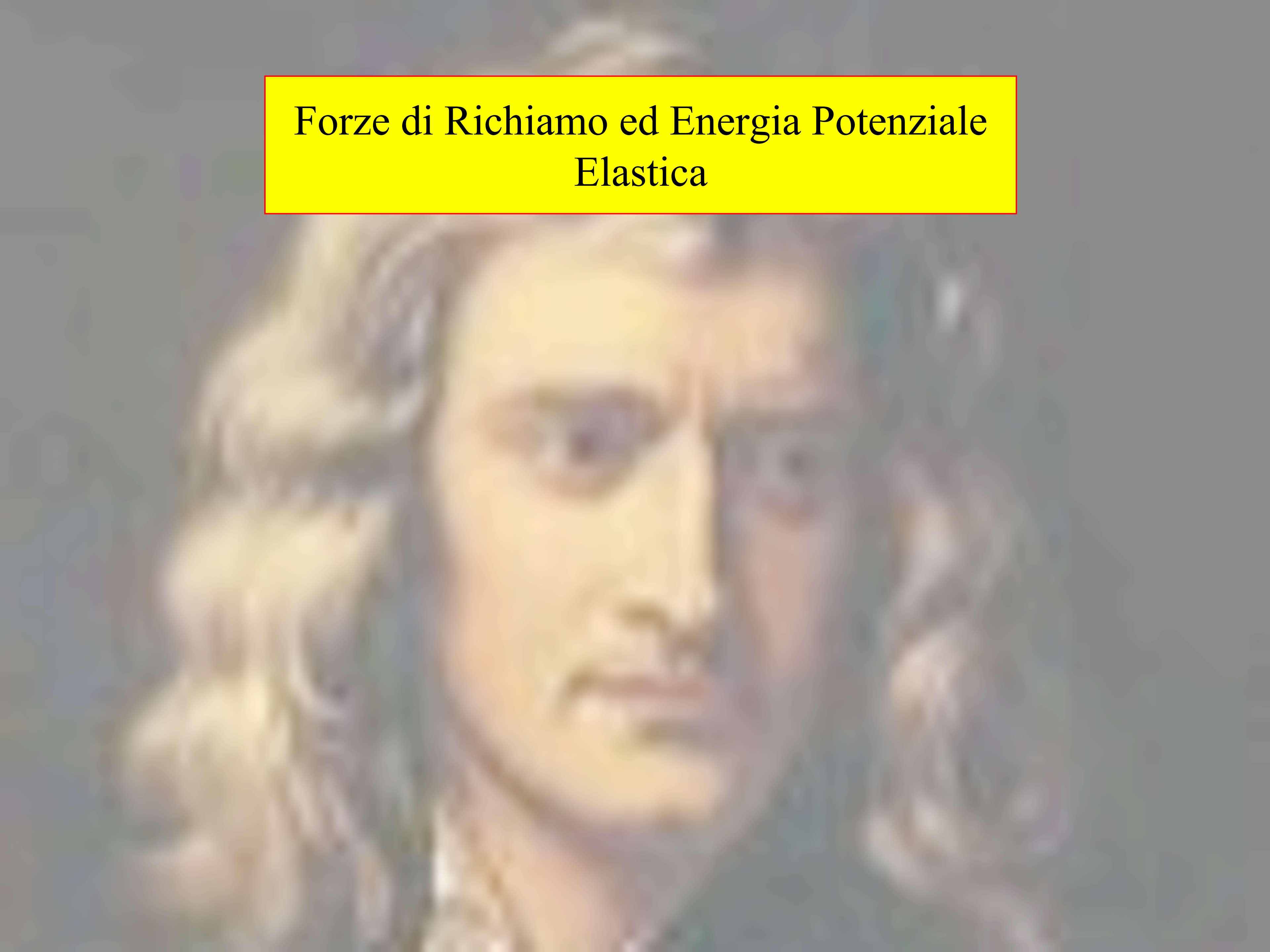
Forze di Richiamo ed Energia Potenziale Elastica



Lavoro ed Energia Cinetica

Quando un **oggetto in moto** urta su un altro oggetto (una palla di cannone contro un muro, un martello contro un chiodo, etc..), eserciterà su di esso una **forza** e ne provocherà un certo **spostamento**: così facendo esso mostra di essere in grado di **compiere lavoro proprio grazie al fatto che è in movimento**, e per questo diciamo che un oggetto in moto possiede una certa **energia cinetica**.

Abbiamo visto che se, per un corpo di massa *m* che si muove a velocità *v*, definiamo **energia cinetica traslazionale** la quantità:

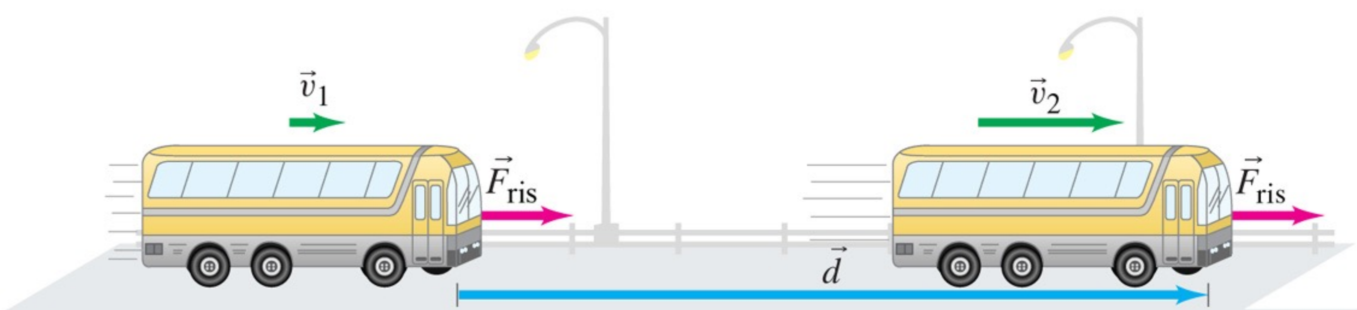
$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Nelle unità di misura del SI (MKS) anche l'energia cinetica si misura in **Joule** (J).

James Joule

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA: il lavoro <u>totale</u> compiuto da una forza risultante non nulla sul corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo stesso:

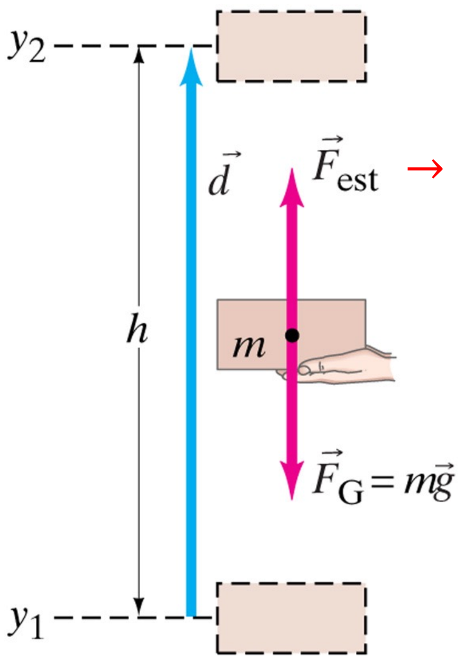
$$W_{tot} = K_2 - K_1 \quad \rightarrow \quad W_{tot} = \Delta K$$



Lavoro ed Energia Potenziale

Come abbiamo visto, l'**energia cinetica** posseduta da un corpo dipende esclusivamente dalla sua massa e dalla sua velocità, quindi essa **è presente in ogni corpo in movimento** a prescindere dall'esistenza o meno di altre forze che agiscono sul corpo stesso.

Esiste invece un'altra fondamentale forma di energia legata alla capacità di un corpo di compiere lavoro a causa della sua **configurazione** o della sua **posizione** all'interno di un campo di forza: questa forma di energia si chiama **energia potenziale** la sua definizione varia a seconda del tipo di forza da cui essa trae origine.



$\rightarrow W_{ext} > 0$

$\Delta U_g > 0$

$\rightarrow W_g < 0$

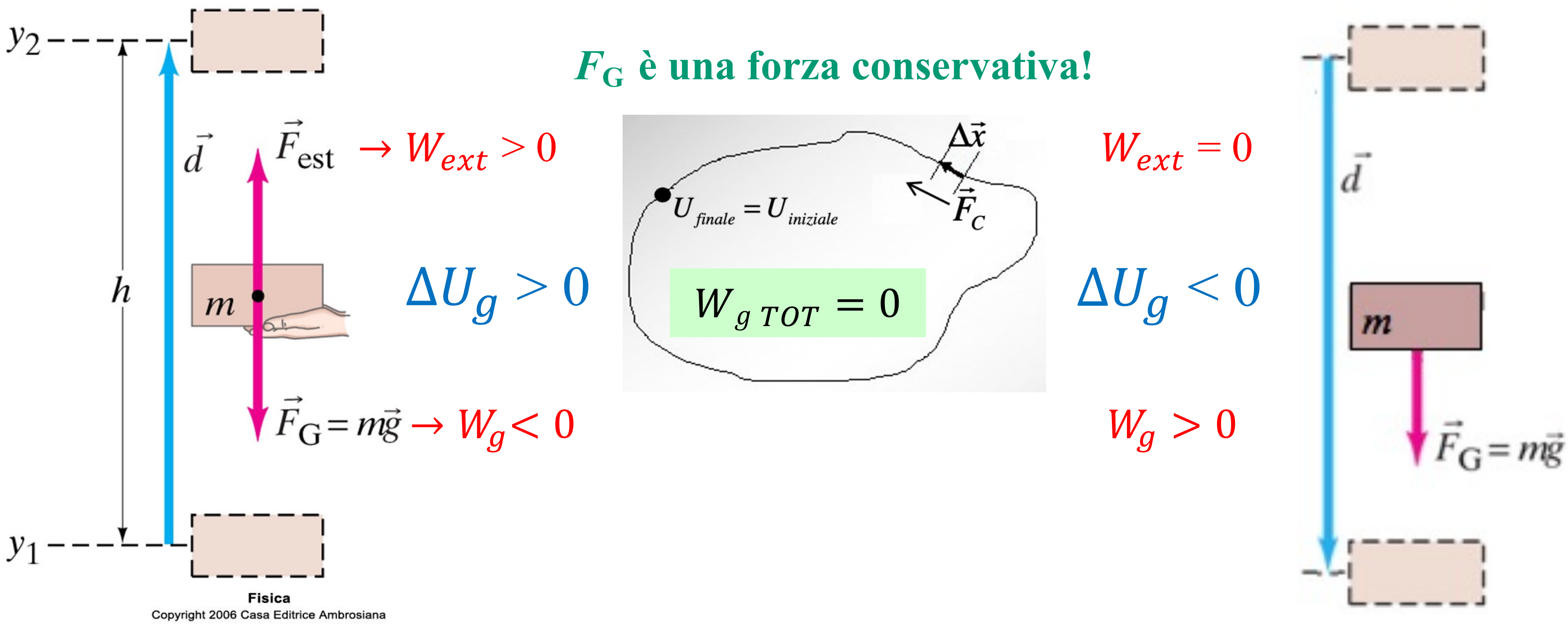
Energia potenziale gravitazionale U_g di un corpo di massa m posto alla quota h al di sopra di una quota di riferimento (ad esempio il terreno):

$$U_g = mgh$$

Lavoro ed Energia Potenziale

Come abbiamo visto, l'**energia cinetica** posseduta da un corpo dipende esclusivamente dalla sua massa e dalla sua velocità, quindi essa **è presente in ogni corpo in movimento** a prescindere dall'esistenza o meno di altre forze che agiscono sul corpo stesso.

Esiste invece un'altra fondamentale forma di energia legata alla capacità di un corpo di compiere lavoro a causa della sua **configurazione** o della sua **posizione** all'interno di un campo di forza: questa forma di energia si chiama **energia potenziale** la sua definizione varia a seconda del tipo di forza da cui essa trae origine.

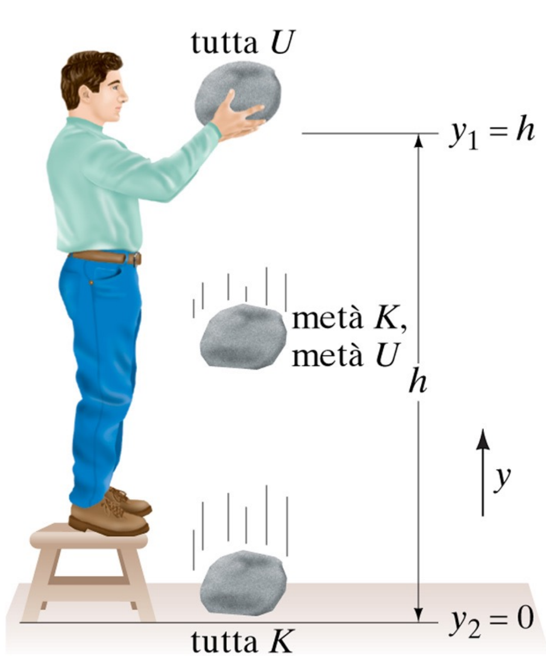


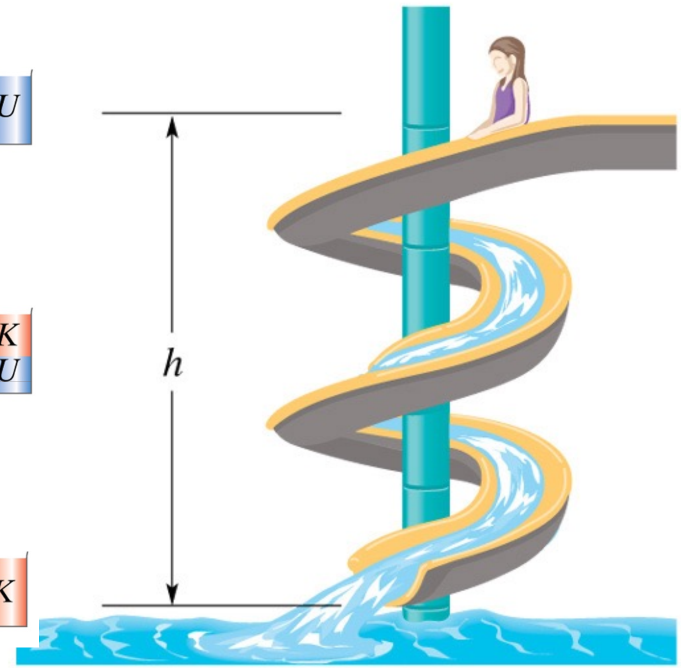
Principio di Conservazione dell’Energia Meccanica Totale

Il “**Principio di conservazione dell’energia meccanica totale**” può essere enunciato nel modo seguente:

Quando in un sistema isolato agiscono solo forze conservative, l’energia cinetica e l’energia potenziale prese singolarmente possono variare, ma la loro somma, cioè l’energia meccanica totale del sistema, non cambia ma si mantiene costante nel tempo:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \quad \rightarrow \quad E = \text{costante}$$



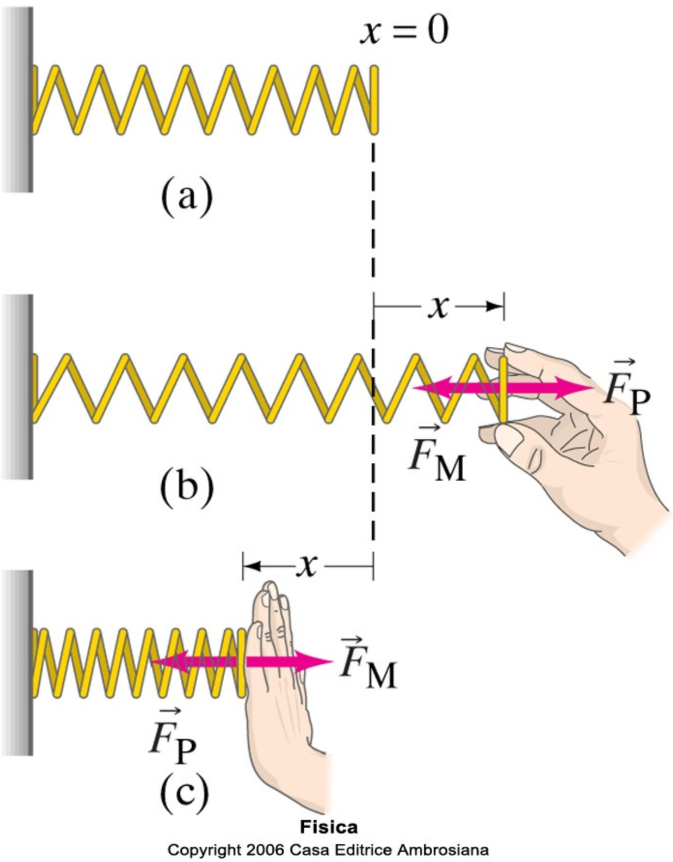


Forze elastiche: la Legge di Hooke

Un altro tipo molto comune di **energia potenziale** è quella associata a **forze di tipo elastico**, che sono anch'esse **conservative** e riguardano moltissime applicazioni pratiche.

Consideriamo una normale **molla a spirale metallica** nella sua posizione di riposo o **equilibrio** (a). Abbiamo già detto che una molla possiede energia potenziale quando è allungata (b) o compressa (c) perchè è in grado di compiere lavoro su altri corpi.

Si può verificare **sperimentalmente** che se vogliamo comprimere o estendere la molla di un tratto x rispetto alla sua posizione di equilibrio (x=0), contrastando la forza elastica $\mathbf{F_M}$, occorre applicare una forza esterna $\mathbf{F_P}=\boldsymbol{kx}$, cioè una **forza direttamente proporzionale allo spostamento *x*** (e con il suo stesso verso). Il parametro ***k*** è detto **costante elastica** della molla e ne quantifica la rigidità.



Se ne deduce che, al contrario della forza peso (che resta sempre costante), **la forza elastica aumenta linearmente con lo spostamento** in quanto la **molla** compressa o allungata esercita una forza $\mathbf{F_M}= -\boldsymbol{kx}$, uguale ed opposta a quella esterna, che tende a riportare la molla nella sua posizione di equilibrio (x=0). Per questo viene detta '**forza di richiamo**'.

L'equazione $F_M = -kx$ è nota come "**Legge di Hooke**" ed è la relazione più semplice in grado di descrivere, con buona approssimazione, il comportamento dei **materiali elastici**.

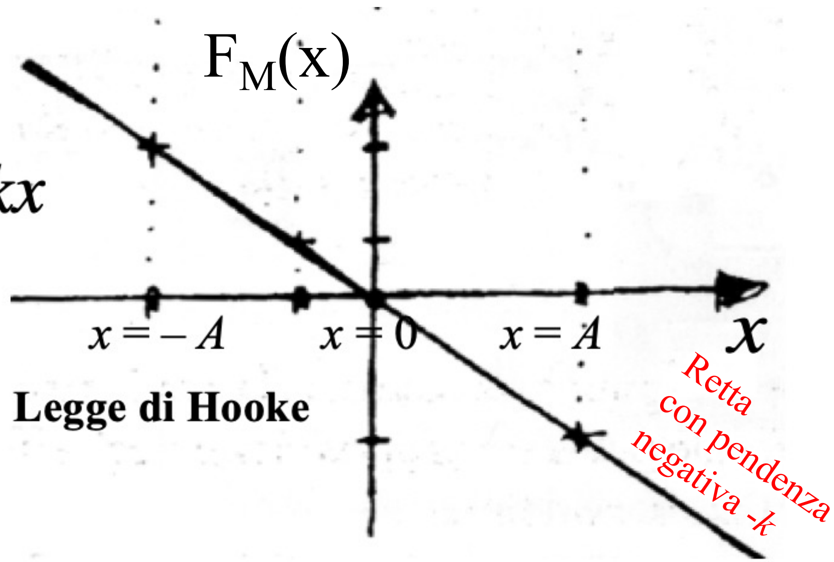
Robert Hooke (1635 -1703)

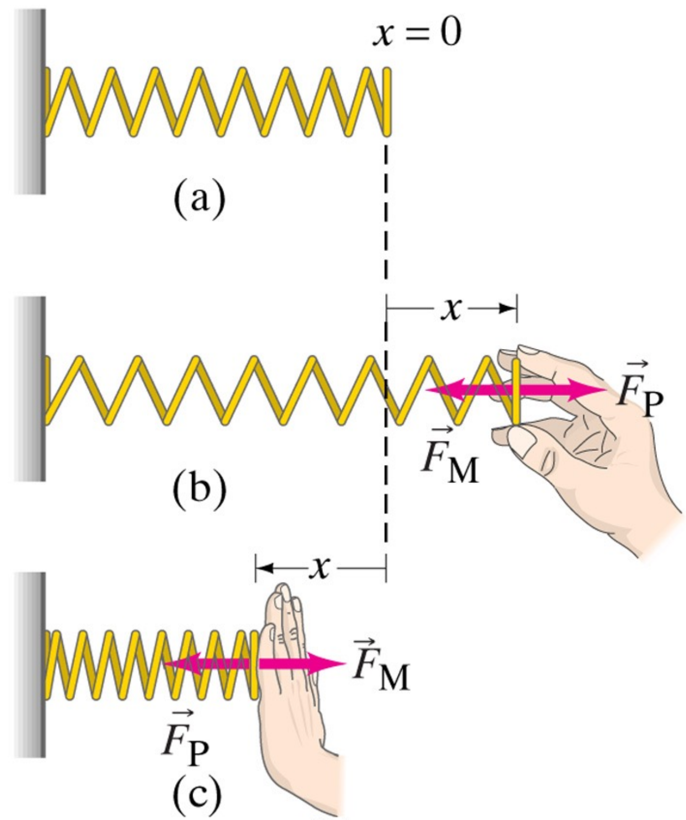
Forze elastiche: la Legge di Hooke

Un altro tipo molto comune di **energia potenziale** è quella associata a **forze di tipo elastico**, che sono anch'esse **conservative** e riguardano moltissime applicazioni pratiche.

Consideriamo una normale **molla a spirale metallica** nella sua posizione di riposo o **equilibrio** (a). Abbiamo già detto che una molla possiede energia potenziale quando è allungata (b) o compressa (c) perchè è in grado di compiere lavoro su altri corpi.

$$F_M = -kx$$





L'equazione $F_M = -kx$ è nota come "**Legge di Hooke**" ed è la relazione più semplice in grado di descrivere, con buona approssimazione, il comportamento dei **materiali elastici**.

Robert Hooke (1635 -1703)

Lavoro ed Energia Potenziale Elastica di una Molla

Riassumendo, dunque, a differenza della forza di gravità che sappiamo essere pressoché costante sulla superficie terrestre, la **forza esterna** F_P necessaria per comprimere o allungare una molla non è affatto costante ma **cresce linearmente con lo spostamento x** della molla dalla sua posizione di equilibrio.

Per calcolare il **lavoro** necessario per allungare o comprimere la molla di una quantità x potremmo essere tentati di usare l'equazione $W=F_P x$, ma quest'ultima vale solo per forze costanti mentre la forza elastica non lo è. Poichè però durante l'allungamento F_P varia **linearmente** da 0 a kx_F, essendo x_F l'allungamento finale, è possibile calcolare la **forza media** come (togliendo per semplicità il pedice F dalla x):

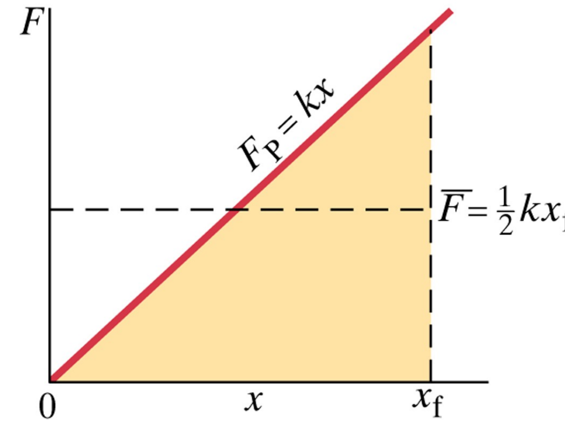
$$\overline{F} = \frac{1}{2}[0 + kx] = \frac{1}{2}kx$$

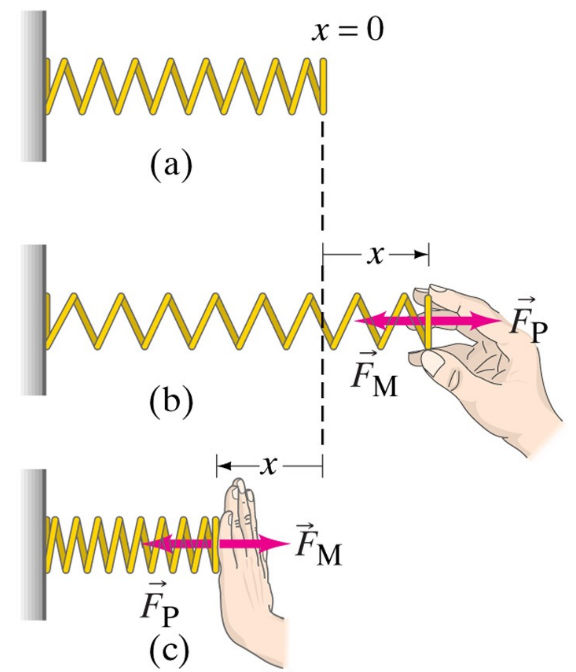
Essendo la forza media, per definizione, costante, ed essendo essa parallela allo spostamento, possiamo finalmente ricavare il **lavoro**:

$$W_{est} = \overline{F}x = (\frac{1}{2}kx)(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

da cui, essendo (come sappiamo) il lavoro compiuto dalla forza esterna uguale alla variazione di **energia potenziale elastica** della molla, e ponendo U = 0 ad $x = 0$, avremo:

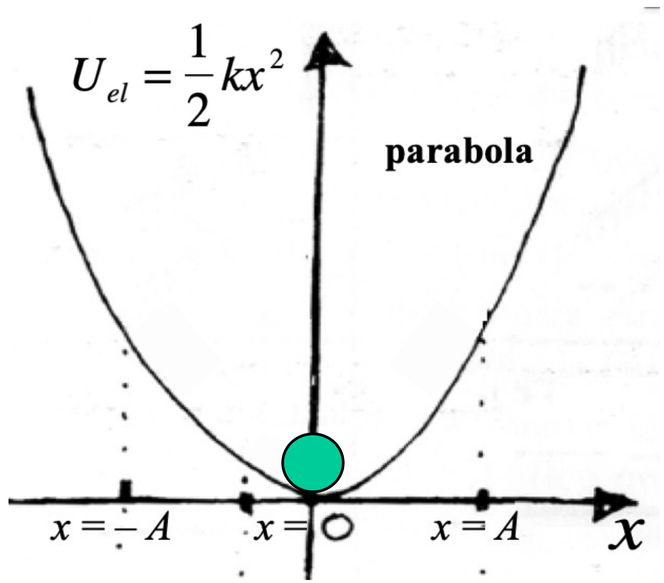
$$W_{est} = U_{el} - 0 = \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$$

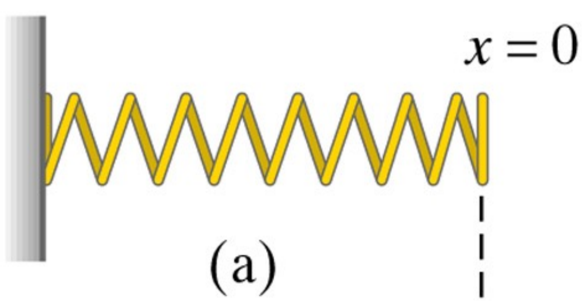




Energia Potenziale Elastica di una Molla

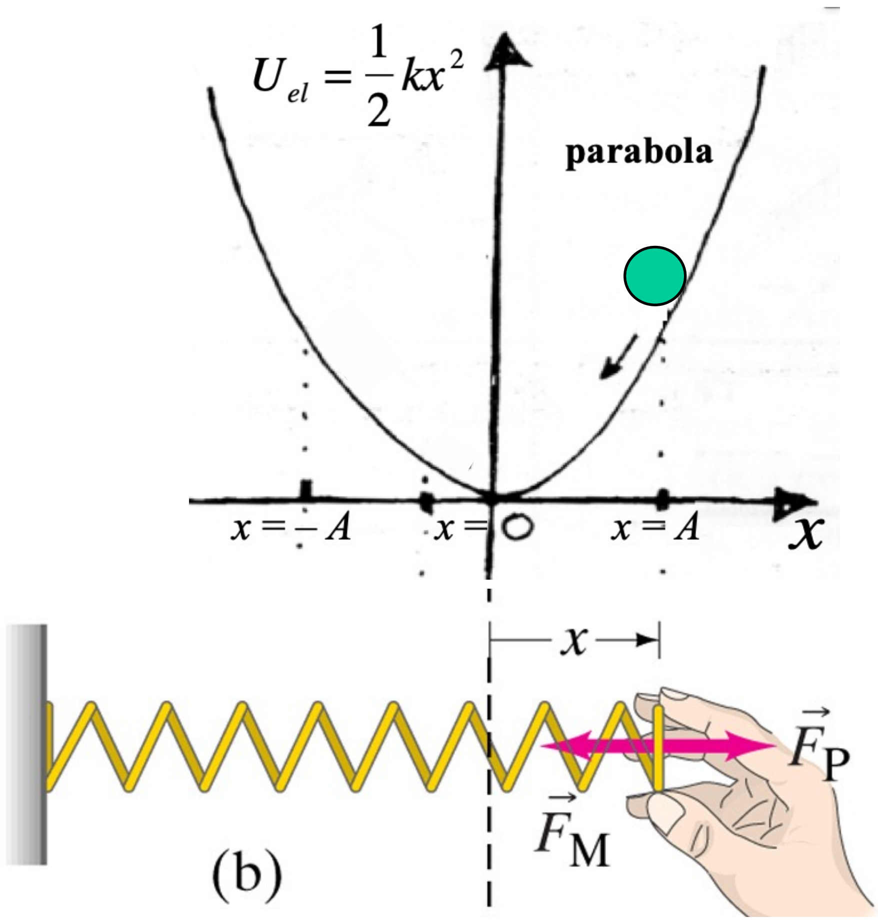
Se rappresentiamo in un grafico **l'energia potenziale elastica** U(x) in funzione dello **spostamento** x (positivo o negativo) rispetto alla posizione di equilibrio (x=0) vediamo che ha l'aspetto di una **parabola rovesciata**, detta anche «**buca di potenziale**», in cui una **pallina immaginaria,** in grado di scivolare sotto l'effetto della forza peso (vedi grafico sottostante), produrrebbe delle **oscillazioni** analoghe a quelle di un **oggetto** di massa m attaccato alla molla...





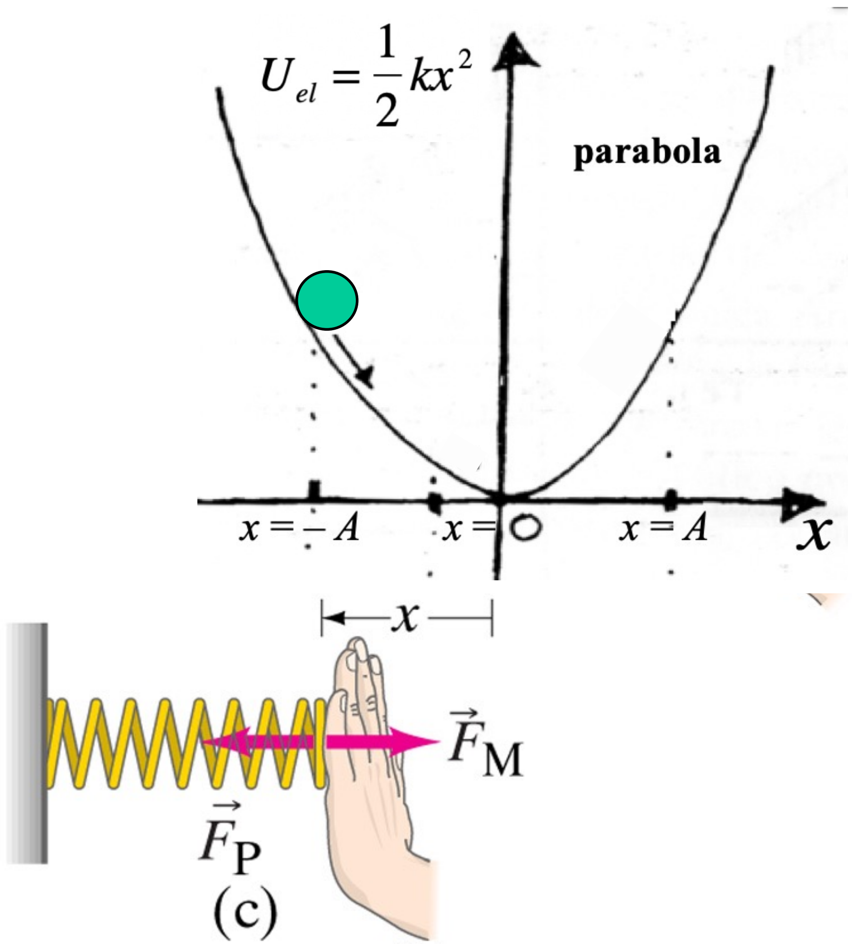
Energia Potenziale Elastica di una Molla

Se rappresentiamo in un grafico **l'energia potenziale elastica** U(*x*) in funzione dello **spostamento** *x* (positivo o negativo) rispetto alla posizione di equilibrio (*x*=0) vediamo che ha l'aspetto di una **parabola rovesciata**, detta anche «**buca di potenziale**», in cui una **pallina immaginaria,** in grado di scivolare sotto l'effetto della forza peso (vedi grafico sottostante), produrrebbe delle **oscillazioni** analoghe a quelle di un **oggetto** di massa *m* attaccato alla molla...



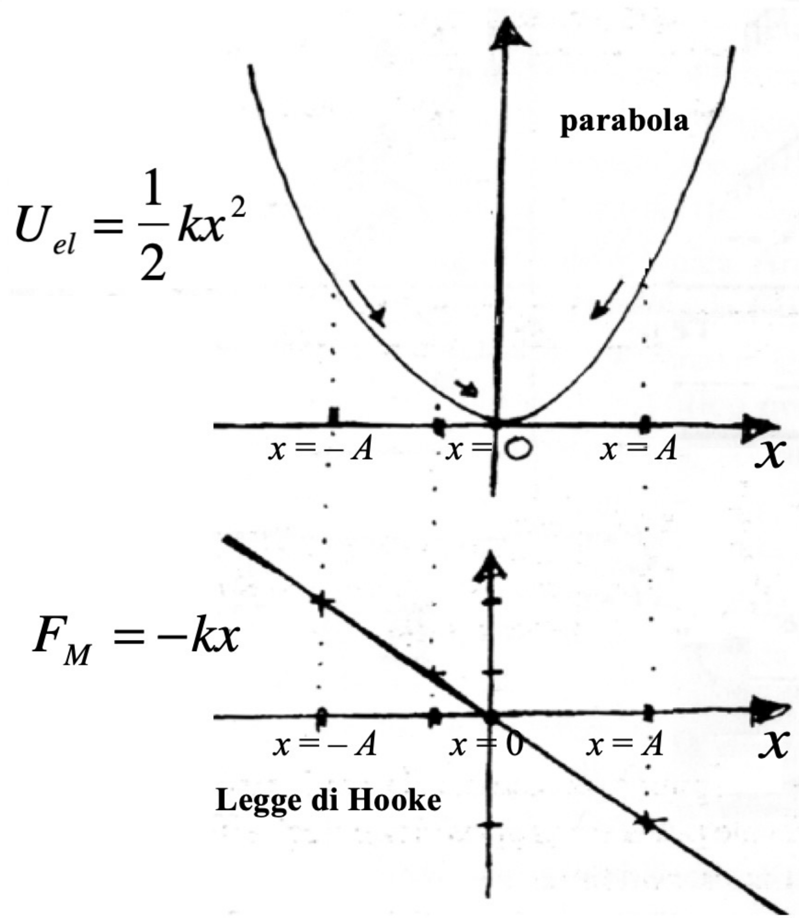
Energia Potenziale Elastica di una Molla

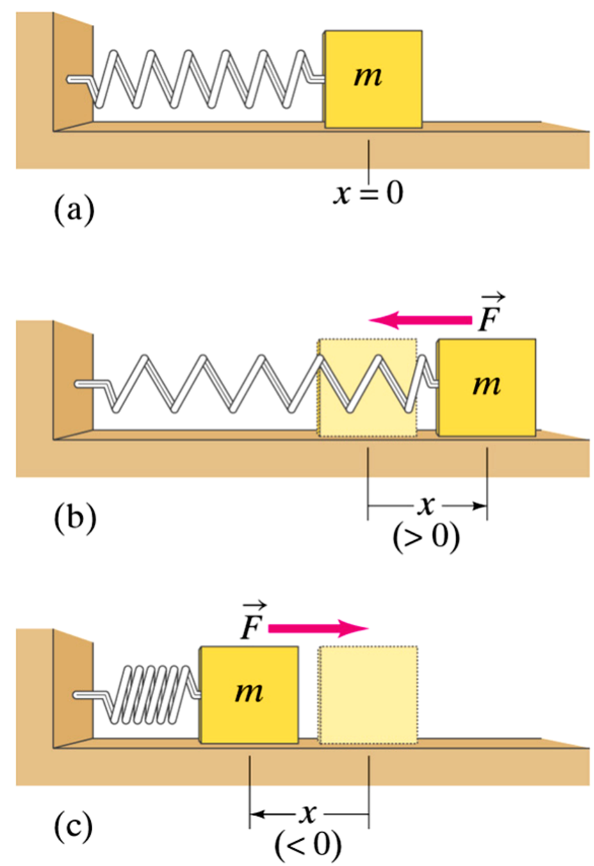
Se rappresentiamo in un grafico **l'energia potenziale elastica** U(x) in funzione dello **spostamento** x (positivo o negativo) rispetto alla posizione di equilibrio (x=0) vediamo che ha l'aspetto di una **parabola rovesciata**, detta anche «**buca di potenziale**», in cui una **pallina immaginaria,** in grado di scivolare sotto l'effetto della forza peso (vedi grafico sottostante), produrrebbe delle **oscillazioni** analoghe a quelle di un **oggetto** di massa m attaccato alla molla...



L’Oscillatore Armonico

In assenza di attriti, il principio di conservazione dell’energia si applica infatti anche ad una **massa** m fissata all’estremità di una **molla a spirale,** che prende il nome di **‘oscillatore armonico’**. Infatti, sappiamo che la massa è soggetta alla **forza di richiamo** esercitata dalla molla quando quest’ultima viene compressa o allungata di una quantità x (spostamento) rispetto alla sua posizione di equilibrio. Tale forza segue la **Legge di Hooke**, $F = -kx$, cioè è proporzionale allo spostamento, e questo provoca un’oscillazione della massa ad essa fissata:

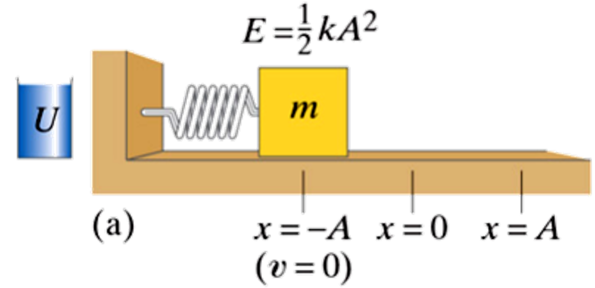


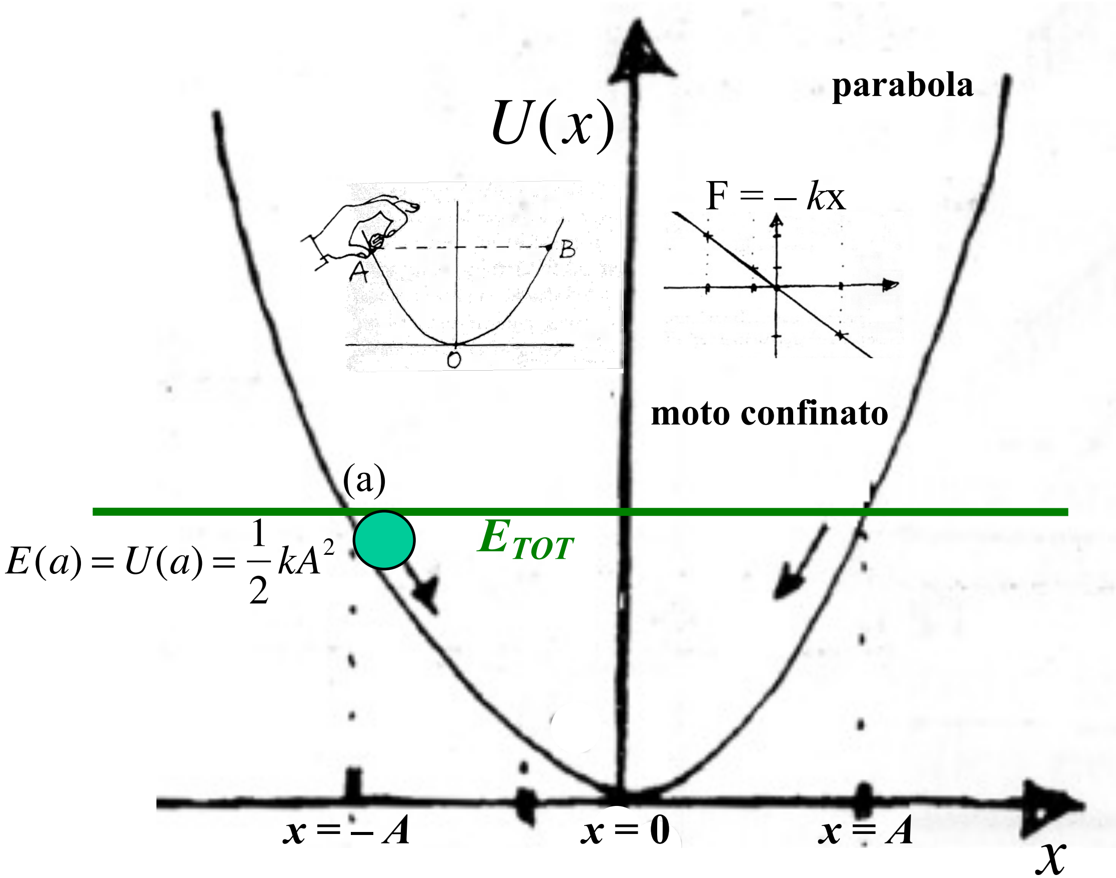


Energia totale di un Oscillatore Armonico

Ad ogni istante di tempo, l'energia totale dell'**oscillatore armonico** è costante e può scriversi come somma dell'energia cinetica K(t) e di quella potenziale U(t):

$$E_{TOT} = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

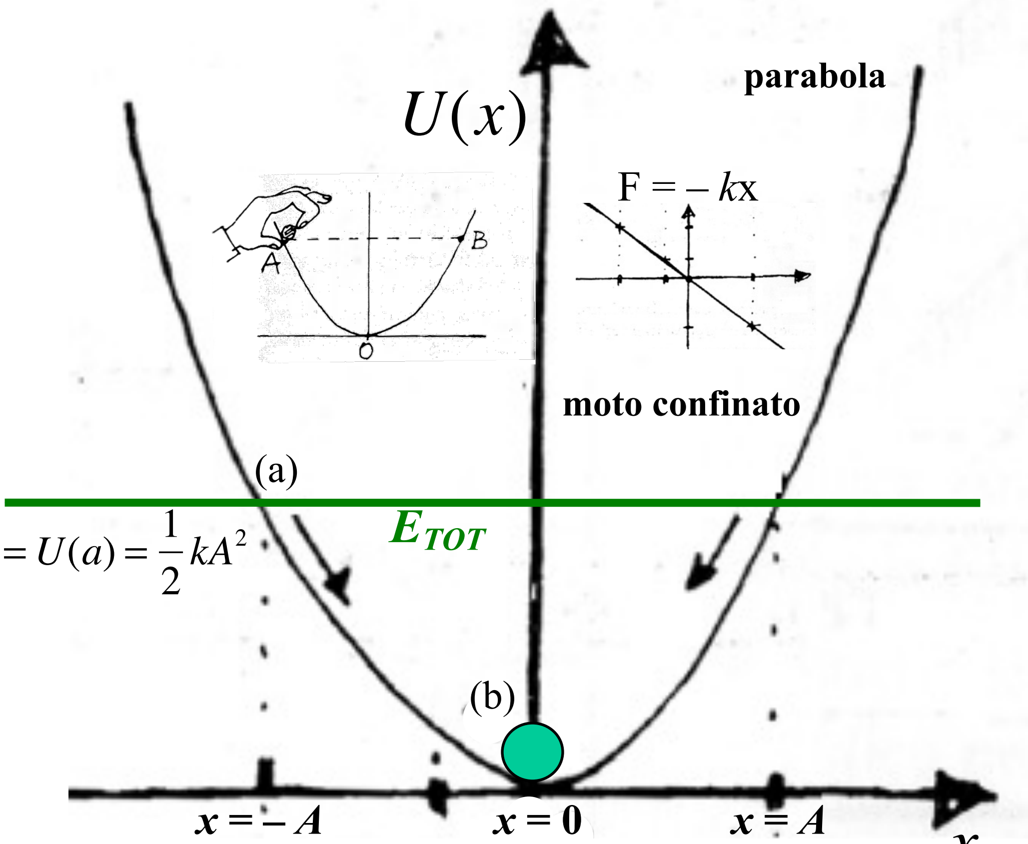




Energia totale di un Oscillatore Armonico

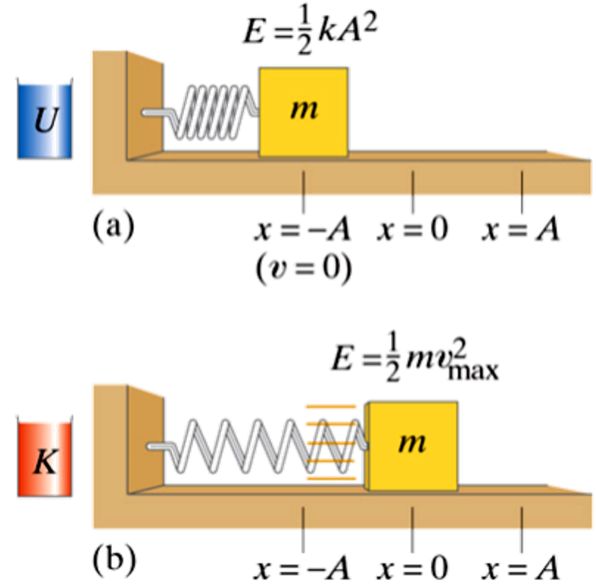
Ad ogni istante di tempo, l'energia totale dell'**oscillatore armonico** è costante e può scriversi come somma dell'energia cinetica K(t) e di quella potenziale U(t):

$$E_{TOT} = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$



$$E(a) = U(a) = \frac{1}{2}kA^2$$

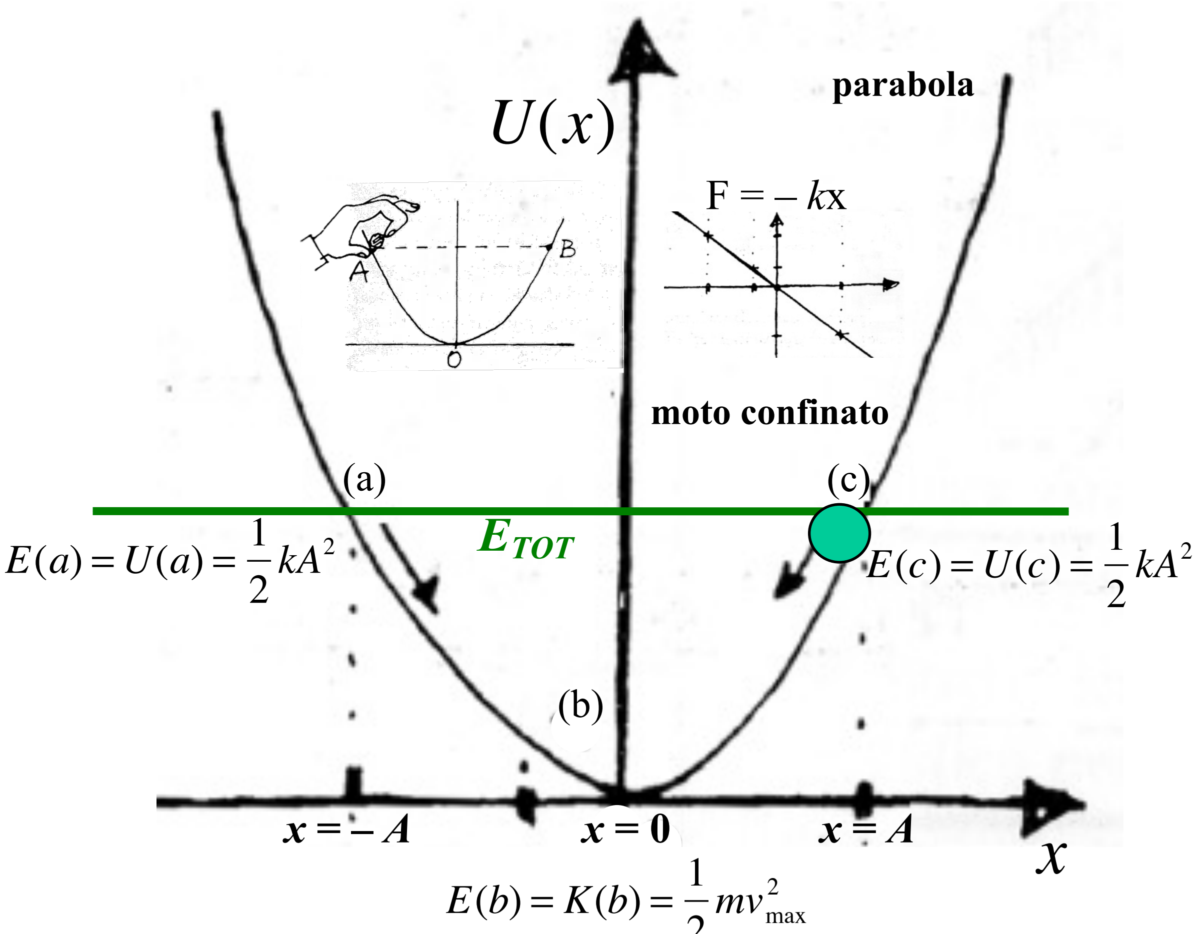
$$E(b) = K(b) = \frac{1}{2}mv^2_{max}$$

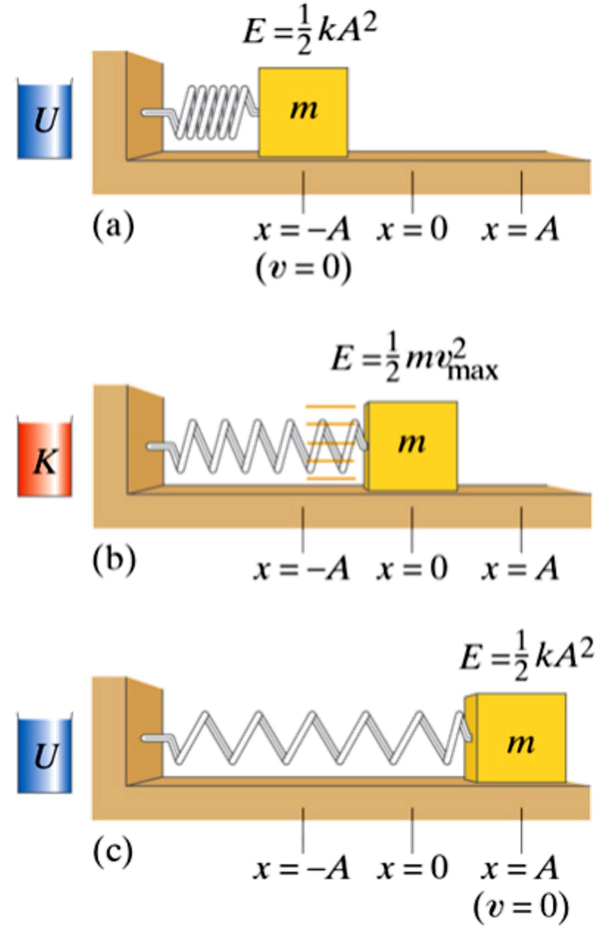


Energia totale di un Oscillatore Armonico

Ad ogni istante di tempo, l'energia totale dell'**oscillatore armonico** è costante e può scriversi come somma dell'energia cinetica K(t) e di quella potenziale U(t):

$$E_{TOT} = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

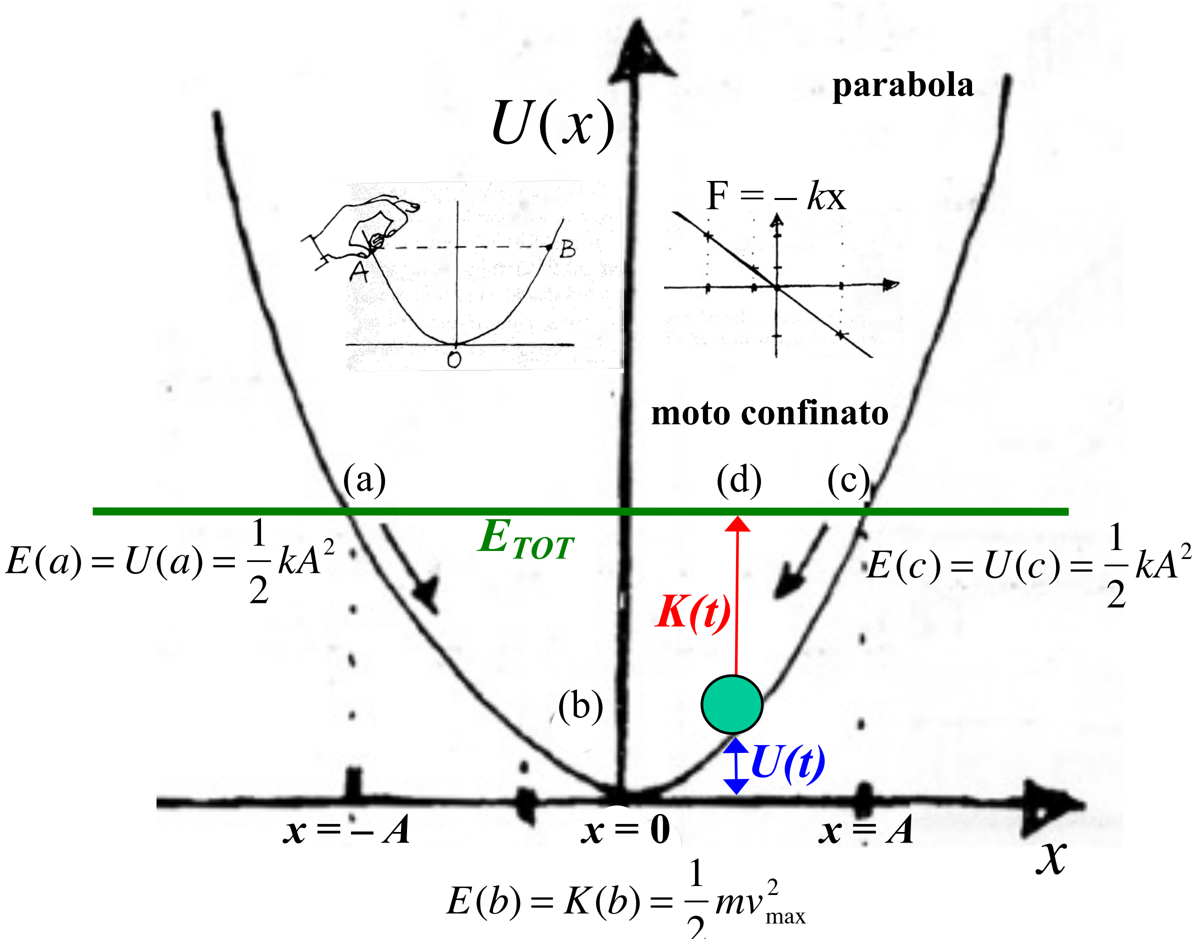


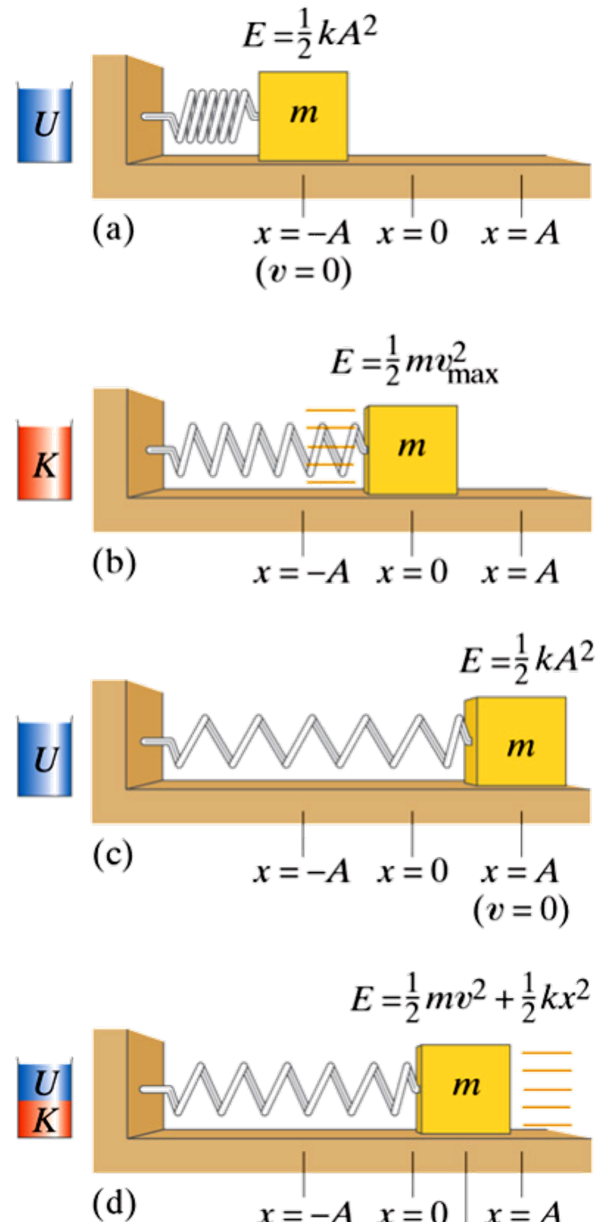


Energia totale di un Oscillatore Armonico

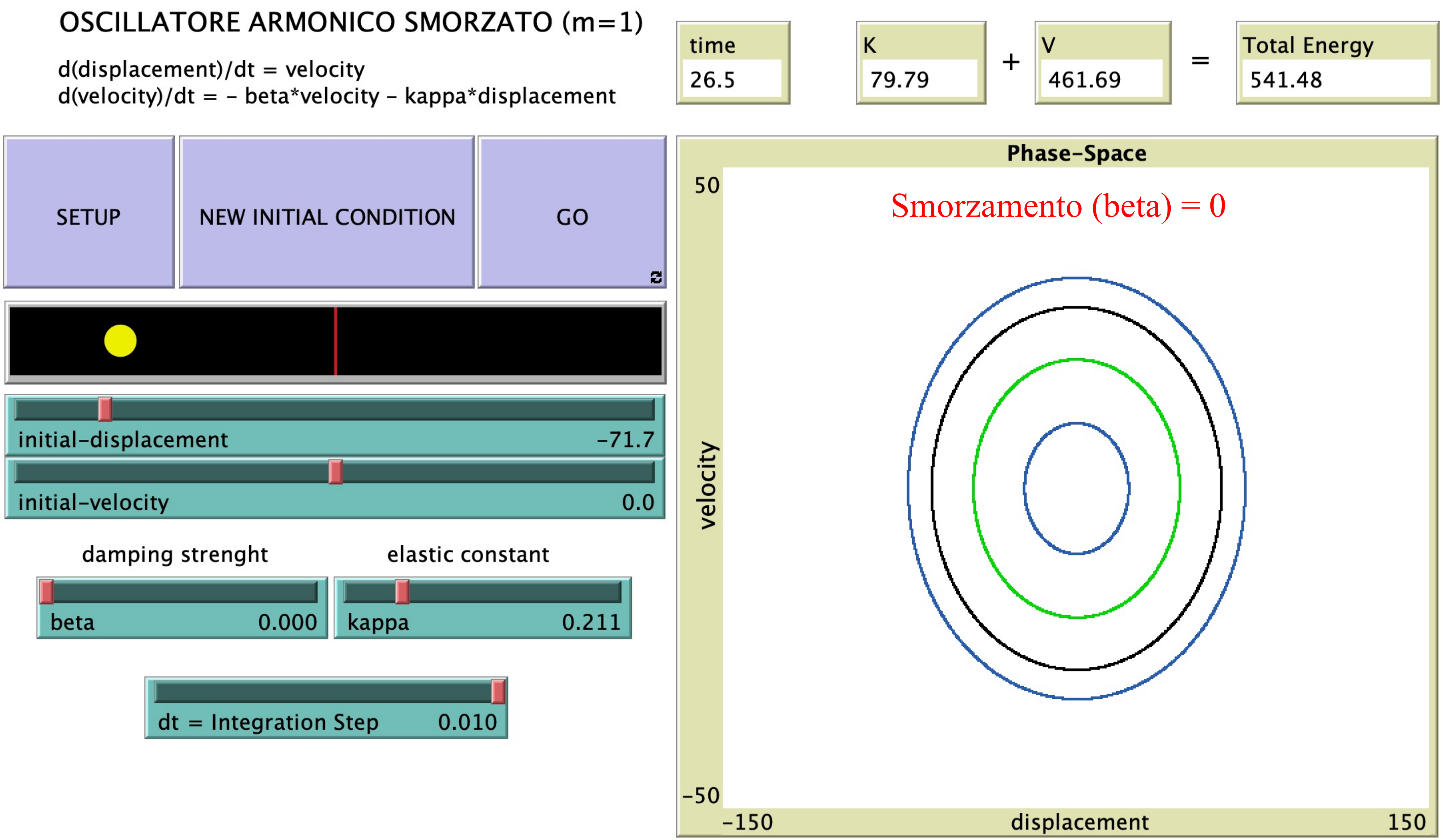
Ad ogni istante di tempo, l'energia totale dell'**oscillatore armonico** è costante e può scriversi come somma dell'energia cinetica K(t) e di quella potenziale U(t):

$$E_{TOT} = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

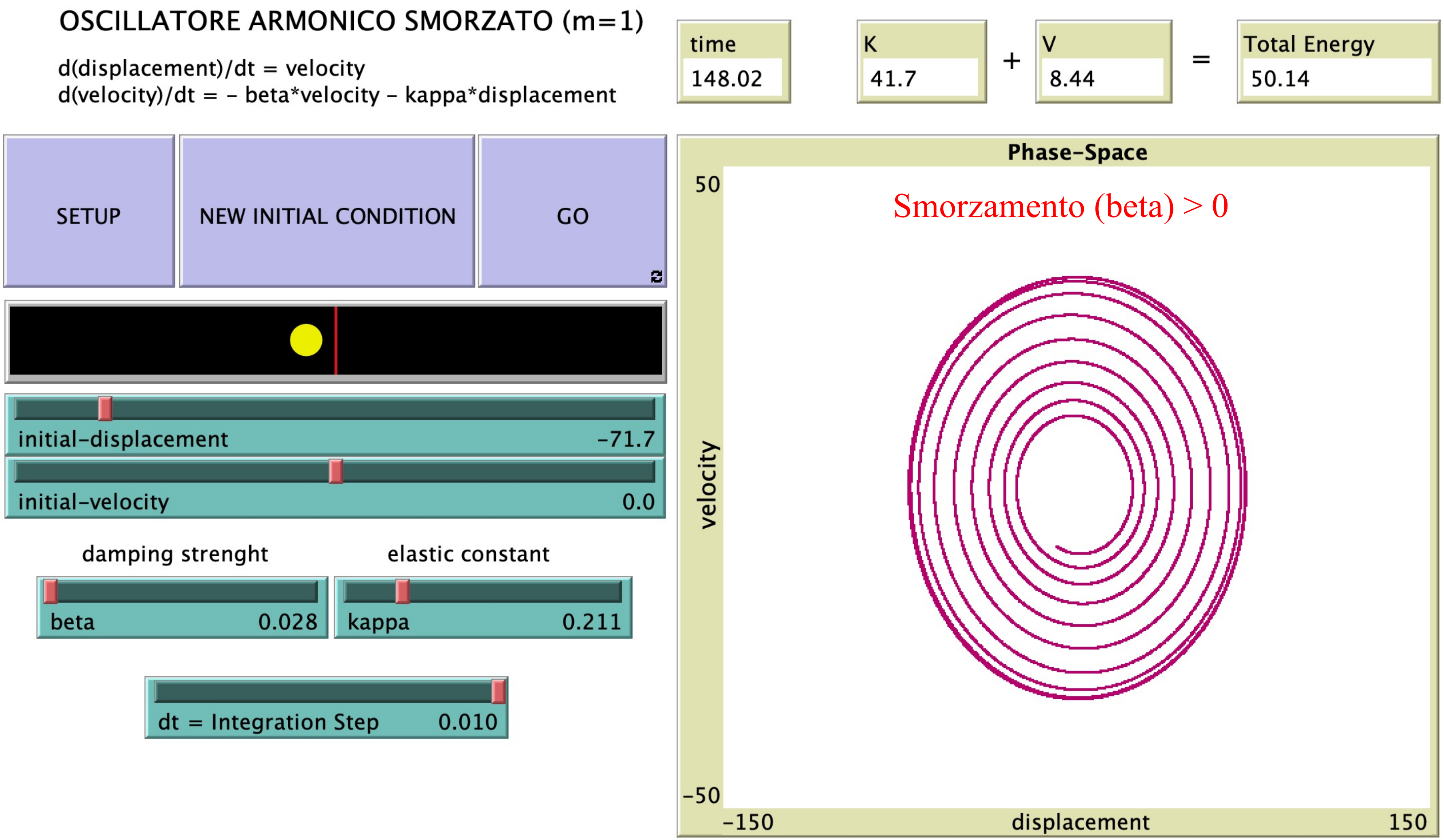




Simulazione Oscillatore Armonico (anche smorzato)



Simulazione Oscillatore Armonico (anche smorzato)



https://ccl.northwestern.edu/netlogo/download.shtml

NetLogo

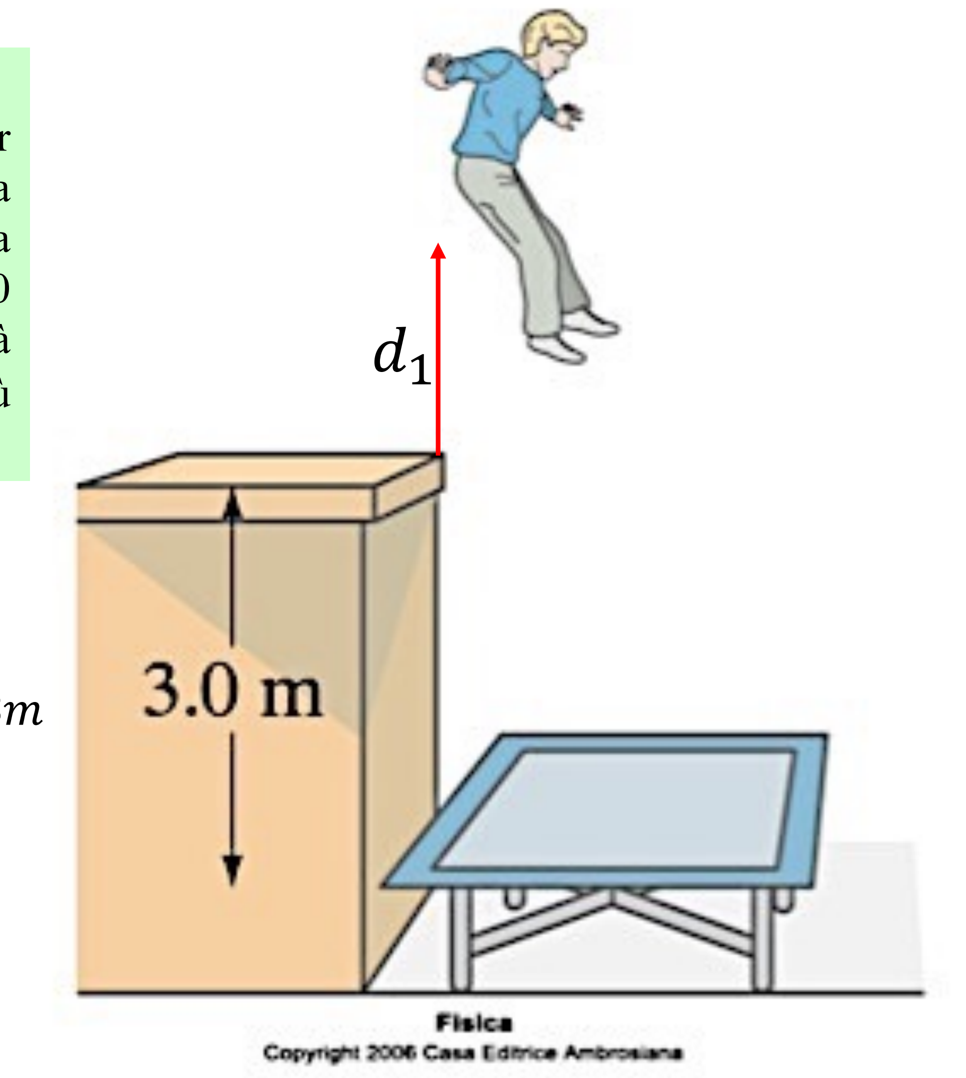
Acrobati che saltano e conservazione dell'energia

A volte alcuni esercizi possono essere risolti utilizzando solo le leggi della cinematica e della dinamica …

Esercizio
L'acrobata di un circo, di massa 65 Kg, per esibirsi su un tappeto elastico salta verticalmente verso l'alto dalla cima della piattaforma in figura con una velocità di 5.0 m/s. (a) Quale sarà la sua velocità nell'atterrare sul tappeto elastico, 3.0 m più in basso?

Cinematica 1D: $0 = v_{in}^2 - 2gd_1$

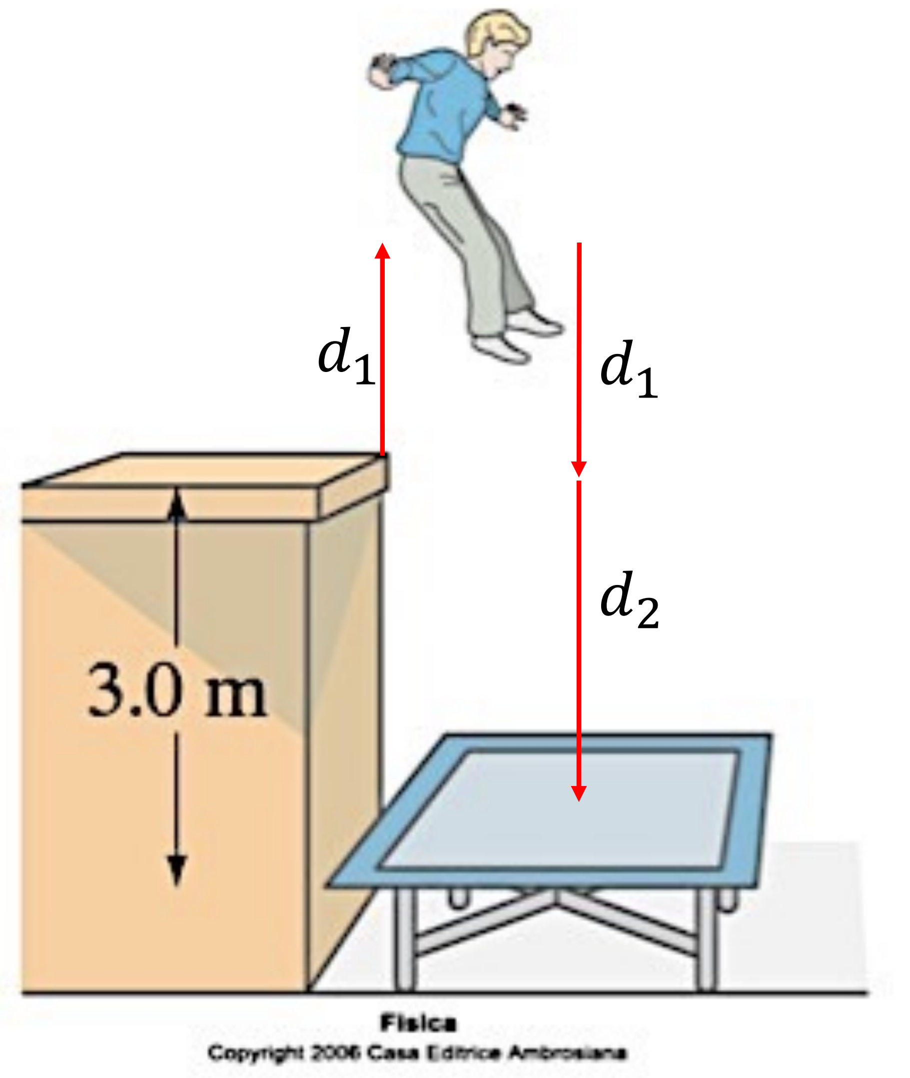
$$d_1 = \frac{v_{in}^2}{2g} = \frac{(\frac{5m}{s})^2}{2(\frac{9.8m}{s^2})} = \frac{25\, m^2/s^2}{19.6\, m/s^2} = 1.28m$$



Acrobati che saltano e conservazione dell'energia

A volte alcuni esercizi possono essere risolti utilizzando solo le leggi della cinematica e della dinamica …

Esercizio
L'acrobata di un circo, di massa 65 Kg, per esibirsi su un tappeto elastico salta verticalmente verso l'alto dalla cima della piattaforma in figura con una velocità di 5.0 m/s. (a) Quale sarà la sua velocità nell'atterrare sul tappeto elastico, 3.0 m più in basso?



Cinematica 1D: $0 = v_{in}^2 - 2gd_1$

$$d_1 = \frac{v_{in}^2}{2g} = \frac{(\frac{5m}{s})^2}{2(\frac{9.8m}{s^2})} = \frac{25\ m^2/s^2}{19.6\ m/s^2} = 1.28m$$

Conservazione energia:

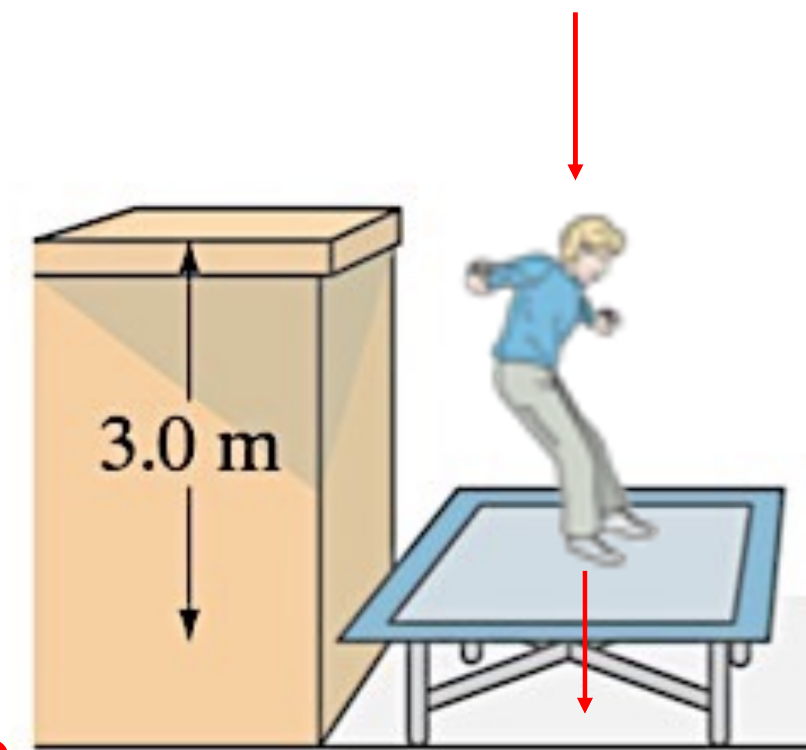
$$0 + mg(d_1 + d_2) = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 + 0$$

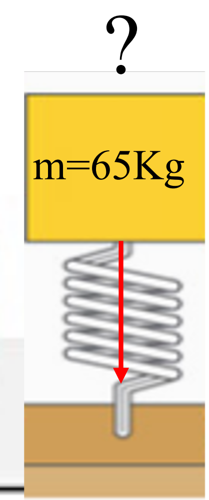
$$v_{fin} = \sqrt{2g(d_1 + d_2)} = 9.16\frac{m}{s}$$

Acrobati che saltano e conservazione dell'energia

A volte alcuni esercizi possono essere risolti utilizzando solo le leggi della cinematica e della dinamica …

Esercizio
L'acrobata di un circo, di massa 65 Kg, per esibirsi su un tappeto elastico salta verticalmente verso l'alto dalla cima della piattaforma in figura con una velocità di 5.0 m/s. (a) Quale sarà la sua velocità nell'atterrare sul tappeto elastico, 3.0 m più in basso? (b) Se il tappeto elastico si comporta come una molla di costante elastica 6.2 * 10^4 N/m, di quanto si abbasserà?





Legge di Hooke: $F_M = -kx$

Equilibrio tra forze:

$$F_M = F_G \rightarrow kx = mg$$

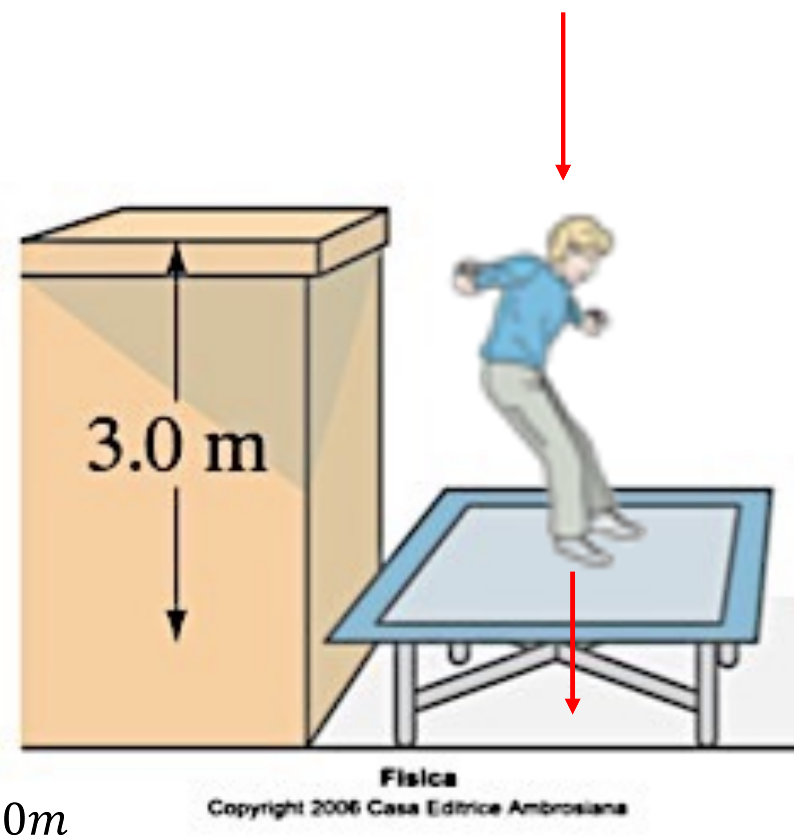
$$x = \frac{mg}{k} = \frac{65Kg\ 9.8\ m/s^2}{6.2\ 10^4\ N/m} = 0.01m$$

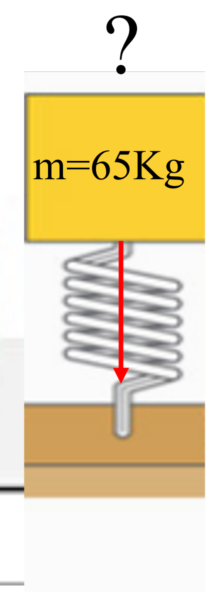
? **Sembra che la velocità di arrivo sul tappeto elastico non conti! Ma questo è strano…**

Acrobati che saltano e conservazione dell'energia

Altre volte invece richiedono esplicitamente l'utilizzo del concetto di energia…

Esercizio
L'acrobata di un circo, di massa 65 Kg, per esibirsi su un tappeto elastico salta verticalmente verso l'alto dalla cima della piattaforma in figura con una velocità di 5.0 m/s. (a) Quale sarà la sua velocità nell'atterrare sul tappeto elastico, 3.0 m più in basso? (b) Se il tappeto elastico si comporta come una molla di costante elastica 6.2 * 10^4 N/m, di quanto si abbasserà?





Energia potenziale Elastica: $$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$$

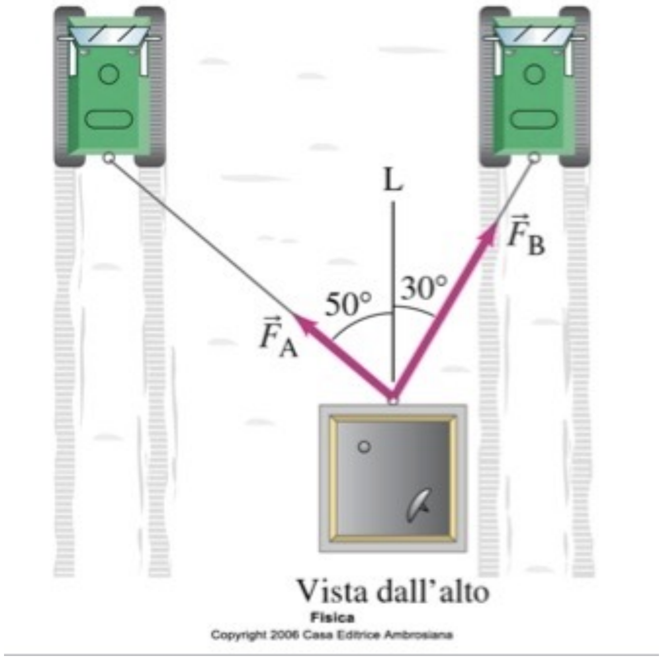
Conservazione energia: $$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_{fin}^2$$

$$x^2 = \frac{mv_{fin}^2}{k} \rightarrow x = \sqrt{\frac{65Kg\ (9.16\frac{m}{s})^2}{6.2\ 10^4\ N/m}} = 0.30m$$

Esercizi Dinamica

Esercizio 1
(a) Qual'è l'accelerazione di due paracadutisti in caduta libera (massa di 132 Kg, inclusi i paracadute) quando la forza diretta verso l'alto dovuta alla resistenza dell'aria è uguale a un quarto del loro peso? (b) Dopo aver aperto il paracadute, i due paracadutisti discendono tranquillamente verso il terreno a velocità costante. Qual'è ora la forza dovuta alla resistenza dell'aria sui paracadutisti e sui loro paracadute?

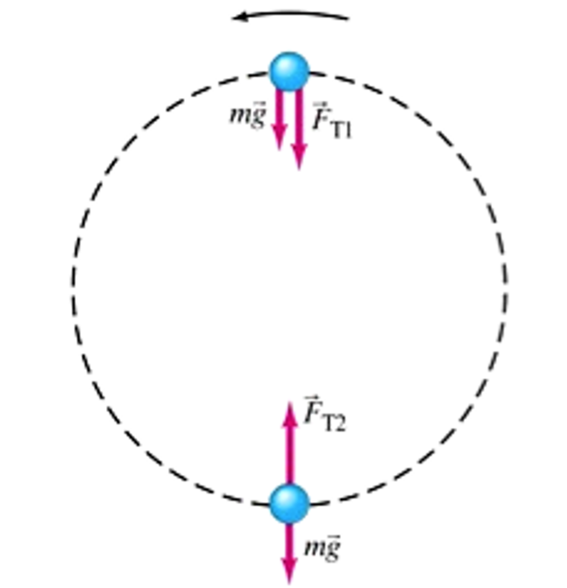
(a) -7.4m/s^2 (b) 1.29*10^{3}N

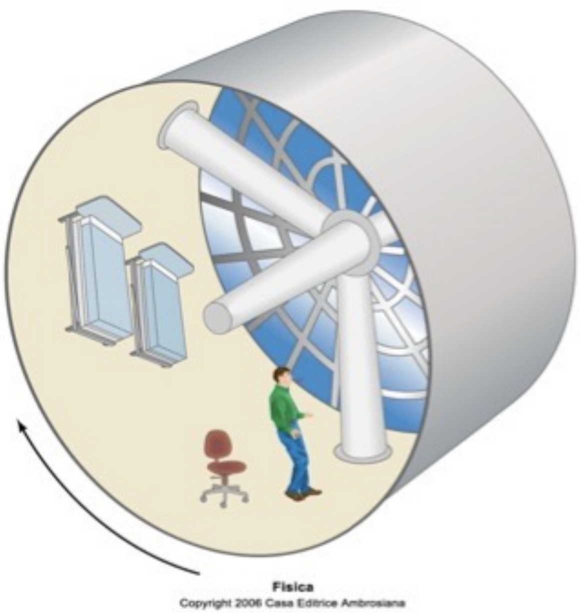


Esercizio 2
Due gatti delle nevi rimorchiano una unità di alloggiamento in una nuova località alla base McMurdo in Antartide, come mostrato in figura. La somma delle due forze $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ esercitate sull'unità dai cavi orizzontali è parallela alla linea L, e F_A=4500 N. Determinate F_B e il modulo di $\vec{F}_A + \vec{F}_B$.

(a) 6.9*10^{3}N (b) 8.9*10^{3}N

Esercizio 5
Una pallina, legata all'estremità di una corda, viene fatta roteare a velocità costante su una circonferenza verticale di raggio 72.0 cm, come mostrato in figura. Se la sua velocità è di 4.00 m/s e la sua massa è 0.300 Kg, calcolate la tensione della corda quando la palla si trova (a) nel punto più alto e (b) nel punto più basso del suo percorso.





Esercizio 6
Con che rapidità deve ruotare la nave spaziale cilindrica mostrata in figura afficnhè gli occupanti avvertano una gravità simulata pari a 0.60*g*? Assumete che la nave spaziale abbia diametro 32 m, e date la risposta in termini di tempo necessario per una rivoluzione.

Fisica

Esercizio 7
Tarzan pensa di superare una gola oscillando appeso a una liana, come mostrato in figura. Se le sue braccia sono in grado di esercitare una forza di 1400 N sulla fune, qual'è la massima velocità che può sopportare nel punto più basso della sua traiettoria? La sua massa è 80 Kg e la liana è lunga 5.5 m.

Esercizio 8
Un pianoforte da 330 Kg scivola verso il basso per 3.6 m lungo un piano inclinato di 28° e viene mantenuto a velocità costante da un uomo che lo frena spingendo indietro parallelamente al piano inclinato. Il coefficiente di attrito effettivo è 0.40. Calcolate: (a) la forza esercitata dall'uomo sul pianoforte; (b) il lavoro compiuto dall'uomo sul pianoforte; (c) il lavoro compiuto dalla forza di attrito; (d) il lavoro compiuto dalla forza di gravità; (e) il lavoro totale compiuto sul pianoforte.

Esercizio 9

Il carrello delle montagne russe mostrato nella figura qui accanto viene trasportato fino al punto 1, dove è abbandonato da fermo. Supponendo che non ci sia attrito, calcolate la velocità nei punti 2, 3 e 4.