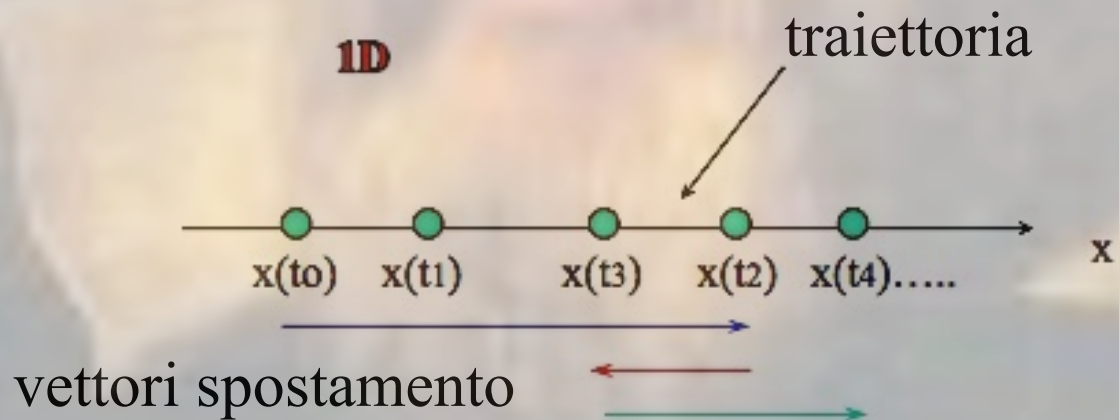


# LA CINEMATICA in UNA DIMENSIONE



# Moto uniforme . . . . .

**Equazione del moto  
uniforme  
( $v=v_0=\text{costante}$ ,  $a=0$ )**

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

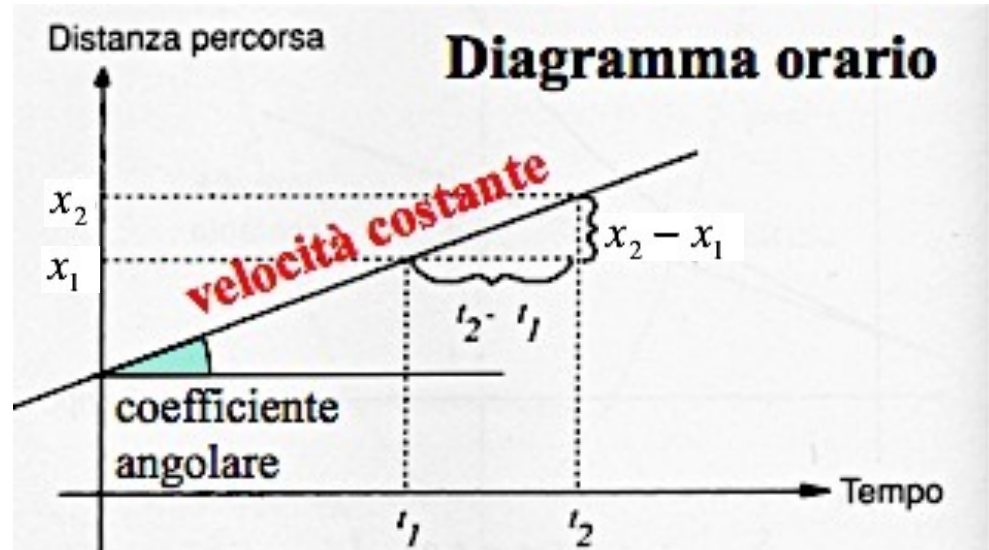


Figura 6-4

Per calcolare una velocità costante, dividiamo la differenza fra due distanze percorse ( $x_2 - x_1$ ) per la differenza fra i tempi impiegati per percorrerle ( $t_2 - t_1$ ).

..... e moto uniformemente accelerato in 1D

**Velocità e Accelerazione  
istantanee**

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

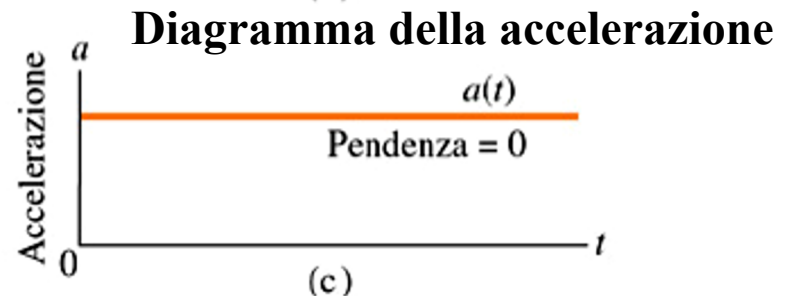
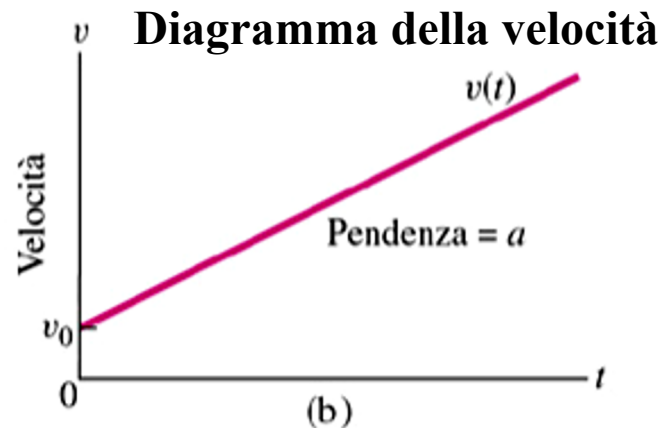
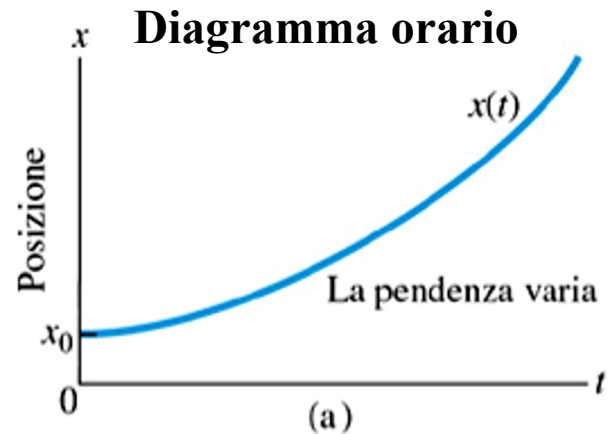
$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

**Equazioni del moto  
uniformemente accelerato  
(a=cost)**

(I)  $v = v_0 + at$

(II)  $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$

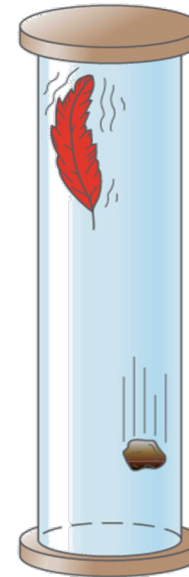
(III)  $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$



# Accelerazione di gravità nel moto di caduta libera in 1D

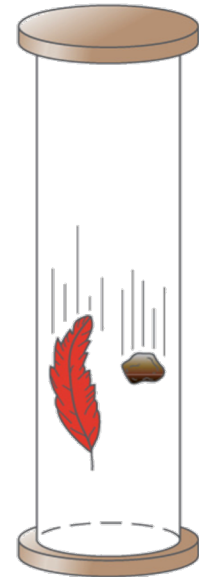
**Equazioni del moto di oggetti in caduta libera ( $a = -g = \text{cost}$ )**

$$I) v = v_0 - gt \quad II) y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad III) v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$



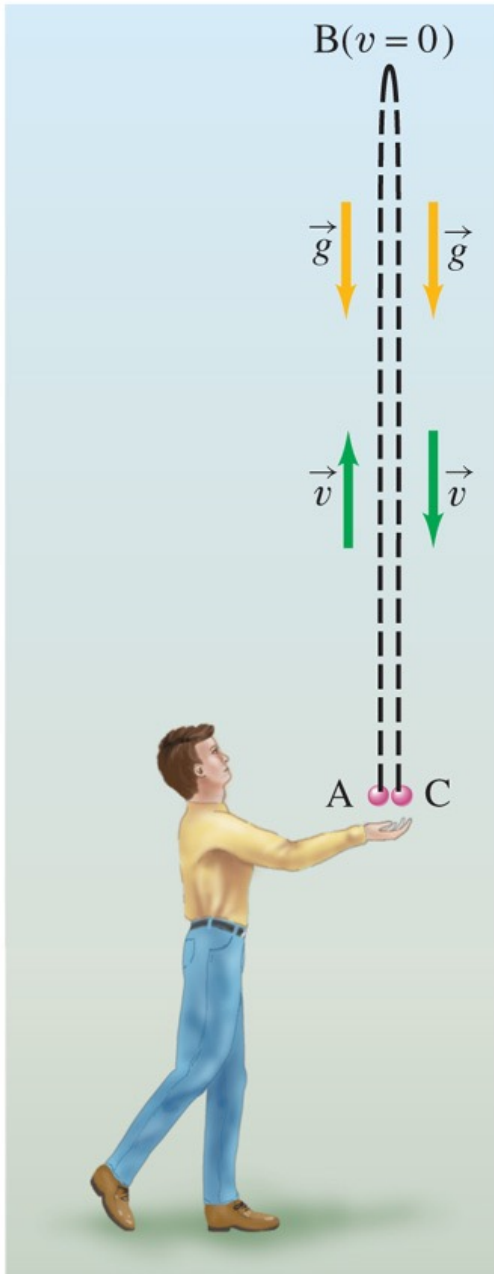
Tubo pieno d'aria

(a)



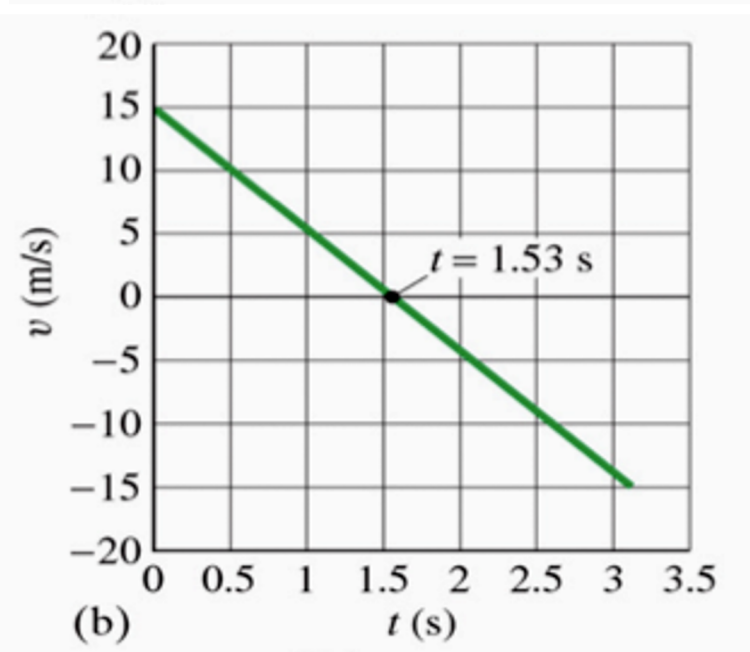
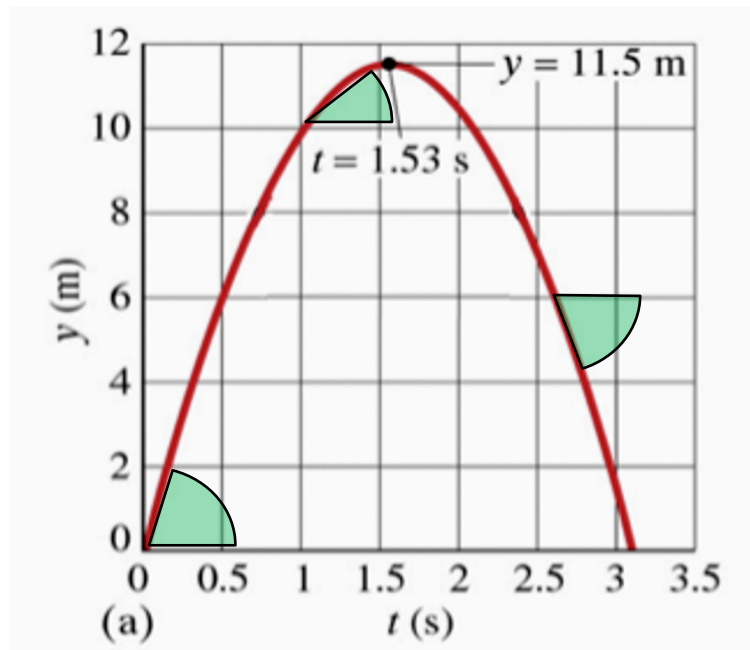
Tubo «vuoto»

(b)



**Fisica**

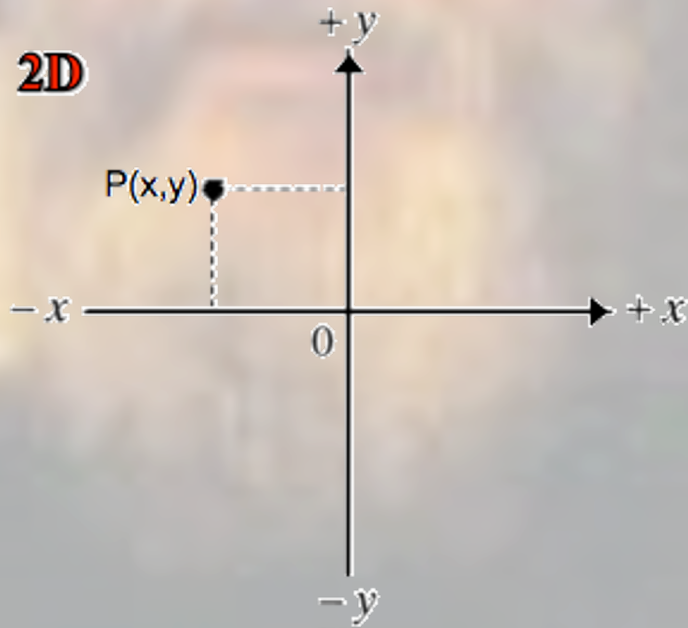
Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana



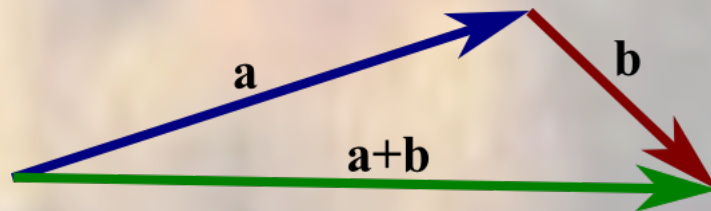
**Fisica**

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

## VERSO LA CINEMATICA in 2D...



# I Vettori



# Grandezze scalari e grandezze vettoriali



**La distanza tra Roma e Milano è di 600 km.**

**Se parto da Roma e percorro 600 km mi troverò a Milano?**

**NO, non è detto...** infatti, mentre la *distanza* tra due punti o la *lunghezza* di un oggetto sono completamente definite da un numero e dalla sua unità di misura, una grandezza come lo *spostamento* ha bisogno di ulteriori informazioni. E' facile capire che percorrendo 600 km da Roma in linea retta ci si può trovare in qualsiasi punto di una circonferenza di centro Roma e raggio 600 km: **dipende dalla direzione che abbiamo scelto!** Il motivo è che **lo spostamento è una grandezza vettoriale, mentre la distanza è una grandezza scalare.**

Una **grandezza scalare** è completamente definita da un valore numerico (con la sua unità di misura).

Ecco alcuni esempi di scalari:

- distanza = 600 km
- massa = 250 kg
- intervallo di tempo = 23 s
- energia cinetica = 40 J (*Joule, che come vedremo è l'unità di misura dell'energia nel SI*)

La somma di grandezze scalari (omogenee) si esegue come la normale somma tra numeri reali.



# Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Per spostarmi correttamente da Roma a Milano ho bisogno di ulteriori informazioni, espresse da una grandezza vettoriale

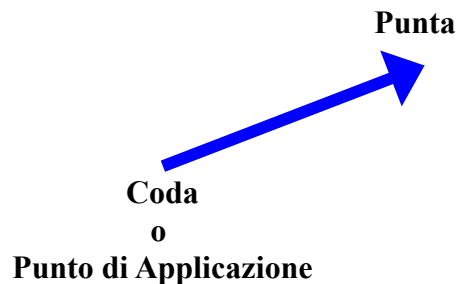


Generalmente le tre informazioni che individuano una **grandezza vettoriale** (e dunque il vettore ad essa corrispondente) sono:

- \* **l'intensità o modulo** (un numero reale con unità di misura)
- \* **la direzione** (l'insieme delle rette parallele al vettore dato)
- \* **il verso** (uno dei due versi di percorrenza, data una direzione)

I **vettori**, utile strumento matematico per trattare queste grandezze, sono rappresentati da **segmenti orientati** che visualizzano in modo grafico le tre informazioni.

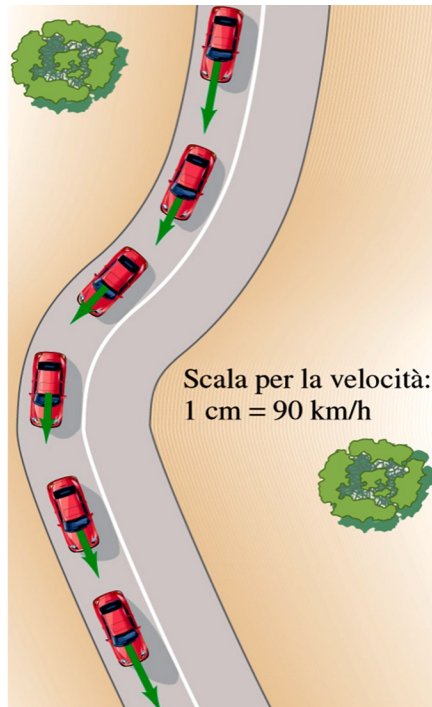
Il punto indicato dalla freccia si chiama **punta** del vettore, mentre il punto iniziale si chiama **coda**, o anche **punto di applicazione** del vettore. Un vettore si indica ad esempio con  $\vec{v}$  mentre il suo modulo si scrive  $|\vec{v}|$  o semplicemente  $v$ .



Ecco alcuni esempi di grandezze vettoriali:

- Spazio percorso = 600 km in **direzione** Nord-Sud, **verso** Nord
- Spazio percorso = 20 m **verso** Nord-Est
- Velocità = 50 km/h **verso** Sud
- Forza = 100 N in **direzione** verticale, **verso** l'alto

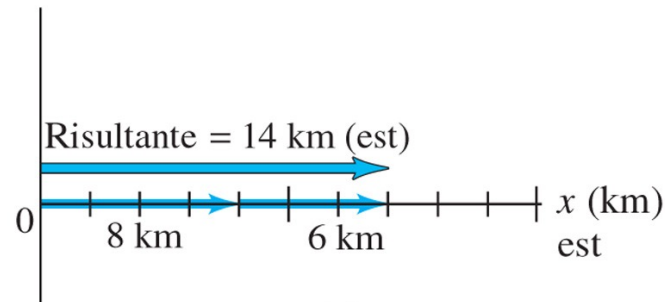
# Operazioni con le grandezze vettoriali



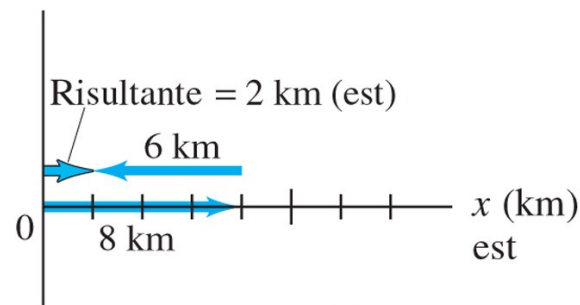
La freccia che rappresenta un vettore  $\vec{v}$  è ovviamente sempre disegnata in modo tale da indicarne la **direzione** e il **verso**, mentre spesso la **lunghezza** della freccia è proporzionale al **modulo** del vettore (vedi ad esempio i vettori velocità disegnati in figura).

La **somma** di grandezze vettoriali (omogenee) **non** si esegue in generale come la normale somma tra numeri reali ma necessita di un metodo specifico per ottenere il vettore **risultante**.

In realtà si può usare la semplice aritmetica **solo** per sommare algebricamente vettori che abbiano la **stessa direzione**, come accade quando si lavora, come abbiamo fatto finora, su sistemi di riferimento ad una dimensione:



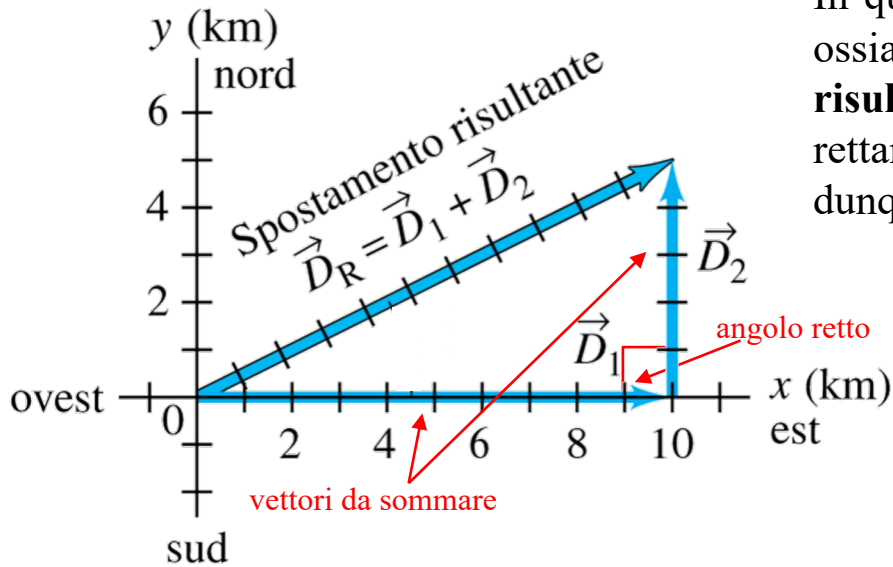
(a)



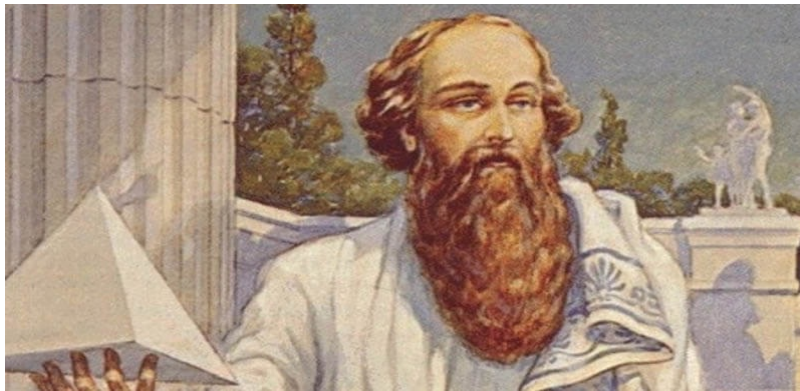
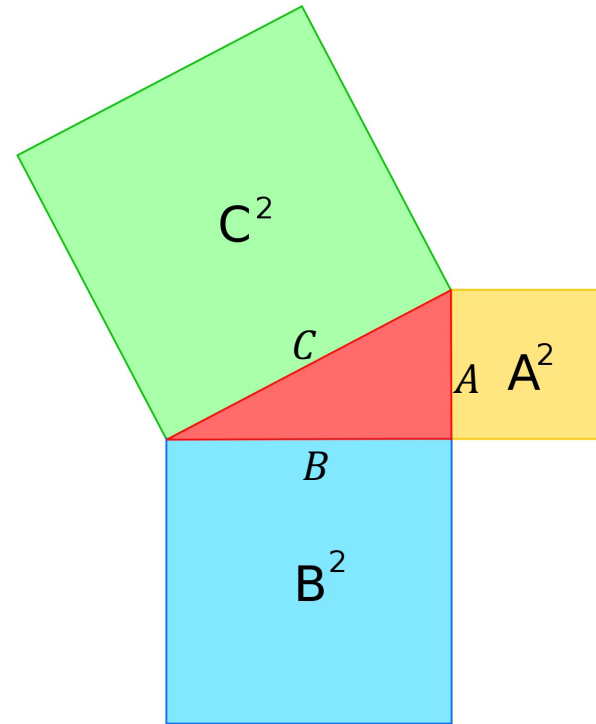
(b)

# Somma di vettori in 2 dimensioni

Le cose cambiano, invece, se si lavora in **sistemi di riferimento a due dimensioni** e se i due vettori da sommare (10 Km e 5 Km) non giacciono lungo la stessa retta, come in figura.



In questo caso i vettori da sommare sono **ortogonali**, ossia formano un angolo retto, e il **modulo del vettore risultante**, che rappresenta *l'ipotenusa* del triangolo rettangolo che ha per *cateti* i due vettori originali, può dunque essere calcolato con il *teorema di Pitagora*:

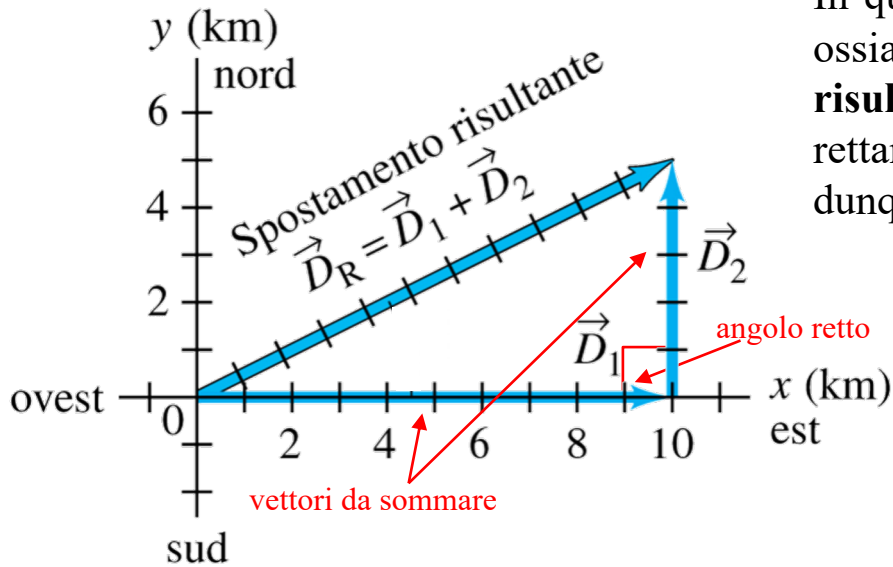


**Pitagora** (Samo, 580 a.C. circa - Metaponto, 495 a.C. circa)

$$C^2 = B^2 + A^2 \rightarrow C = \sqrt{B^2 + A^2}$$

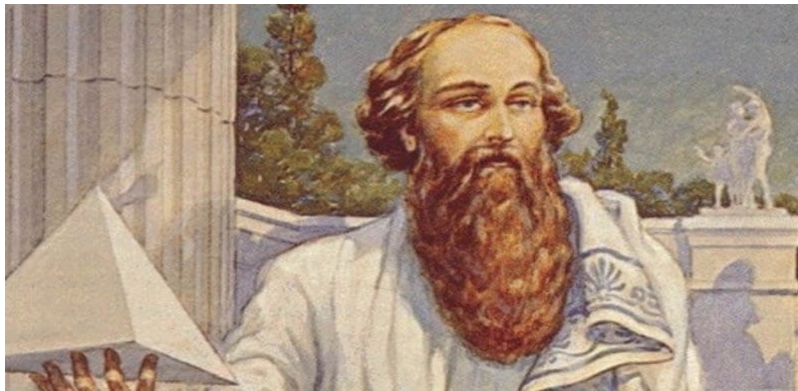
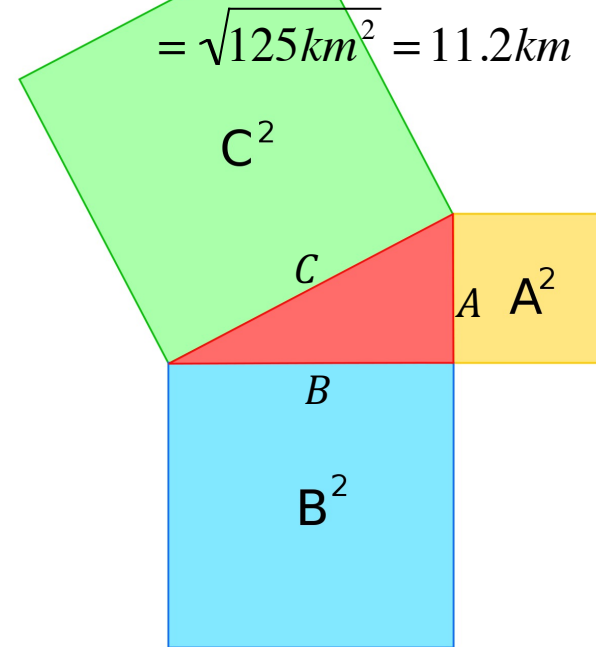
# Somma di vettori in 2 dimensioni

Le cose cambiano, invece, se si lavora in **sistemi di riferimento a due dimensioni** e se i due vettori da sommare (10 Km e 5 Km) non giacciono lungo la stessa retta, come in figura.



In questo caso i vettori da sommare sono **ortogonali**, ossia formano un angolo retto, e il **modulo del vettore risultante**, che rappresenta *l'ipotenusa* del triangolo rettangolo che ha per *cateti* i due vettori originali, può dunque essere calcolato con il *teorema di Pitagora*:

$$D_R = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} = \sqrt{(10.0\text{km})^2 + (5.0\text{km})^2} = \sqrt{125\text{km}^2} = 11.2\text{km}$$

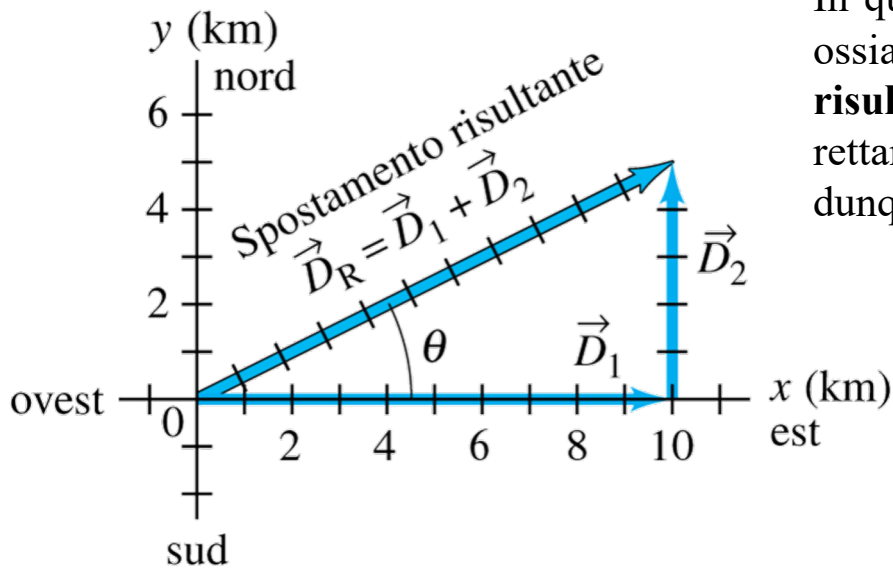


**Pitagora** (Samo, 580 a.C. circa - Metaponto, 495 a.C. circa)

$$C^2 = B^2 + A^2 \rightarrow C = \sqrt{B^2 + A^2}$$

# Somma di vettori in 2 dimensioni

Le cose cambiano, invece, se si lavora in **sistemi di riferimento a due dimensioni** e se i due vettori da sommare (10 Km e 5 Km) non giacciono lungo la stessa retta, come in figura.



In questo caso i vettori da sommare sono **ortogonali**, ossia formano un angolo retto, e il **modulo del vettore risultante**, che rappresenta *l'ipotenusa* del triangolo rettangolo che ha per *cateti* i due vettori originali, può dunque essere calcolato con il *teorema di Pitagora*:

$$D_R = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} = \sqrt{(10.0\text{km})^2 + (5.0\text{km})^2} = \sqrt{125\text{km}^2} = 11.2\text{km}$$

Notiamo anche che il vettore risultante  $\vec{D}_R$  forma un certo **angolo  $\theta$**  con l'asse  $x$  positivo (vedremo dopo come ricavarlo).

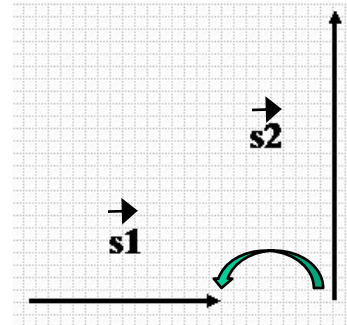
**Importante:** osserviamo che il modulo del vettore risultante ottenuto con la somma vettoriale appena vista è **minore** della somma dei moduli dei due vettori sommati (pari a 15km): è questa la famosa “**disuguaglianza triangolare**” ( $D_R < D_1 + D_2$ ).

Osserviamo inoltre che, nell'esempio precedente, non sarebbe corretto scrivere:  $\vec{D}_R = 11.2\text{km}$  perchè il numero 11.2km si riferisce solo al modulo del vettore  $\vec{D}_R$  (si sarebbe invece potuto scrivere, in alternativa,  $|\vec{D}_R| = 11.2\text{km}$ ).

# Somma grafica di vettori in 2 dimensioni

L'esempio appena visto suggerisce una regola generale per l'addizione grafica di due vettori, indipendentemente dall'angolo che formano. E' il cosiddetto **metodo coda-punta** per la somma vettoriale:

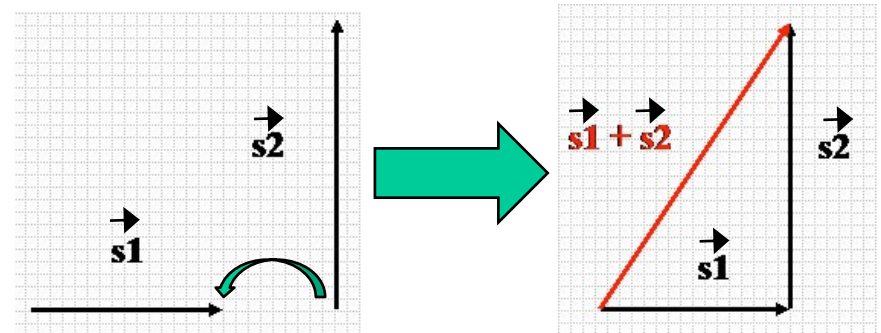
1) In un grafico si traccino in scala i due vettori da sommare,  $\vec{s}_1$  ed  $\vec{s}_2$ , ponendo la coda del secondo sulla punta del primo (importante: è possibile **traslare** qualunque vettore sul piano, spostando il suo punto di applicazione, cioè la sua coda, ma senza ruotarlo, cioè senza cambiarne modulo, direzione e verso)



# Somma grafica di vettori in 2 dimensioni

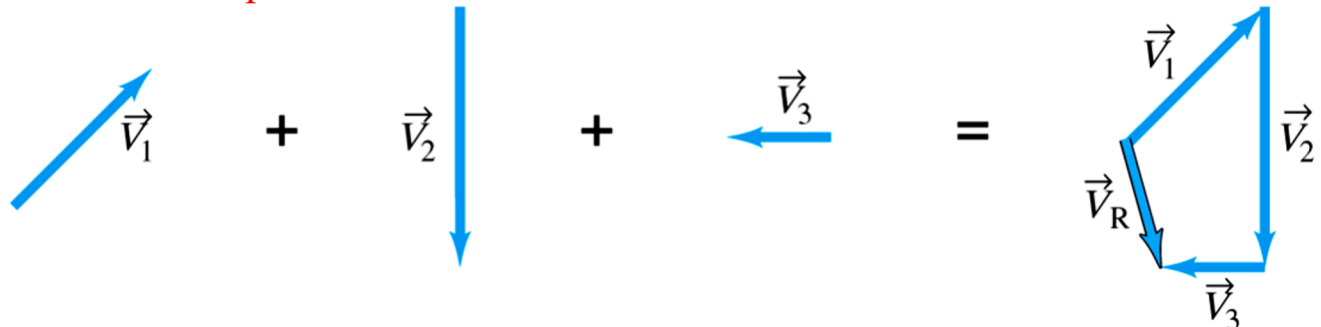
L'esempio appena visto suggerisce una regola generale per l'addizione grafica di due vettori, indipendentemente dall'angolo che formano. E' il cosiddetto **metodo coda-punta** per la somma vettoriale:

- 1) In un grafico si traccino in scala i due vettori da sommare,  $\vec{s}_1$  ed  $\vec{s}_2$ , ponendo la coda del secondo sulla punta del primo (**importante: è possibile *traslare* qualunque vettore sul piano, spostando il suo punto di applicazione, cioè la sua coda, ma senza ruotarlo, cioè senza cambiarne modulo, direzione e verso**)
- 2) Il **vettore risultante** dalla somma vettoriale  $\vec{s}_1 + \vec{s}_2$  sarà un vettore (in rosso) che ha la coda sulla coda del primo e la punta sulla punta del secondo.;



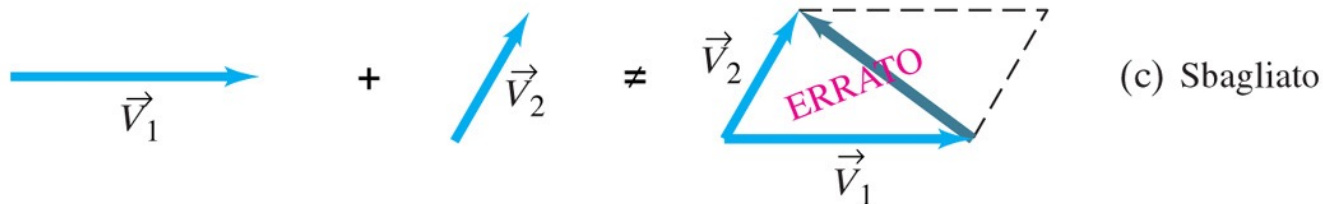
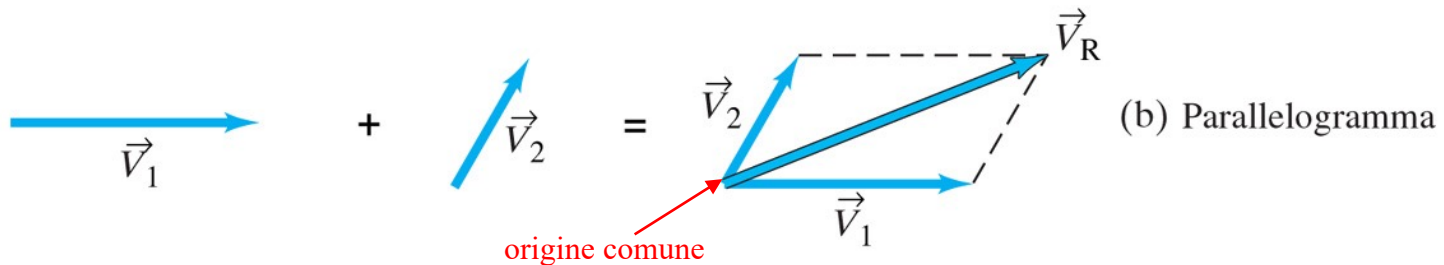
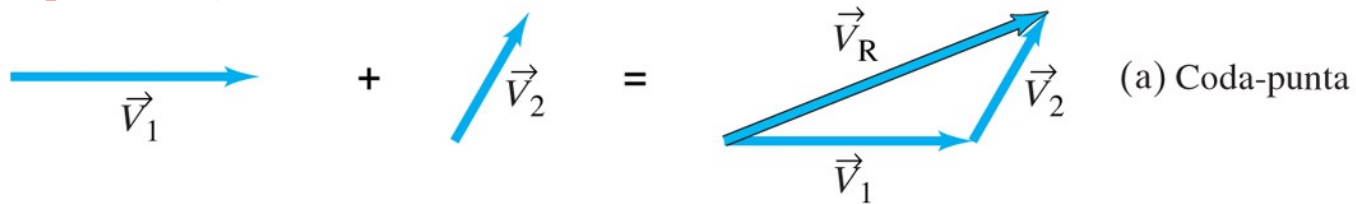
Non è importante, quando si usa questo metodo, in che **ordine** vengono sommati i vettori, cioè in generale si ha:  $\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \vec{s}_2 + \vec{s}_1$  (*proprietà commutativa della somma vettoriale*)

Il metodo coda-punta può essere facilmente **esteso** anche a tre o più vettori, ed è **utile ad esempio** quando si tratta di sommare spostamenti successivi:



# Somma grafica di vettori in 2 dimensioni

Un altro metodo per sommare graficamente i vettori è il cosiddetto **metodo del parallelogramma** (b), completamente **equivalente** al metodo coda-punta (a). In esso i due vettori vengono tracciati a partire da una stessa origine (ossia **facendo coincidere i loro punti di applicazione**), dopodiché si costruisce il parallelogramma che ha questi vettori come lati consecutivi: il vettore risultante sarà dato dalla **diagonale** del parallelogramma tracciata a partire dalla comune origine. **Questo metodo è utile quando si tratta di sommare vettori che hanno già lo stesso punto di applicazione** (ad es. nel caso di forze applicate ad uno stesso corpo, come vedremo più avanti):

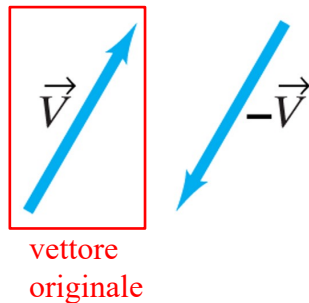




# Altre operazioni con i vettori

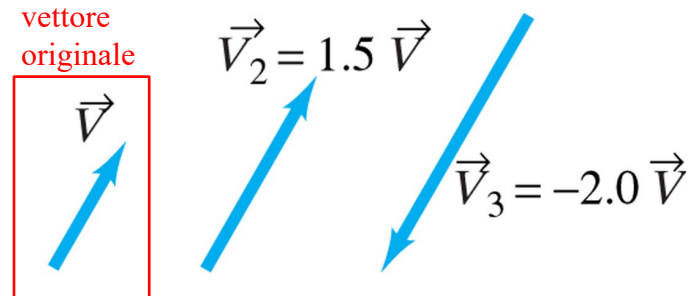
## Vettore opposto

Il negativo (o opposto) di un vettore è un vettore che ha la stessa lunghezza (stesso modulo), la stessa direzione, ma verso opposto:



## Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

La moltiplicazione di un vettore per uno scalare  $b$  dà un vettore il cui modulo è dato dal prodotto di  $b$  per il modulo del primo vettore, che ha la stessa direzione e che ha lo stesso verso se  $b$  è positivo, verso opposto se  $b$  è negativo:



## Sottrazione di vettori

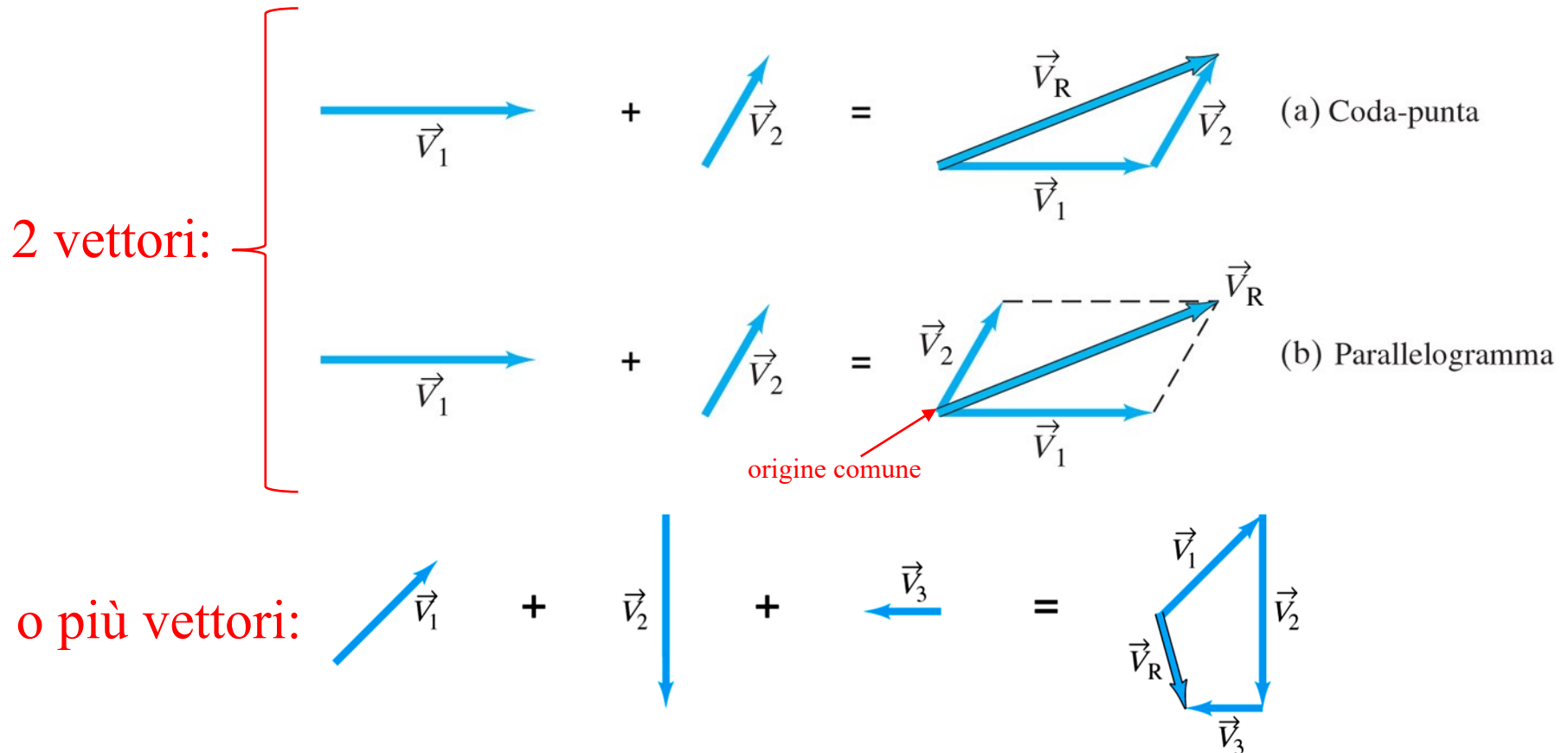
La differenza tra due vettori è definita come la somma del primo vettore con l'opposto del secondo:



# Calcolare modulo e argomento del vettore risultante

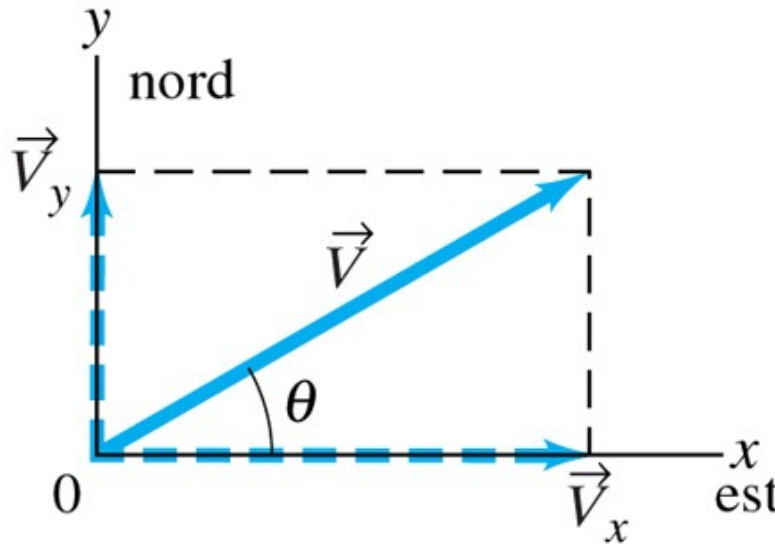
Bene, abbiamo visto come effettuare la **somma grafica** di 2 o più vettori qualunque sul piano per ottenere il **vettore risultante** (detto anche, semplicemente, «risultante»). Ma come fare per calcolare il **modulo** della risultante e l'**angolo** (detto anche «argomento») che essa forma con l'asse delle  $x$  positive?

Per questo occorre introdurre il fondamentale concetto di «**componenti**» di un vettore...



# Scomposizione di un vettore nelle sue componenti

Le componenti di un vettore  $\vec{V}$  rispetto agli assi coordinati di un certo sistema di riferimento, in questo caso a 2 dimensioni, sono due vettori  $\vec{V}_x$  e  $\vec{V}_y$ , mutuamente perpendicolari e diretti lungo gli assi medesimi, la cui somma (effettuata ad es. col metodo del parallelogramma, che in questo caso è un rettangolo) è uguale al vettore originario:



$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

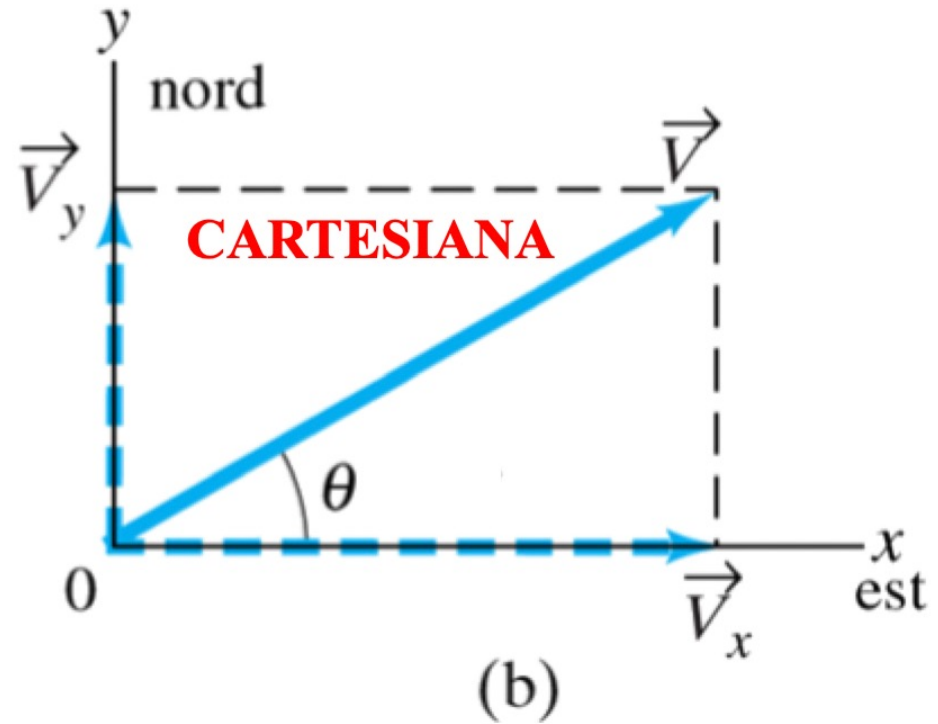
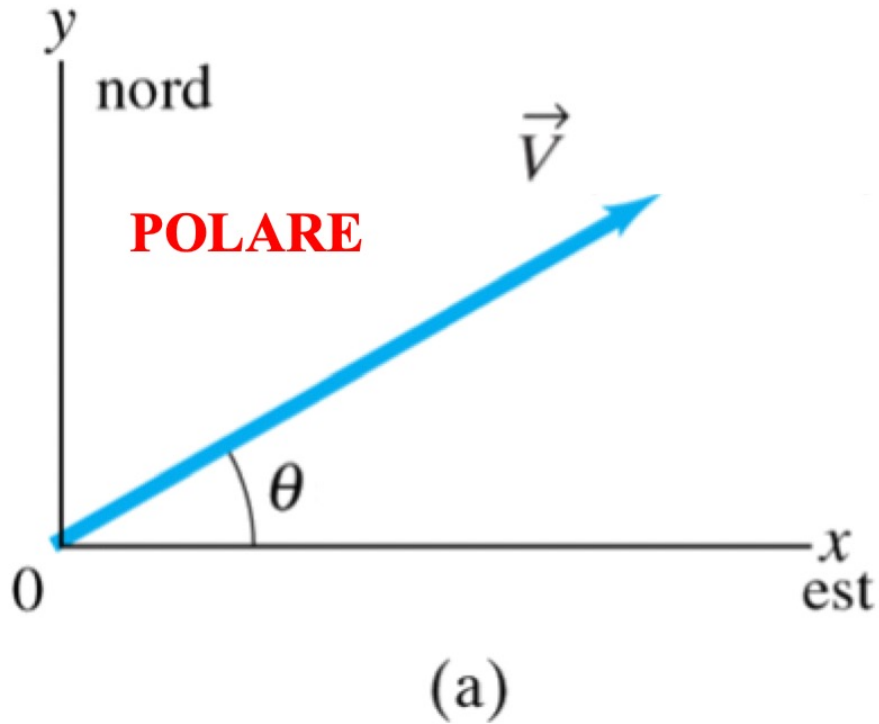
Ai moduli  $V_x$  e  $V_y$  delle due componenti si attribuisce un segno positivo o negativo a seconda che i rispettivi vettori siano rivolti nel verso positivo o negativo degli assi coordinati, ed essi contengono tante informazioni quante il vettore di cui rappresentano le componenti.

Anticipiamo che le componenti di un dato vettore cambieranno in funzione della scelta degli assi coordinati, cioè del sistema di riferimento. Essendo questa scelta sempre arbitraria, spesso una buona selezione degli assi può ridurre il lavoro necessario per sommare dei vettori.

# Rappresentazioni polare e cartesiana di un vettore in 2D

Abbiamo dunque **due modi** per rappresentare un vettore in un dato sistema di coordinate in 2D:

- Darne il *modulo*  $V$  e l'*angolo* che il vettore forma con l'asse  $x$  (**rappresentazione polare**)
- Darne le *componenti*  $V_x$  e  $V_y$  (**rappresentazione cartesiana**)



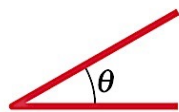
# Un po' di trigonometria...☹

Per sommare vettori con il metodo delle componenti dobbiamo ricorrere alle **funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente** (i cui valori sono numeri puri e sono funzioni solo dell'angolo  $\theta$ , cioè non cambiano se non cambia l'angolo):

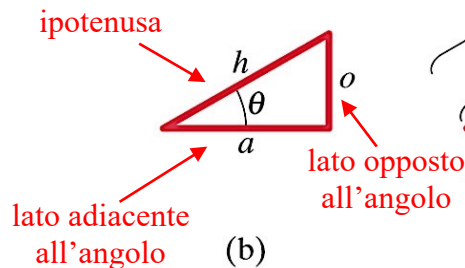


Teorema di Pitagora

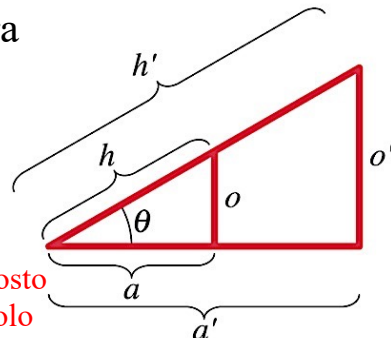
$$h^2 = o^2 + a^2$$



(a)



(b)



(c)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta = \frac{\text{lato opposto}}{\text{ipotenusa}} = \frac{o}{h} = \frac{o'}{h'} \\ \cos \theta = \frac{\text{lato adiacente}}{\text{ipotenusa}} = \frac{a}{h} = \frac{a'}{h'} \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{\text{lato opposto}}{\text{lato adiacente}} = \frac{o}{a} = \frac{o'}{a'} \end{array} \right.$$

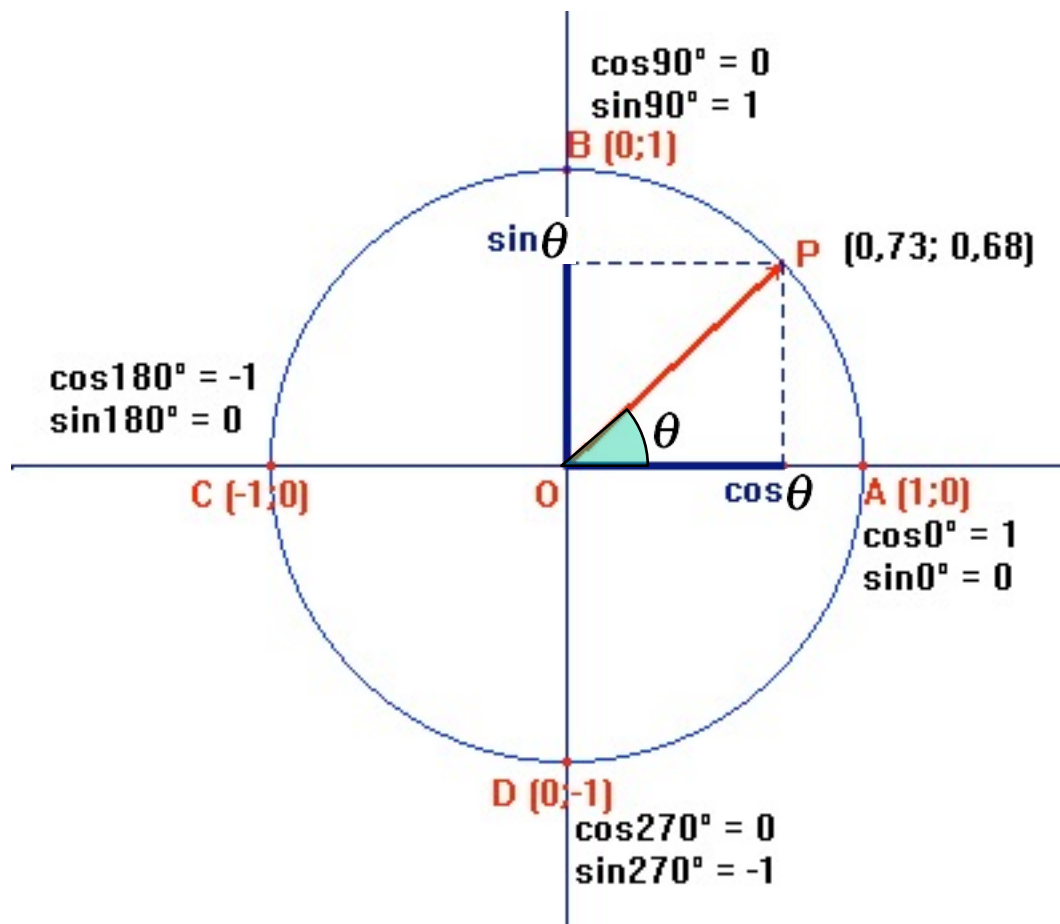
**2 utili identità trigonometriche**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{o^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2} = \frac{o^2 + a^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1 \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{o}{a} = \frac{o}{h} \frac{h}{a} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \end{array} \right.$$

**(T.Pitagora, per h=1)**

**(Definizione di tangente)**

# Variazione delle funzioni trigonometriche sulla circonferenza goniometrica (di centro l'origine e raggio unitario)



angolo in gradi	seno	coseno
$0^\circ$	0	1
$30^\circ$	0,5	0,87
$45^\circ$	0,71	0,71
$60^\circ$	0,87	0,5
$90^\circ$	1	0
$180^\circ$	0	-1

$$\sin \theta \in [-1,1]$$

$$\cos \theta \in [-1,1]$$