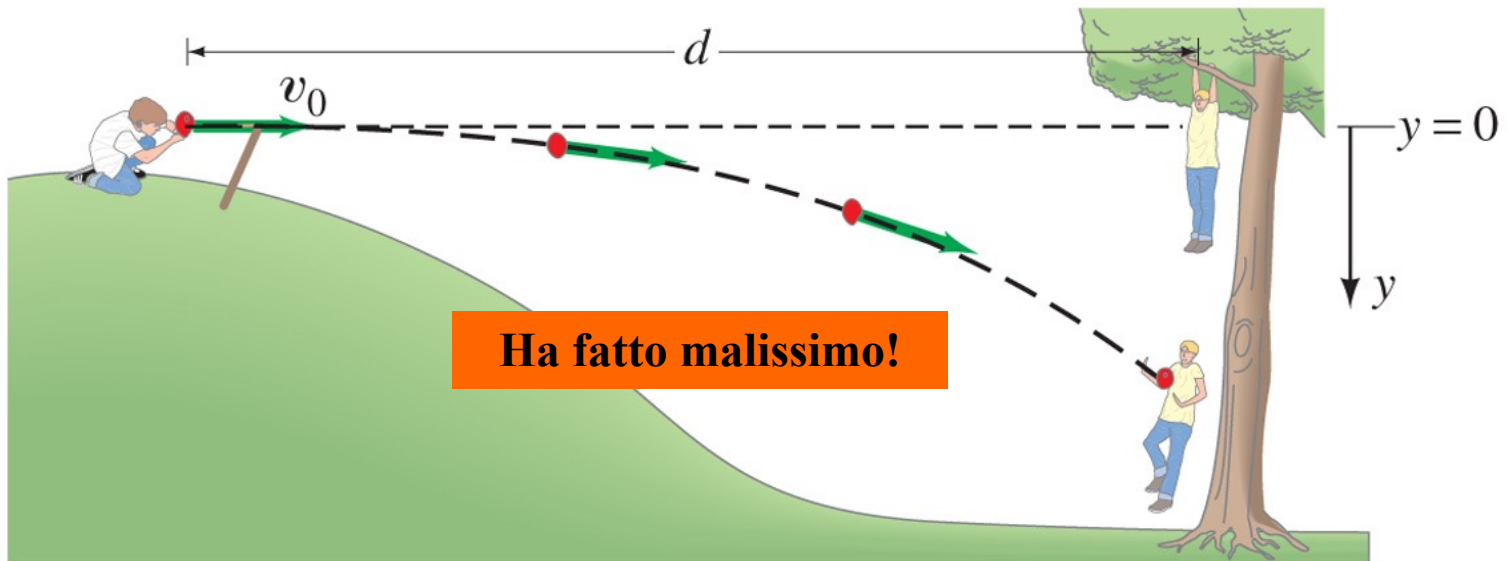
waiting-time 0.005



### Problema concettuale n.1

Un ragazzo su una collina punta la sua **fionda** caricata con un palloncino ad acqua orizzontalmente verso un secondo ragazzo che fa da bersaglio (poverino!) e che sta appeso al ramo di un **albero** (non avendo evidentemente di meglio da fare!). Nell'istante in cui il palloncino viene lanciato, il ragazzo-bersaglio, pensando di fare una **furbata** e di evitare così di essere colpito, abbandona istintivamente la presa e si lascia cadere dal ramo...

Ha fatto bene o ha fatto male a mollare la presa?



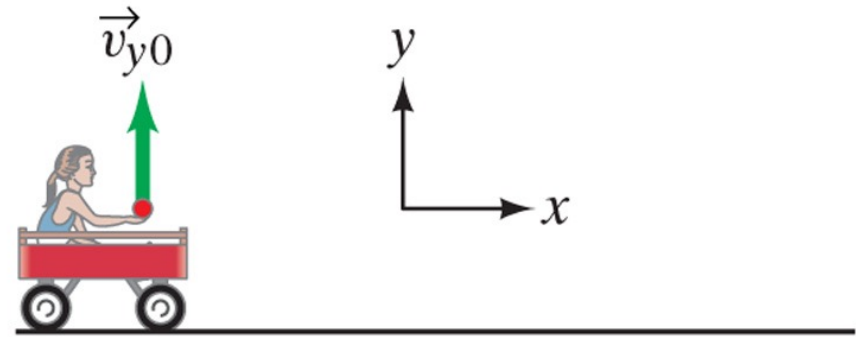
### Problema concettuale n.2

Una bambina è seduta su un **carretto** che si muove verso destra con velocità costante. La bambina stende la mano e lancia una **mela** verticalmente verso l'alto (nel suo sistema di riferimento), mentre il carretto continua a muoversi con **velocità costante**.

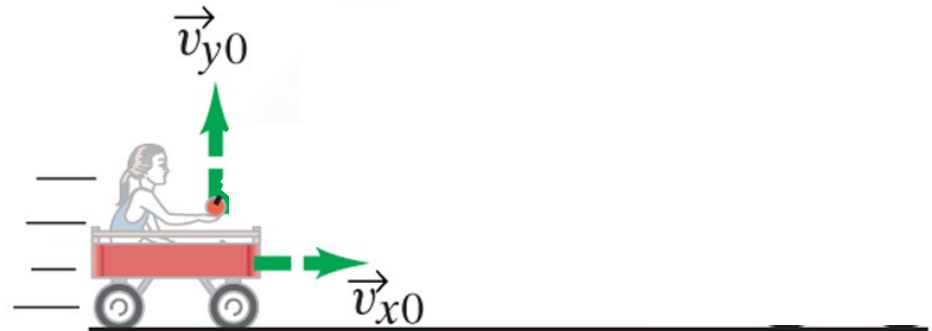
Trascurando l'attrito dell'aria, la mela cadrà (A) dietro il carretto, (B) sul carretto, (C) davanti al carretto?

### Suggerimento

Ragionare ponendosi nel *sistema di riferimento* del terreno...



(a) Sistema di riferimento del carretto



(b) Sistema di riferimento del terreno

## Problema concettuale n.2

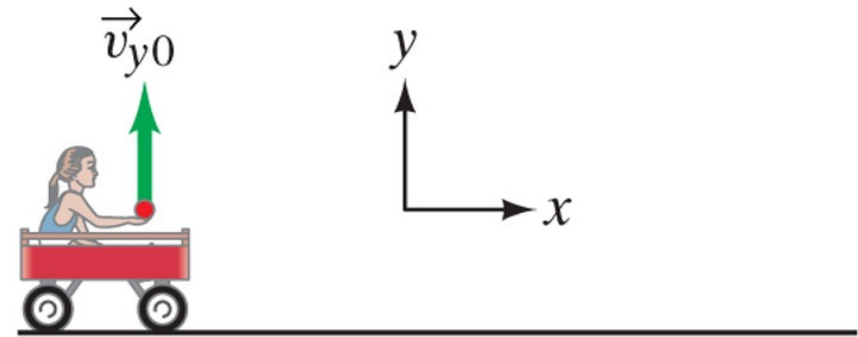
Una bambina è seduta su un **carretto** che si muove verso destra con velocità costante. La bambina stende la mano e lancia una **mela** verticalmente verso l'alto (nel suo sistema di riferimento), mentre il carretto continua a muoversi con **velocità costante**.

Trascurando l'attrito dell'aria, la mela cadrà (A) dietro il carretto, (B) sul carretto, (C) davanti al carretto?

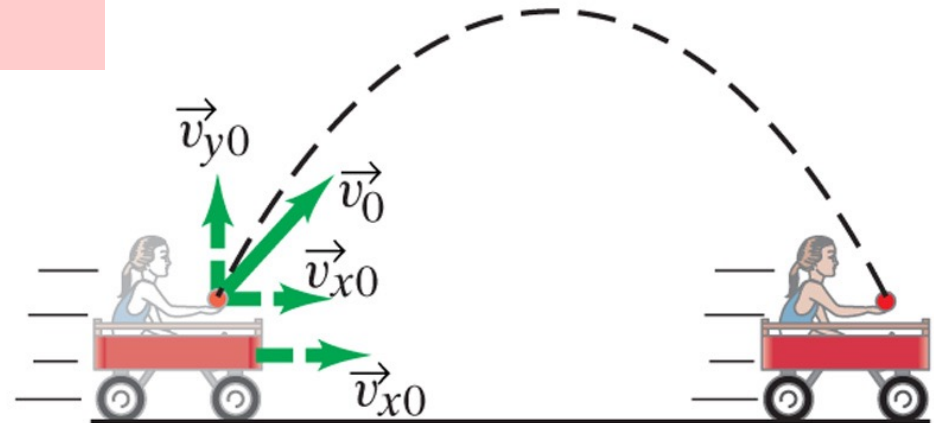
## Suggerimento

Ragionare ponendosi nel *sistema di riferimento del terreno*...

**La risposta corretta è la B!**



(a) Sistema di riferimento del carretto

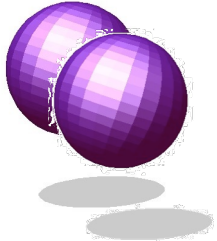


(b) Sistema di riferimento del terreno

Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

## Qualche quesito...



### Quesito n.1

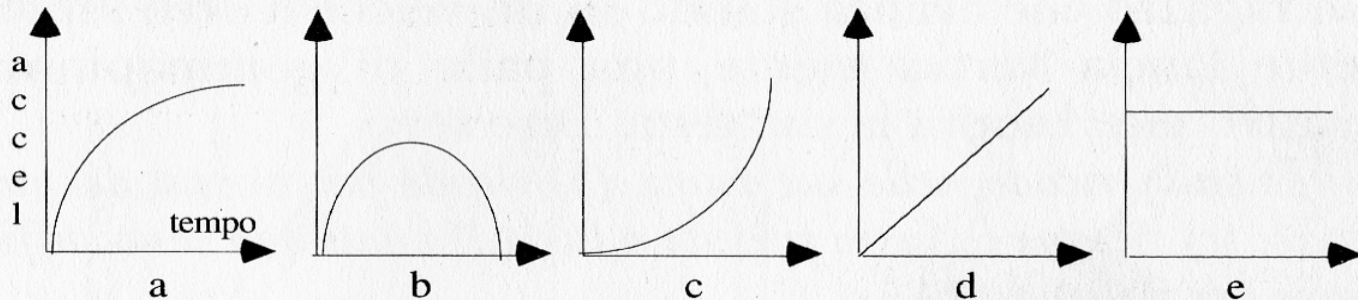
Due sfere uguali ma di diverso peso sono lanciate verso l'alto con la *stessa velocità iniziale*. Trascurando l'effetto dell'aria, si hanno dati sufficienti per dire **quale delle due sfere arriverà più in alto?**

*Possibili risposte: (a) sì, arriva più in alto la sfera che pesa meno; (b) sì, le due sfere arrivano alla stessa altezza; (c) sì, arriva più in alto la sfera che pesa di più; (d) no, non ci sono dati sufficienti per poterlo dire.*

(b)

### Quesito n.2

Una pietra è lanciata verso l'alto. Se si *trascura la resistenza dell'aria*, quale dei cinque grafici rappresenta l'**accelerazione** della pietra al trascorrere del tempo mentre è in aria?



(e)



### Quesito n.3

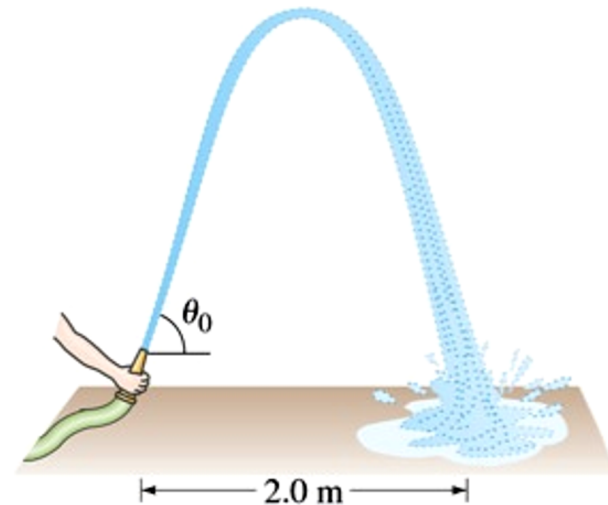
Un atleta che corre a *velocità costante* lascia cadere una boccia di piombo dalla sua mano. Dire se **essa tocca terra: (a) sulla verticale del punto da dove è lasciata cadere; (b) un po' più indietro; (c) nel punto dove, in quell'istante si troverà l'atleta; (d) in un punto intermedio tra (a) e (c).**

(c)

# Esercizi Cinematica 2-D

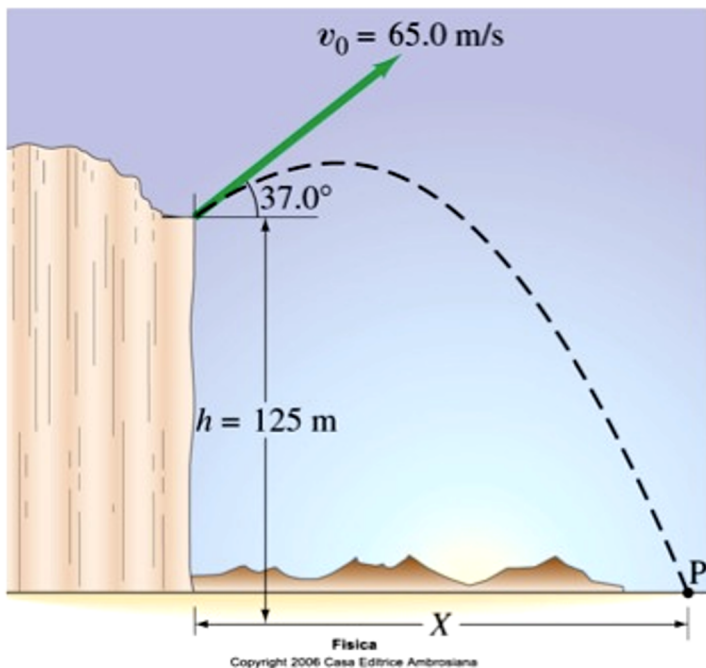
## Esercizio 1

La canna di una pompa antincendio, tenuta vicino al suolo, espelle l'acqua a una velocità pari a 6.8 m/s. A quale/i angolo/i deve essere orientata la canna per fare ricadere l'acqua a una distanza di 2.0 m (vedi figura)? Perché gli angoli sono due? Disegnate le due traiettorie.



## Esercizio 2

Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di  $37^\circ$  rispetto all'orizzontale (vedi figura). (a) Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno. (b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe. Nell'istante immediatamente prima di colpire il punto P, trovate (c) le componenti orizzontale e verticale della sua velocità, (d) il modulo della velocità e (e) l'angolo formato dal vettore velocità con l'orizzontale. (f) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.



## Esercizi Cinematica 2-D

### Esercizio 3

Durante il servizio, un tennista cerca di colpire la palla orizzontalmente. Qual'è la velocità minima che deve essere impressa alla palla per superare la rete alta 0.90 m e posta a circa 15.0 m di distanza dal tennista, se la palla viene lanciata da 2.50 m di altezza? Dove cadrà la palla, se sfiora la rete? E in tal caso sarà un servizio valido (cioè la palla cadrà entro 7.0 m dalla rete)? Quanto a lungo resterà in aria?

