Elettrostatica

La Legge di Coulomb

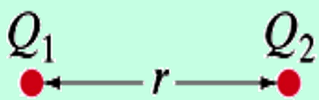
Charles Coulomb
(1736-1806)

Abbiamo visto dunque che le cariche elettriche sono di due tipi e interagiscono mediante una **forza elettrica** che può essere sia attrattiva che repulsiva. Il primo a determinare con precisione l'espressione esatta dell'intensità della forza elettrica fu l'ingegnere e fisico francese **Charles-Augustin Coulomb**, il quale verso la fine del XVIII secolo eseguì una serie di esperimenti con una bilancia di torsione simile a quella usata da Cavendish per determinare il valore della costante di Gravitazione Universale.

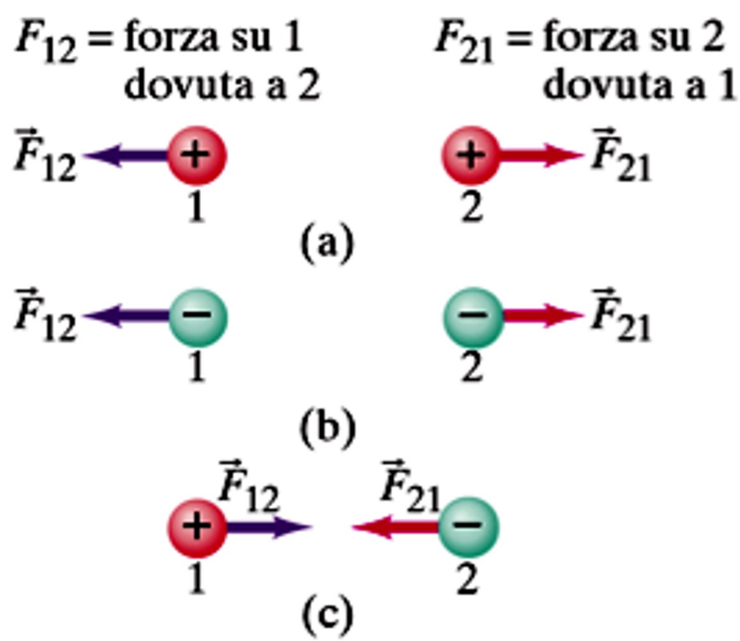
$$F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Forza di Coulomb

- la **direzione** della forza è quella della retta congiungente i due corpi:



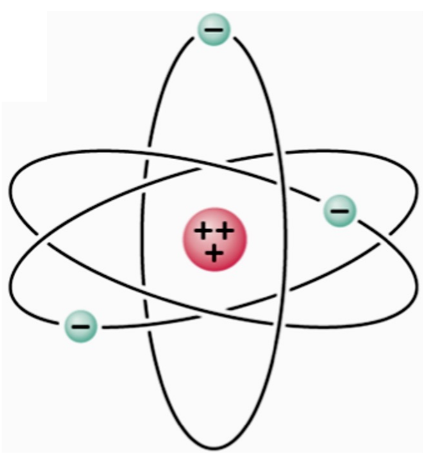
- il **verso** dipende invece, come ci aspettavamo, dal segno delle cariche: se i segni delle cariche sono **concordi** i corpi si respingono (dunque i vettori della forza elettrica punteranno all'esterno come nelle figure a e b) mentre se sono **discordi** i corpi si attraggono (e i vettori della forza elettrica punteranno l'uno verso l'altro, all'interno, come in figura c).



Un pò di definizioni...

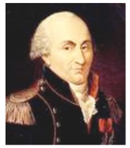
- Nel Sistema Internazionale (SI) **l'unità di misura della carica elettrica è il Coulomb (C)**, che però non è un'unità fondamentale ma deriva dall'unità di misura della corrente elettrica (come vedremo più avanti...).
- La **costante** che compare nella Legge di Coulomb vale $\boldsymbol{k = 9.0 * 10^9\ N\ m^2/C^2}$.

Charles Coulomb (1736-1806)

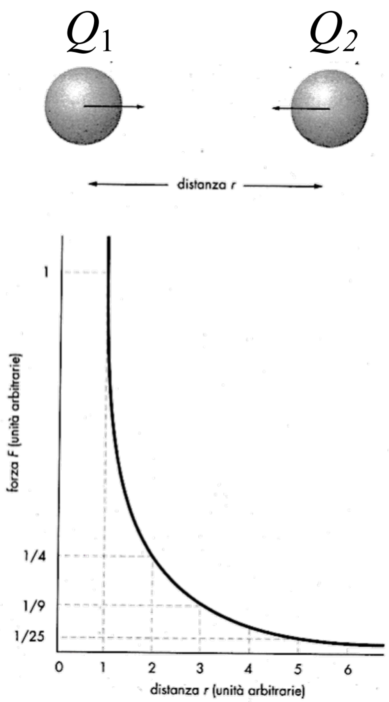


- Di solito dunque non si ha a che fare con cariche dell'ordine dei Coulomb ma solo con loro **sottomultipli**: le cariche generate strofinando pettini o righelli, per esempio, sono al più dell'ordine dei microcoulomb ($1\mu C=10^{-6}C$).
- La carica di un **elettrone** invece è ovviamente molto più piccola, anzi per la precisione è la carica più piccola osservata in natura, ed è pari a $-e$, dove $e = 1.602*10^{-19}$ C è la cosiddetta "**carica elementare**", definita positiva: poichè la carica degli oggetti macroscopici deriva, in ultima analisi, da un eccesso o un deficit di elettroni, **la carica totale presente su un corpo qualsiasi deve sempre essere un multiplo di *e***.
- Per questo motivo **si dice che la carica è "quantizzata"**, cioè può assumere solo valori discreti $1e$, $2e$, $3e$, e così via, anche se essendo il valore di e molto piccolo essa appare macroscopicamente come una grandezza fisica continua (si consideri che in $1\mu C$ ci sono circa 10^{13} elettroni!).

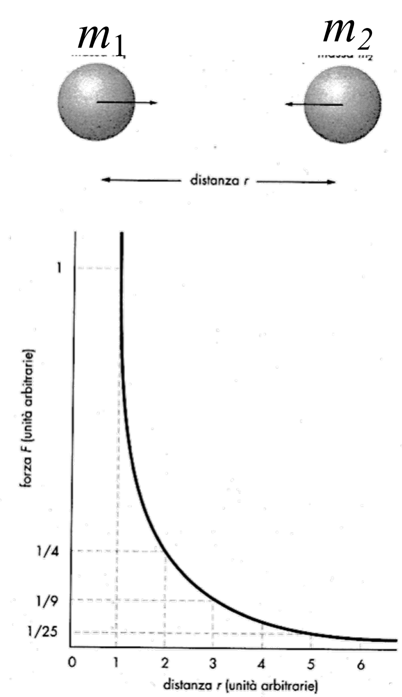
Coulomb versus Newton

Coulomb  $F = k\dfrac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ $F = G\dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$  Newton

ANALOGIE

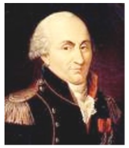


Se confrontiamo la **Legge di Coulomb** con la **Legge della Gravitazione Universale di Newton** vediamo che formalmente esse sono molto **simili**: entrambe mostrano che l'intensità della forza considerata (in un caso elettrica, nell'altro gravitazionale) **dipende inversamente dal quadrato della distanza** ed è invece direttamente proporzionale alla grandezza tipica dell'interazione (la carica in un caso, la massa nell'altro). In entrambi i casi, dunque, si ha a che fare con forze cosiddette a "**lungo raggio**" (nel senso che agiscono, sia pur con intensità decrescente, a qualunque distanza) e per le quali l'interazione avviene senza che sia necessario il contatto tra i corpi coinvolti (**azione a distanza**). Questa analogia formale tra forza elettrica e forza gravitazionale è molto importante perché **rende validi per entrambe una serie di teoremi fondamentali** (come ad esempio quello di Gauss).



Coulomb versus Newton

Coulomb

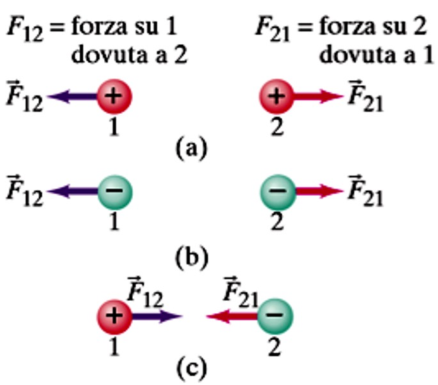


$$F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

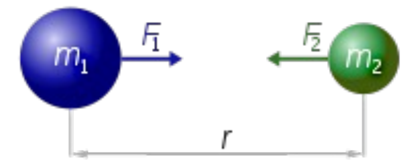
$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Newton

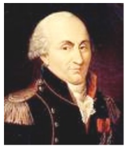
DIFFERENZE



Ma tra i due tipi di interazione esistono anche delle **vistose differenze**: mentre infatti la forza gravitazionale è sempre **attrattiva**, quella elettrica può essere, come abbiamo visto, **attrattiva o repulsiva**, a causa del fatto che mentre esiste **un solo tipo di massa** esistono invece **due tipi di carica**. Inoltre, a causa della enorme differenza tra gli ordini di grandezza delle costanti G e k (rispettivamente 10^{-11} e 10^{9}), **la forza elettrica è *enormemente più intensa*** di quella gravitazionale: ad esempio, l'attrazione gravitazionale tra due protoni è infatti approssimativamente 10^{36} volte più debole della loro repulsione coulombiana! **Nei fenomeni in cui interviene la forza elettrica, soprattutto quelli microscopici, la forza gravitazionale può dunque essere spesso trascurata**, laddove invece essa è la principale forza agente tra corpi macroscopici dal momento che questi sono in genere elettricamente neutri.



Coulomb versus Newton

Coulomb  $F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$

$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$  Newton

Legge di Coulomb	Legge di Newton
F = k |Q| |q| / d^2	F = G M m / d^2
La forza elettrica è inversamente proporzionale al quadrato della distanza d	La forza gravitazionale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza d
La forza elettrica è proporzionale al prodotto Q q delle cariche	La forza gravitazionale è proporzionale al prodotto M m delle masse
Esistono due tipi di cariche: quelle positive e quelle negative	Esiste un solo tipo di massa
La forza elettrica può essere attrattiva o repulsiva	La forza gravitazionale è sempre attrattiva
k è una costante che dipende dal mezzo in cui si trovano le cariche. E' massima nel vuoto.	G è una costante universale
Il valore numerico di k è molto grande (9 10^9 nel vuoto, in unità SI)	Il valore numerico di G è molto piccolo (6,67 10^{-11} in unità SI)
Se i due corpi carichi sono *sferici*, la forza elettrica si determina *come se* la carica fosse concentrata nel centro di massa dei corpi.	Se i due corpi sono *sferici*, la forza gravitazionale si determina *come se* la massa fosse concentrata nel centro di massa dei corpi.

La Costante Dielettrica del Vuoto

Nella tabella della slide precedente abbiamo visto che mentre la costante di gravitazione G è universale, la costante *k* che compare nella Legge di Coulomb **dipende dal mezzo** in cui si trovano le cariche. Questa caratteristica di *k* dipende dal fatto che in realtà essa può essere scritta in termini di un'altra **costante ε_0**, detta **permittività del vuoto** o **costante dielettrica del vuoto**, mediante la relazione $k=1/4\pi\varepsilon_0$. Per mezzo di ε_0 la Legge di Coulomb può dunque essere riscritta come:

$$F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad \rightarrow \quad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

dove si ha: $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/N \cdot m^2$

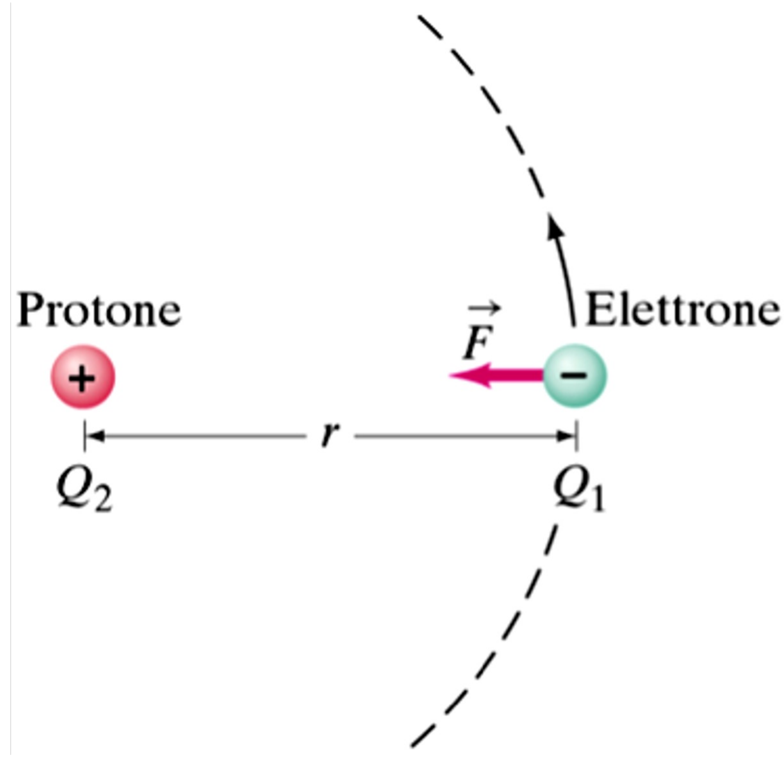
Anche se a prima vista questa nuova equazione sembra più complicata di quella originaria, ha il vantaggio di esplicitare la dipendenza della forza elettrica dal mezzo in cui si trovano le cariche. In **mezzi diversi dal vuoto** la costante ε_0 và infatti moltiplicata per una **costante dielettrica relativa ε_r** sempre maggiore di 1 (vedi tabella a fianco), il che significa che sia k che la forza elettrica saranno massimi nel vuoto:

$$\rightarrow \quad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Inoltre vedremo che altre equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo assumono una forma più semplice se espresse in termini della costante dielettrica del vuoto piuttosto che in termini della costante *k*.

Mezzo	ε_r
Aria	1.00059
Idrogeno	1.00026
Acqua	ca. 80
Etanolo	25
Etere etilico	1.352
Petrolio	2.1
Vetro comune	5 ÷ 10
Plexiglas	3.40
Mica	8
Ebanite	2
Paraffina	2.1
Glicerolo	42.6

Esercizio
Determinare il modulo e il verso della forza elettrostatica che il nucleo di un **atomo di idrogeno**, costituito da un solo protone (Q_2=+e), esercita sull'unico elettrone presente, assumendo un raggio atomico medio r = $0.53*10^{-10}$ m. Trattandosi di un esercizio di **elettrostatica**, si assuma anche che le due cariche siano a riposo (se le cariche sono in movimento entrano in gioco altre forze di cui parleremo più avanti).

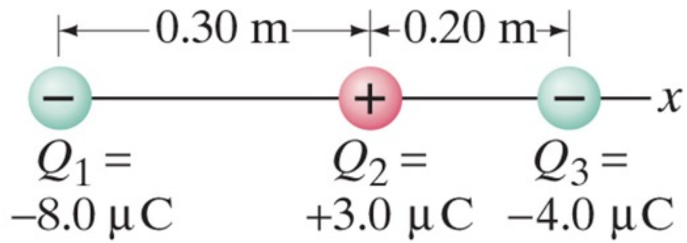


Per determinare il **modulo** della forza usiamo la legge di Coulomb $F=kQ_1Q_2/r^2$ considerando che elettrone e protone hanno la stessa carica, cioè $Q_1=Q_2=e=1.6*10^{-19}$ C. Di solito per il calcolo del modulo si trascura il segno delle cariche, che diventa invece importante quando occorre determinare il **verso** del vettore della forza eletrostatica (la **direzione**, lo ricordiamo, è sempre quella della retta che congiunge le due cariche).
Avremo quindi:

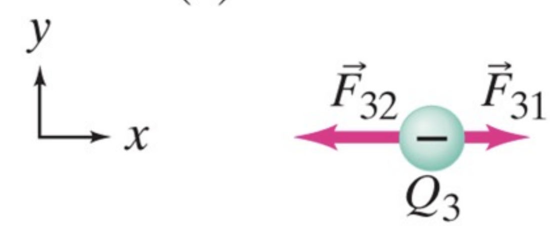
$$F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = \frac{(9.0 \cdot 10^9 N \cdot m^2 / C^2)(1.6 \cdot 10^{-19} C)(1.6 \cdot 10^{-19} C)}{(0.53 \cdot 10^{-10} m)^2} = 8.2 \cdot 10^{-8} N$$

Come si vede dalla figura, il **vettore** della forza agente sull'elettrone punta verso il protone perchè, avendo protone ed elettrone carica di segno opposto, la forza deve essere attrattiva. Ovviamente la forza che l'elettrone esercita sul protone avrà il medesimo modulo e la stessa direzione ma segno opposto, in accordo anche con la **terza legge della dinamica**.

Esercizio
Tre particelle cariche sono disposte su una retta (asse x) come in figura (a). **Calcolare la forza totale agente sulla particella 3** dovuta alle altre due particelle.



(a)



La **legge di Coulomb** permetterà di calcolare il modulo della forza agente su ciascuna coppia di cariche (forza che verrà indicata utilizzando due pedici, il primo per la carica che la subisce, il secondo per quella che la esercita) mentre la **forza totale** verrà poi calcolata sommando vettorialmente le forze ottenute. In questo caso, essendo le tre particelle **allineate**, la somma vettoriale si ridurrà alla **normale somma algebrica**.

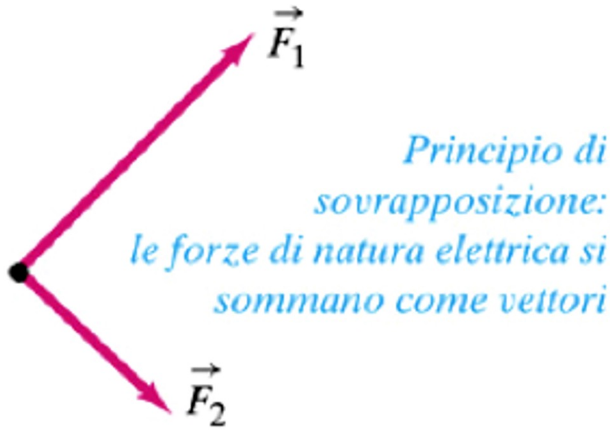
$$F_{31} = k\frac{Q_3 \cdot Q_1}{r_{31}^2} = \frac{(9.0 \cdot 10^9 N \cdot m^2/C^2)(4.0 \cdot 10^{-6} C)(8.0 \cdot 10^{-6} C)}{(0.50m)^2} = 1.2N$$

$$F_{32} = k\frac{Q_3 \cdot Q_2}{r_{32}^2} = \frac{(9.0 \cdot 10^9 N \cdot m^2/C^2)(4.0 \cdot 10^{-6} C)(3.0 \cdot 10^{-6} C)}{(0.20m)^2} = 2.7N$$

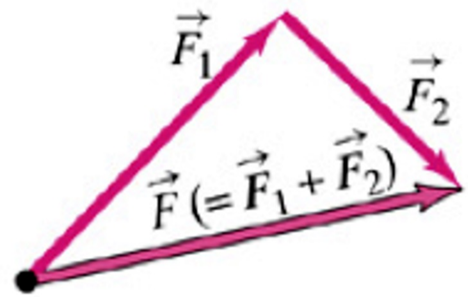
$$\rightarrow \quad F = -F_{32} + F_{31} = -2.7N + 1.2N = -1.5N$$

dove i segni di F_{31} ed F_{32} sono stati assegnati considerando il verso dei rispettivi vettori lungo l'asse x

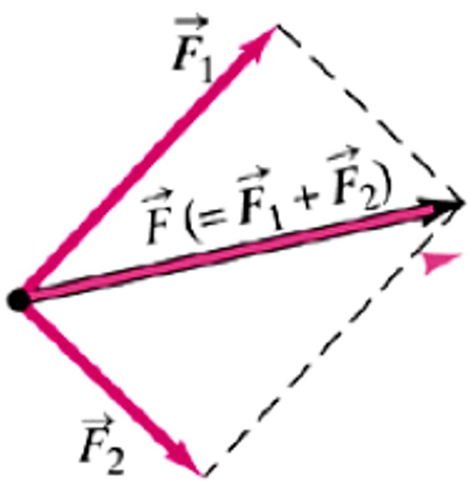
Riepilogo sulla Somma di Vettori in 2 Dimensioni



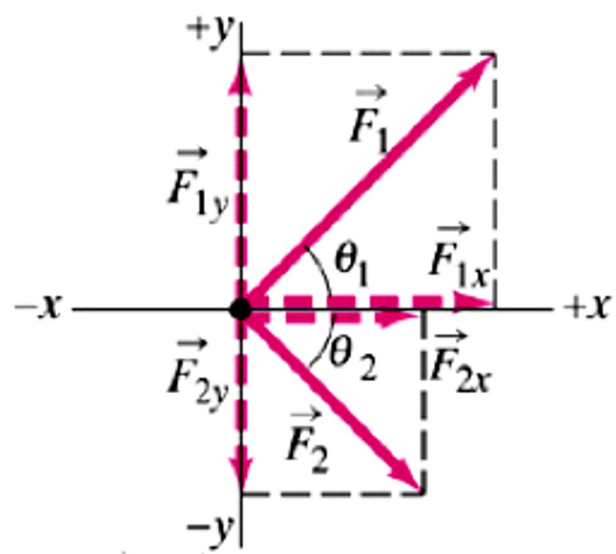
(a) Due forze agenti su un oggetto.



(b) La forza totale, o risultante, è $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, secondo il metodo coda-punta di addizione dei vettori.



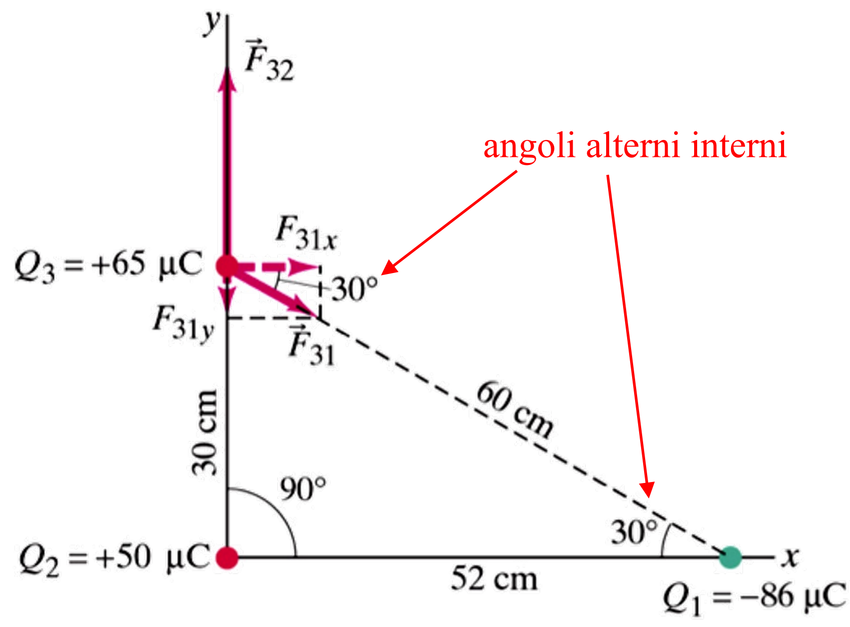
(c) $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, secondo il metodo del parallelogramma.



(d) $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ scomposti nelle loro componenti lungo x e y

Esercizio
Consideriamo adesso il sistema di cariche illustrato in figura (a): **calcolare la forza elettrostatica totale** *F* che le cariche Q_1 e Q_2 esercitano su Q_3.

Anche qui si può utilizzare la **legge di Coulomb** per calcolare il modulo della forza agente su ciascuna coppia di cariche, ma stavolta le cariche non si trovano lungo la stessa retta e dunque la somma vettoriale andrà effettuata per mezzo – ad es. – del **metodo delle componenti** lungo x ed y:

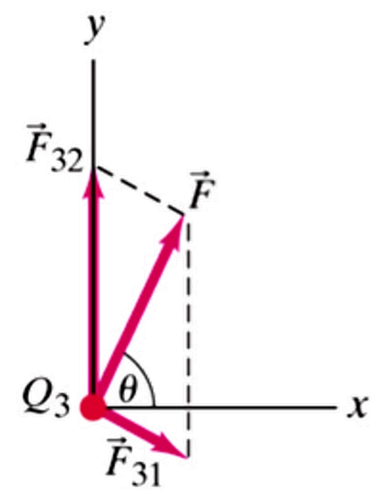


(a)

$$F_{31} = k\frac{Q_3 \cdot Q_1}{r_{31}^2} = \frac{(9.0 \cdot 10^9 N \cdot m^2/C^2)(6.5 \cdot 10^{-5} C)(8.6 \cdot 10^{-5} C)}{(0.60m)^2} = 140N$$

$$F_{32} = k\frac{Q_3 \cdot Q_2}{r_{32}^2} = \frac{(9.0 \cdot 10^9 N \cdot m^2/C^2)(6.5 \cdot 10^{-5} C)(5.0 \cdot 10^{-5} C)}{(0.30m)^2} = 330N$$

$$\begin{cases} F_{31x} = F_{31}\cos 30° = (140N)\cos 30° = 120N \\ F_{31y} = -F_{31} sen 30° = -(140N) sen 30° = -70N \\ F_{32x} = 0, \ F_{32y} = F_{32} = 330N \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} F_x = F_{31x} = 120N \\ F_y = F_{32y} + F_{31y} = \\ \quad = 330N - 70N = 260N \end{cases}$$



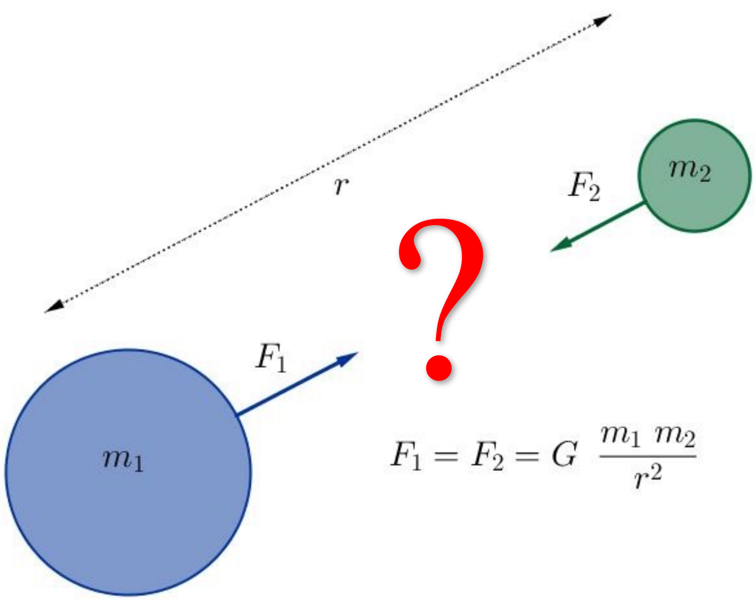
Dunque il modulo della forza totale *F* e l'angolo che forma con l'asse *x* saranno dati da:

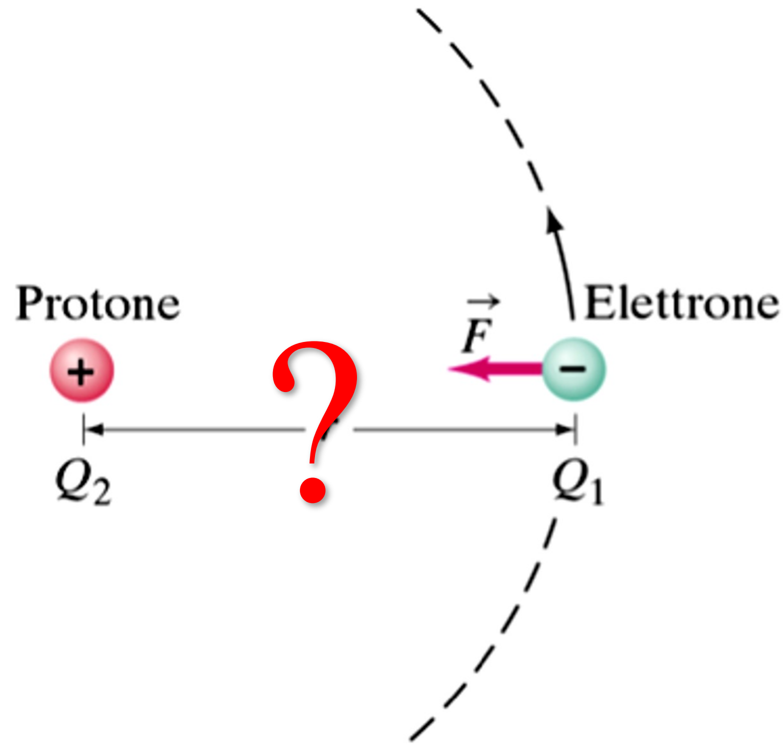
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(120N)^2 + (260N)^2} = 290N$$

$$tg\theta = F_y / F_x = 260N/120N = 2.2 \ \rightarrow \ \theta = arctg(2.2) = 65°$$

L’enigma dell’azione a distanza delle forze

Abbiamo visto che una delle proprietà comuni sia all’interazione gravitazionale che a quella elettrostatica (in quanto interazioni fondamentali) è la cosiddetta “**azione a distanza**”, cioè la capacità di tali tipi di forze di esercitare attrazione o repulsione *senza bisogno di un contatto diretto* tra gli oggetti coinvolti nell’interazione (come invece accade per le forze più comuni con cui abbiamo a che fare, tipo la forza di attrito, quella esercitata da una mano che tira o che spinge, o da una racchetta che colpisce la palla, etc.). **Ma come è possibile esercitare una azione a distanza?**



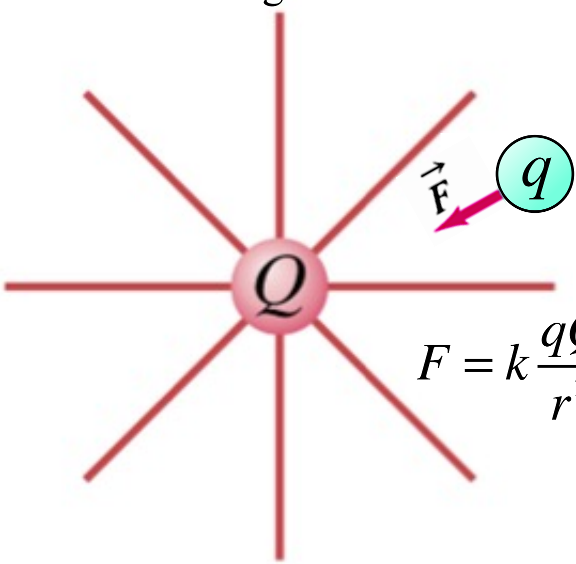


Il Campo Elettrico

Michael Faraday
(1791-1867)

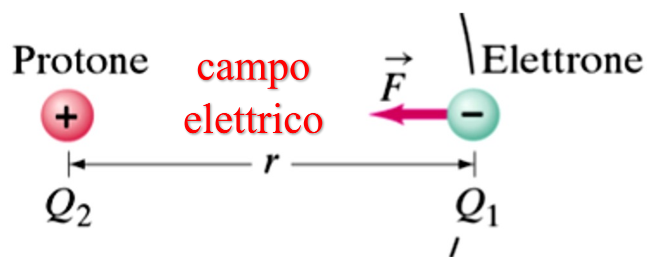
Già Newton e Cartesio avevano qualche problema ad accettare l'esistenza di una interazione, come quella gravitazionale, che sembrava avvenire istantaneamente, indipendentemente dalla distanza e in assenza di un mediatore noto. Fu per rimediare a un tale disagio che nella prima metà dell'800 lo scienziato britannico **Michael Faraday** introdusse, nello studio dei fenomeni elettromagnetici, il celebre concetto di "**campo**", che poi è progressivamente diventato uno dei più fecondi nella storia della fisica moderna.

Faraday ipotizzò che, quando si mette una **carica elettrica Q** (ad es. +) in una certa posizione dello spazio, attorno ad essa si genera, espandendosi alla velocità della luce in tutte le direzioni, una nuova entità (invisibile, ma per comodità rappresentata in figura con delle linee), che lui chiamò "**campo elettrico**", che finisce quindi per pervadere l'intero spazio. Una **seconda carica *q*** (ad es. –) che venisse posta in un punto nelle vicinanze di Q risentirebbe quindi della forza elettrica esercitata su di essa non già *direttamente* dalla carica Q ma *indirettamente* dal campo elettrico prodotto da Q.



$$F = k\frac{qQ}{r^2}$$

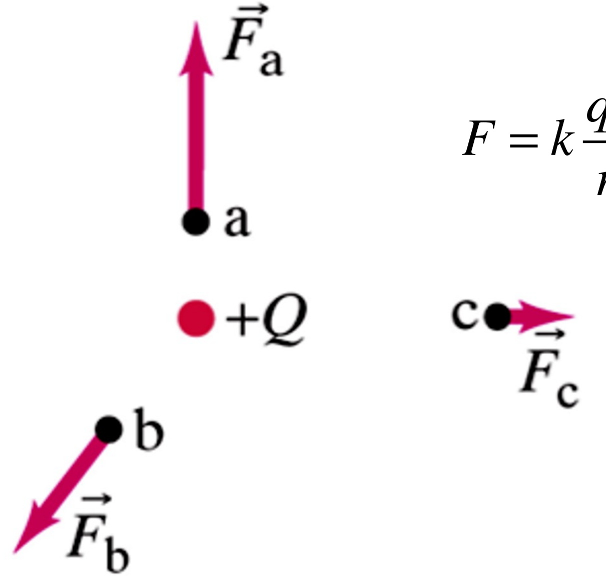
In questa descrizione dell'interazione elettrostatica, quindi, **le cariche non interagiscono più direttamente tra loro ma attraverso la mediazione del campo elettrico da esse generato**, campo che sarà tanto più intenso quanto più ci si trova nelle vicinanze della carica che lo ha prodotto.



Il Campo Elettrico

Quantitativamente, il campo elettrico generato da una carica o da un insieme di cariche può essere studiato misurando la forza elettrostatica che esso esercita su una "**carica di prova**" ***q***, **generalmente positiva,** che deve essere **sufficientemente piccola** da non perturbare significativamente il campo elettrico generato dalla distribuzione delle altre cariche.

Nella figura qui sotto immaginiamo che la **carica di prova *q*** venga posizionata successivamente in **tre punti** *a, b* e *c*, attorno ad una **carica positiva Q**: la forza che agisce sulla carica *q* in ciascuno dei tre punti è rappresentata da tre vettori che risultano tutti diretti *radialmente* lungo la retta congiungente le due cariche e rivolti verso l'esterno (essendo le cariche entrambe positive). Il modulo (la lunghezza) dei vettori invece **varierà nei tre casi**, essendo la forza (per la legge di Coulomb) inversamente proporzionale alla distanza *r* di *q* dalla carica centrale Q.



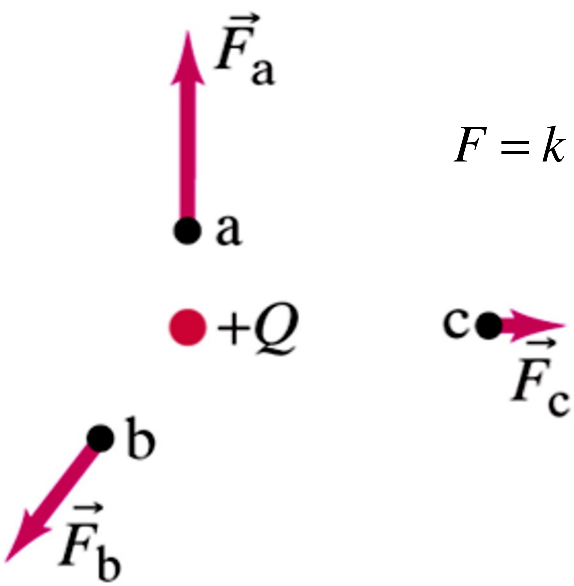
$$F = k\frac{qQ}{r^2}$$

Definizione di Campo Elettrico

Il **campo elettrico** $\vec{E}$ in ciascuno dei tre punti dello spazio attorno alla carica Q (o a una configurazione di cariche) verrà a questo punto definito dal **rapporto** tra la forza $\vec{F}$ agente su una carica di prova positiva *q* che si trovi in quei punti divisa per il valore di *q* stesso (che si immagina tendente a zero...):

$$\vec{E} = \vec{F}/q$$

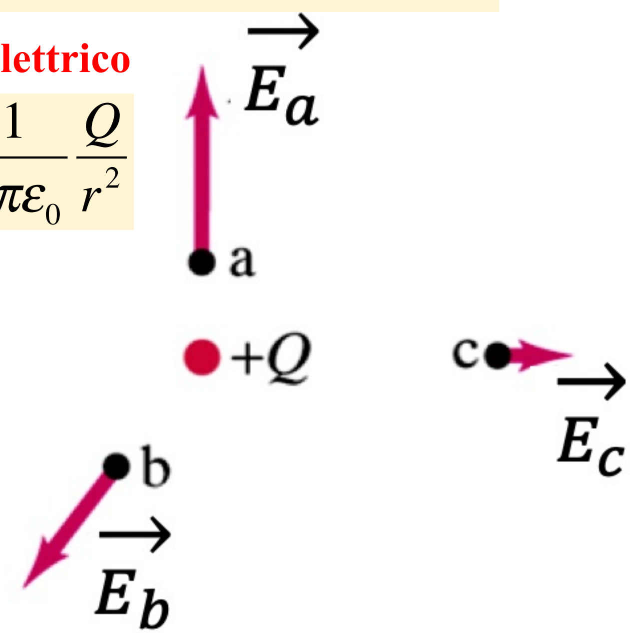
Nel caso di una **carica puntiforme positiva Q**, come quella che stiamo considerando in questo esempio, il **campo elettrico** da essa generato in ciascuno dei tre punti *a*, *b* e *c* avrà dunque una intensità (o modulo) che **dipende solo da Q e dalla rispettiva distanza r** e trattandosi di una forza per unità di carica **la sua unità di misura sarà *N/C*.**



$$F = k\frac{qQ}{r^2}$$

Modulo del campo elettrico

$$E = \frac{F}{q} = k\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

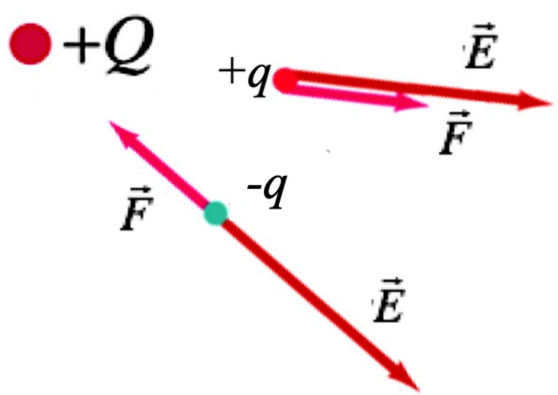


Definizione di Campo Elettrico

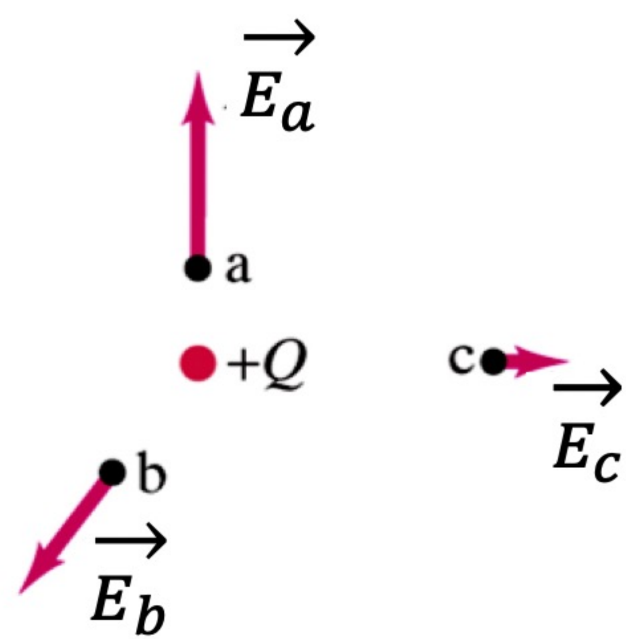
Il **campo elettrico** $\vec{E}$ in ciascuno dei tre punti dello spazio attorno alla carica Q (o a una configurazione di cariche) verrà a questo punto definito dal **rapporto** tra la forza $\vec{F}$ agente su una carica di prova positiva *q* che si trovi in quei punti divisa per il valore di *q* stesso (che si immagina tendente a zero...):

$$\vec{E} = \vec{F}/q$$

Dalla definizione di campo elettrico segue infine che, inversamente, la presenza di un **campo elettrico** $\vec{\mathbf{E}}$ in un qualsiasi punto P induce su una carica *q* una **forza** pari a $\vec{F} = q\vec{E}$, il cui verso dipenderà dal segno della carica *q*.

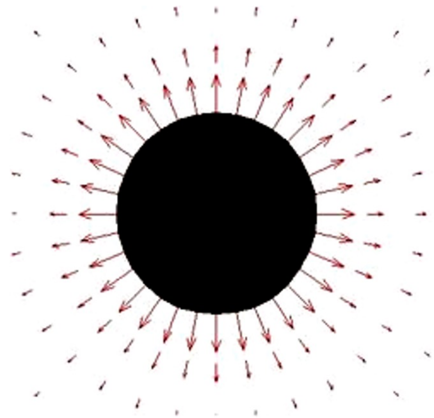


$\vec{F} = q\vec{E}$



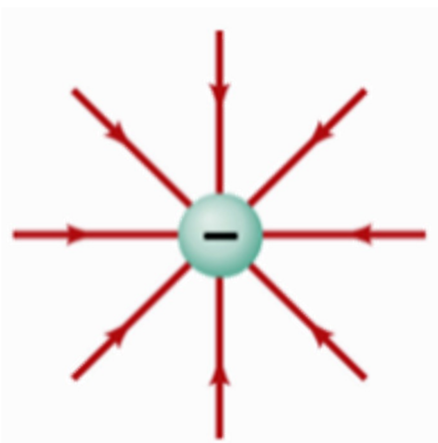
Linee di Campo Elettrico

Il campo elettrico, potendo essere descritto punto per punto per mezzo di vettori, è un esempio di **campo vettoriale**. La rappresentazione grafica di un campo vettoriale per mezzo di frecce genera però rapidamente confusione all'aumentare del numero di punti considerato (che è potenzialmente infinito!).

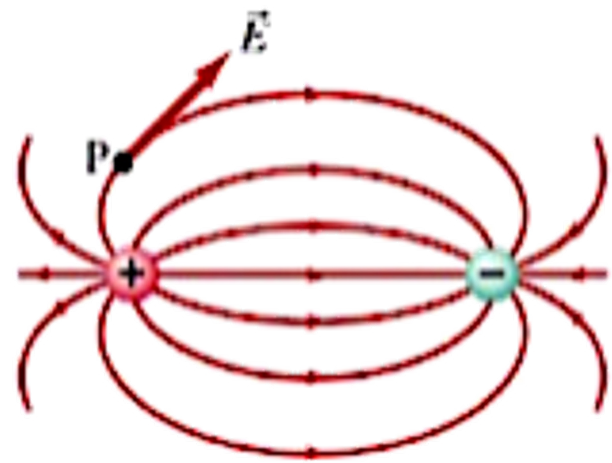


Una rappresentazione più pratica ed efficace è invece, sicuramente, quelle delle cosiddette "**linee di campo**" o "**linee di forza**", ciascuna delle quali individua la posizione del campo nei vari punti dello spazio secondo la regola che **il vettore campo elettrico deve essere tangente in quei punti alla linea di campo**.

Carica positiva isolata



Carica negativa isolata



Dipolo elettrico