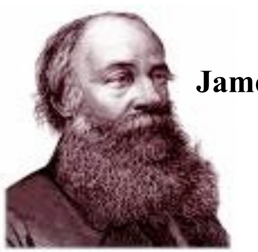
Lavoro ed Energia

Il Lavoro

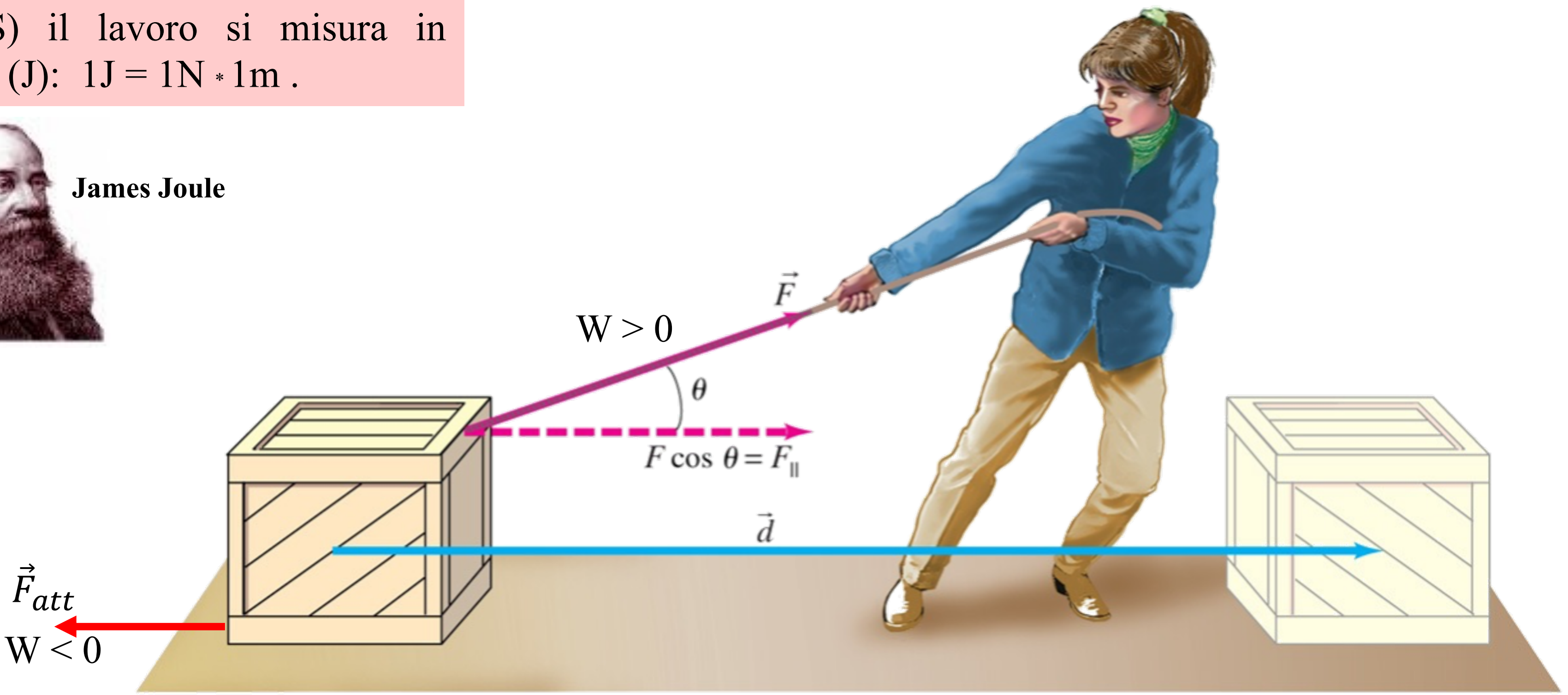
In Fisica il lavoro è dato dal **prodotto scalare dei vettori forza e spostamento.** Ne risulta che il lavoro può essere **positivo** (quando la forza è responsabile dello spostamento) oppure **negativo** (quando la forza si oppone allo spostamento), a seconda che **l'angolo θ tra forza e spostamento** sia acuto o ottuso:

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d}} \quad (W = Fd\cos\theta = F_{\parallel} d)$$

Nelle unità di misura del SI (MKS) il lavoro si misura in **Joule** (J): 1J = 1N * 1m .



James Joule



Lavoro ed Energia Cinetica

In particolare, quando un **oggetto in moto** urta su un altro oggetto (una palla di cannone contro un muro, un martello contro un chiodo, etc..), eserciterà su di esso una **forza** e ne provocherà un certo **spostamento**: così facendo esso mostra di essere in grado di **compiere lavoro proprio grazie al fatto che è in movimento**, e per questo diciamo che un oggetto in moto possiede una certa **energia cinetica**.

Abbiamo visto che se, per un corpo di massa m che si muove a velocità v, definiamo **energia cinetica traslazionale** la quantità:

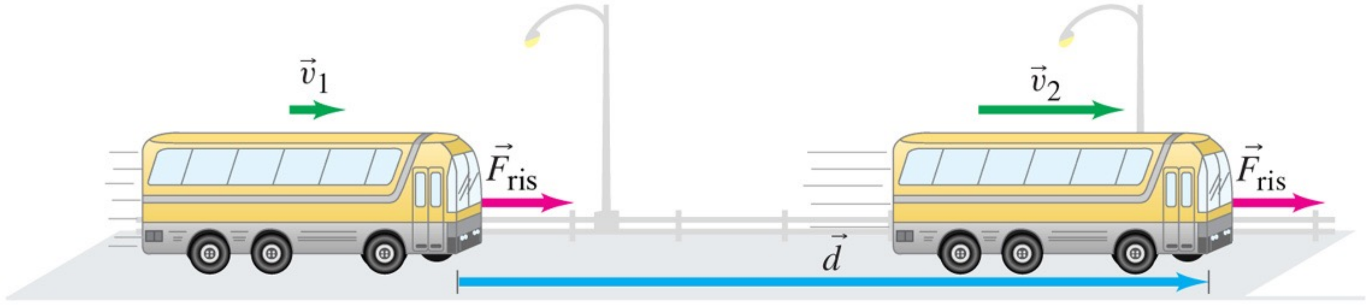
$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Nelle unità di misura del SI (MKS) anche l'energia cinetica si misura in **Joule** (J).

James Joule

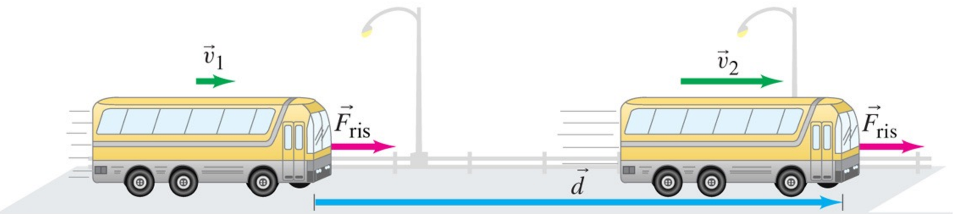
TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA: **il lavoro <u>totale</u> compiuto da una forza risultante non nulla sul corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo stesso:**

$$W_{tot} = K_2 - K_1 \;\; \rightarrow \;\; W_{tot} = \Delta K$$



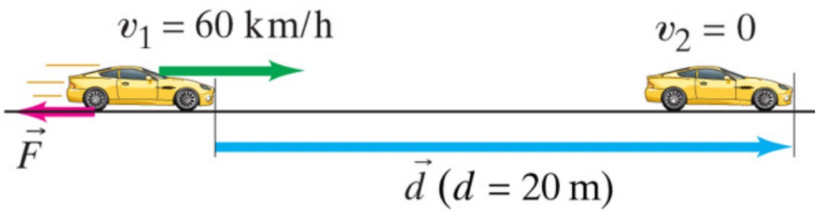
Lavoro come Energia in Transito

Abbiamo visto anche che possiamo considerare il lavoro come una forma di **energia in transito** da un oggetto ad un altro (un po’ come il denaro transita da un conto corrente ad un altro). Infatti un **lavoro totale positivo** su un oggetto fa **aumentare** la sua energia cinetica (proprio come un versamento di denaro fa aumentare il saldo di un conto corrente), mentre un **lavoro totale negativo** la fa **diminuire** (come un prelievo fa diminuire il saldo di un conto corrente). Se invece il lavoro totale su un oggetto è **nullo**, la sua energia cinetica resta **costante**, e quindi resta costante anche la sua velocità (se non ci sono prelievi o versamenti anche il saldo di un conto corrente resta costante…).



Lavoro, positivo, fatto dalla spinta del motore ≡ **Versamento di energia cinetica**

Prelievo di energia cinetica ≡ **Lavoro, negativo, fatto dalla forza di attrito dei freni**

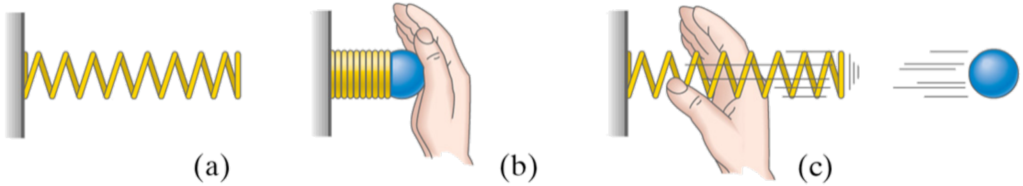


Energia Potenziale

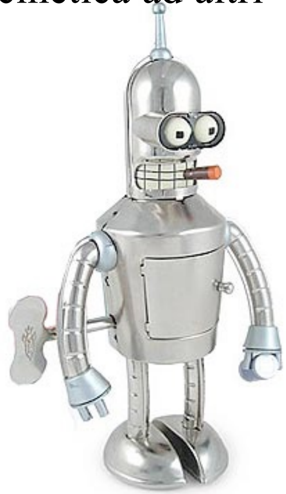
Per definizione l'**energia cinetica** posseduta da un corpo dipende esclusivamente dalla sua massa e dalla sua velocità, quindi essa **è presente in ogni corpo in movimento** a prescindere dall'esistenza o meno di altre forze che agiscono sul corpo stesso.

Esiste invece un'altra fondamentale forma di energia legata alla capacità di un corpo di compiere lavoro a causa della sua **configurazione** o della sua **posizione** all'interno di una regione di spazio in cui siano presenti delle **forze**: questa forma di energia si chiama **energia potenziale** la sua definizione varia a seconda del tipo di forza da cui essa trae origine.

Un tipico esempio di energia potenziale (legata alla configurazione) è quella associata ad una **molla compressa**: in questo caso, finchè la molla è tenuta in compressione (b), essa non si muove, quindi non possiede energia cinetica, ma è comunque **potenzialmente** in grado di compiere lavoro, come diventa chiaro non appena si lascia la molla libera di espandersi (c) e di trasmettere, grazie alla **forza elastica** (di cui parleremo più avanti), energia cinetica ad altri corpi eventualmente a contatto con essa.



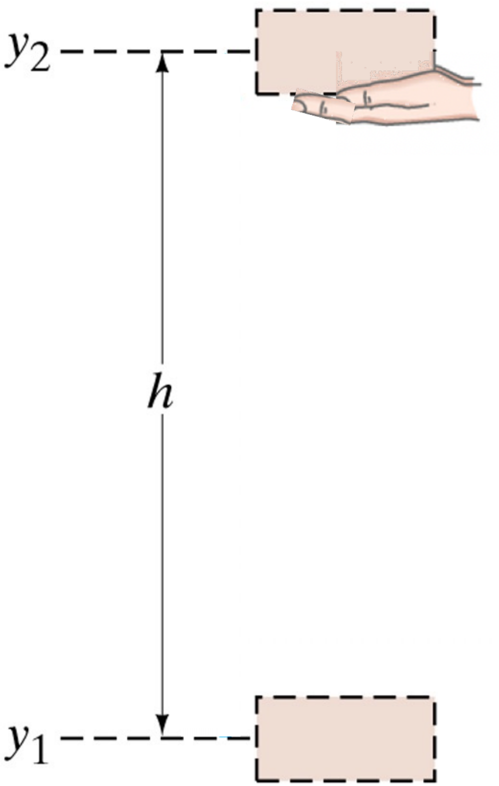
Ad esempio, **in un giocattolo a molla,** quest'ultima acquista la sua energia potenziale grazie al lavoro che viene compiuto su di essa da chi carica il giocattolo per mezzo della chiavetta. Dopodiché, quando la molla si rilassa, essa restituisce **l'energia potenziale immagazzinata** esercitando a sua volta una forza e compiendo così il lavoro necessario per far muovere il giocattolo.



Energia Potenziale Gravitazionale

L'esempio più comune di energia potenziale è però quello di **energia potenziale gravitazionale**, cioè di quell'energia potenziale associata all'azione della forza di gravità, o forza peso.

Se infatti consideriamo un **mattone** tenuto fermo dalla nostra mano ad una certa altezza h dal suolo, esso possiede evidentemente una certa **energia potenziale**, in quanto se lasciato libero di muoversi, esso cadrà verso il suolo acquisendo velocità e dunque energia cinetica, e potrà a sua volta **compiere lavoro** su un eventuale oggetto su cui cadrà (ad esempio su un picchetto, piantandolo nel terreno).



Fisica

Diversamente da quanto accadeva per la molla, in questo caso l'energia potenziale del mattone sospeso è dovuta alla sua **posizione rispetto alla Terra**, che esercita su di esso una attrazione gravitazionale.

Potremmo dunque **calcolare** l'energia potenziale gravitazionale del mattone indirettamente, attraverso una misura del lavoro minimo necessario a sollevarlo.

Energia Potenziale Gravitazionale

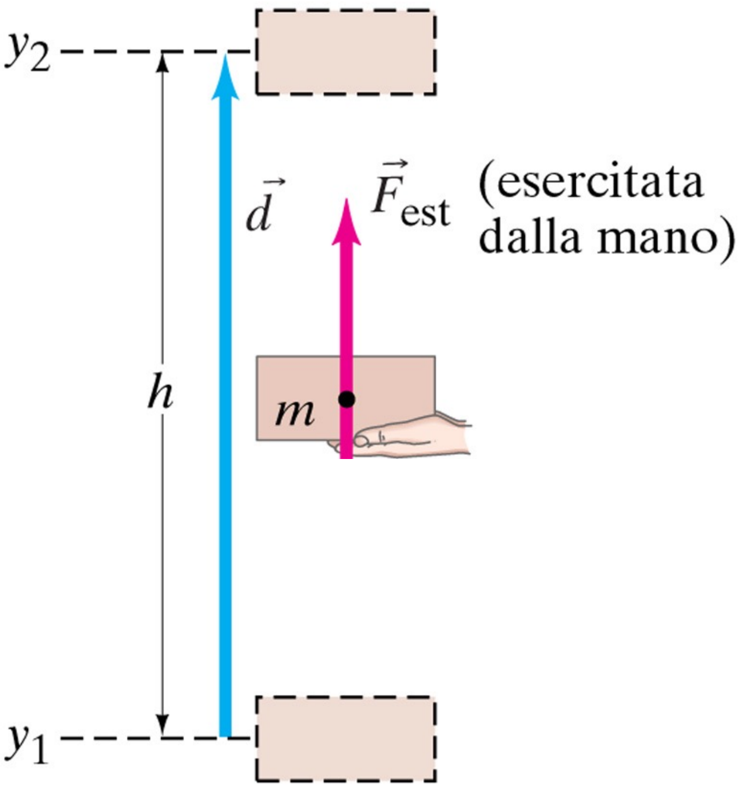
Assumiamo che la massa del mattone sia m e che esso sia prossimo alla superficie terrestre. E' evidente che per **sollevare** (a velocità costante, senza accelerarlo) il mattone dal suolo (posizione y_1) e portarlo ad una altezza h (posizione y_2), la nostra mano deve esercitare su di esso una **forza <u>costante</u> diretta verso l'alto** e di intensità esattamente uguale al suo peso (tranne che all'inizio e alla fine dello spostamento).

Così facendo, la nostra mano avrà compiuto un **lavoro positivo** pari al prodotto del modulo della **forza esterna** applicata, $F_{est}=mg$, per lo spostamento verticale $h=y_2-y_1$:

$$W_{est} = \vec{F}_{est} \cdot \vec{d} = F_{est} d \cos 0° = mgh = mg(y_2 - y_1)$$

Notare che, nel frattempo, anche la **forza di gravità** avrà agito sul mattone, compiendo su di esso un **lavoro negativo** (in quanto il suo verso si oppone allo spostamento):

$$W_G = \vec{F}_G \cdot \vec{d} = F_G d \cos 180° = -mgh = -mg(y_2 - y_1)$$



Energia Potenziale Gravitazionale

Se adesso **lasciamo cadere** il mattone da fermo dall'altezza *h* sotto l'azione della **gravità**, un attimo prima di toccare il suolo esso avrà acquistato (per la terza equazione del moto uniformemente accelerato) una **velocità** pari a:

$$v^2 = 0 - 2g(y_1 - y_2) = 2g(y_2 - y_1) = 2gh$$

e quindi una **energia cinetica**:

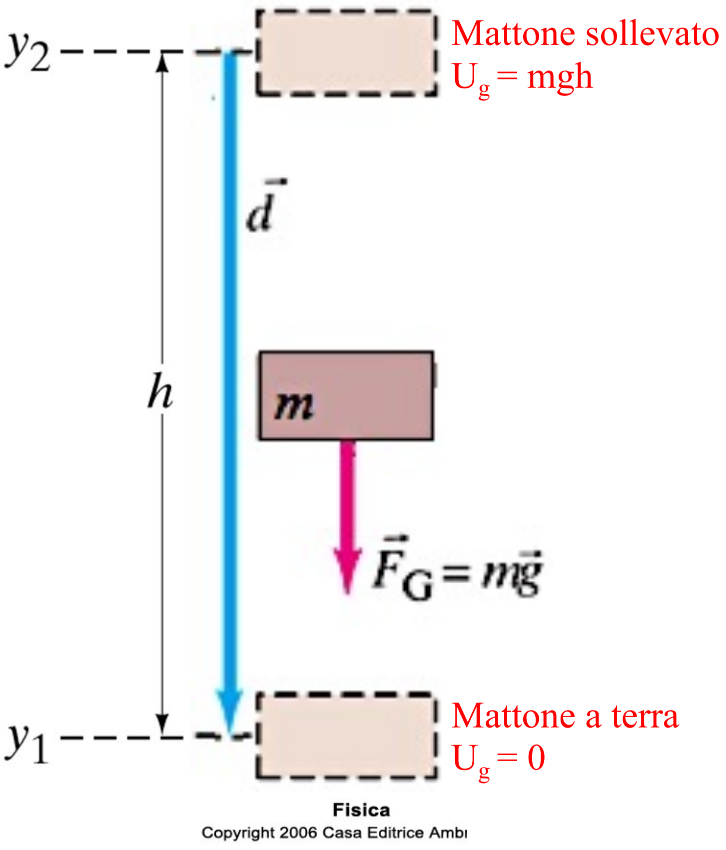
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2gh) = mgh$$

corrispondente alla sua capacità di compiere **lavoro**.

Quindi ***il lavoro speso per sollevare il mattone, mgh, è esattamente uguale al lavoro che, grazie alla forza peso, esso diventa in grado di effettuare (per il teorema dell'energia cinetica) in virtù della sua nuova posizione rispetto alla Terra.***

In generale, definiamo allora **l'energia potenziale gravitazionale U_g** di un oggetto, dovuta alla gravità della Terra, come il prodotto del suo peso *mg* per la sua quota h (o, più in generale, *y*) al di sopra di una quota di riferimento (ad esempio il terreno):

$$U_g = mgh$$



Esercizio

Un vagoncino delle montagne russe di massa 1000kg si muove dal punto 1 (vedi figura) al punto 2 e quindi al punto 3. Considerando il sistema vagoncino-Terra e fissando l'asse y con il verso positivo rivolto verso l'alto, rispondere alle seguenti domande:

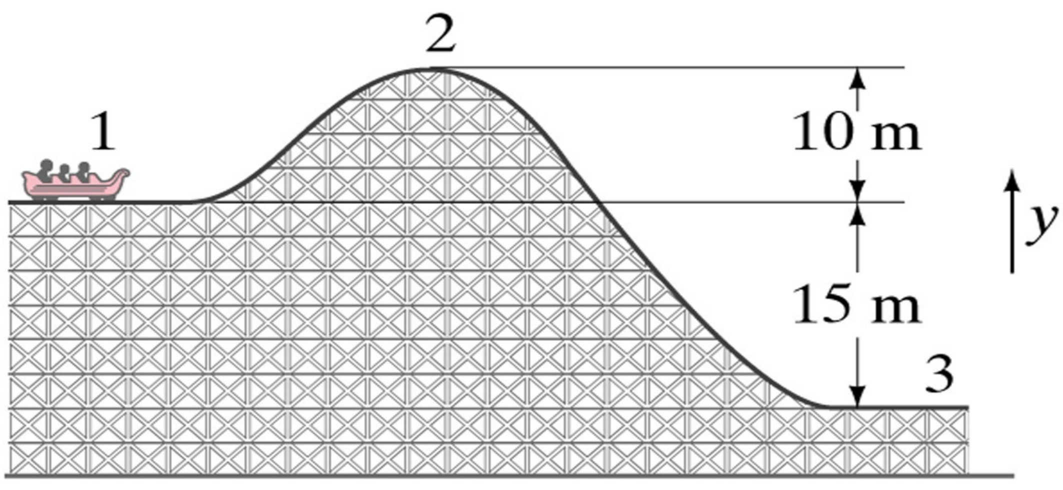
(a) Qual'è l'energia potenziale gravitazionale nei punti 2 e 3 relativamente al punto 1? (in altre parole, bisogna considerare y=0 nel punto 1)

(a) Poichè misuriamo l'energia potenziale gravitazionale rispetto al punto 1 (con y_1=0), l'energia potenziale iniziale sarà uguale a zero. Nel punto 2, invece, essendo y_2=10 m, si avrà:

$$U_2 = mgy_2 = (1000kg)(9.8m/s^2)(10m) = 9.8 \cdot 10^4 J$$

Nel punto 3, y_3= –15m, e quindi si avrà:

$$U_3 = mgy_3 = (1000kg)(9.8m/s^2)(-15m) = -1.5 \cdot 10^5 J$$



Esercizio

Un vagoncino delle montagne russe di massa 1000kg si muove dal punto 1 (vedi figura) al punto 2 e quindi al punto 3. Considerando il sistema vagoncino-Terra e fissando l'asse y con il verso positivo rivolto verso l'alto, rispondere alle seguenti domande:

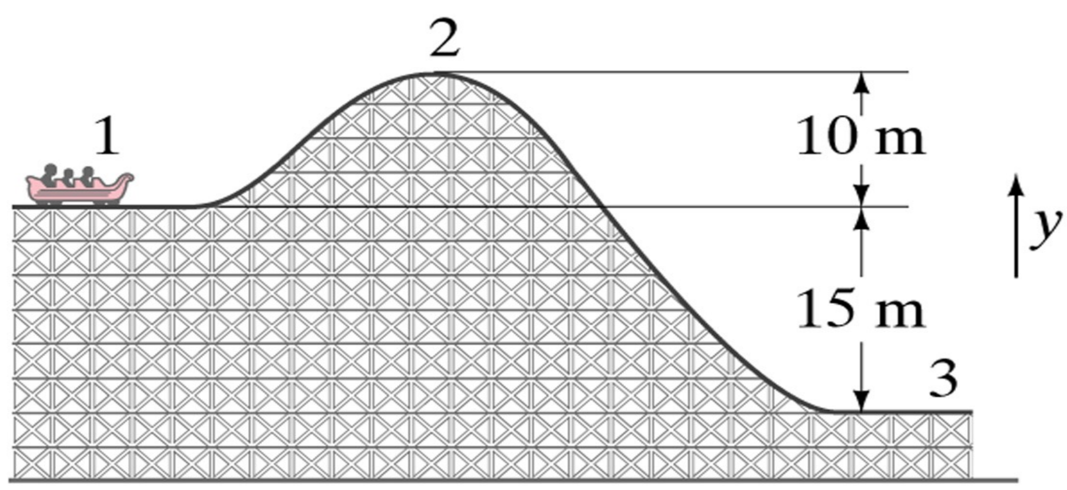
(a) Qual'è l'energia potenziale gravitazionale nei punti 2 e 3 relativamente al punto 1? (in altre parole, bisogna considerare y=0 nel punto 1)

(b) Qual'è la variazione di energia potenziale quando il vagoncino si sposta da 2 a 3?

$$U_2 = mgy_2 = (1000kg)(9.8m/s^2)(10m) = 9.8 \cdot 10^4 J$$

$$\downarrow$$

$$U_3 = mgy_3 = (1000kg)(9.8m/s^2)(-15m) = -1.5 \cdot 10^5 J$$



Esercizio

Un vagoncino delle montagne russe di massa 1000kg si muove dal punto 1 (vedi figura) al punto 2 e quindi al punto 3. Considerando il sistema vagoncino-Terra e fissando l'asse y con il verso positivo rivolto verso l'alto, rispondere alle seguenti domande:

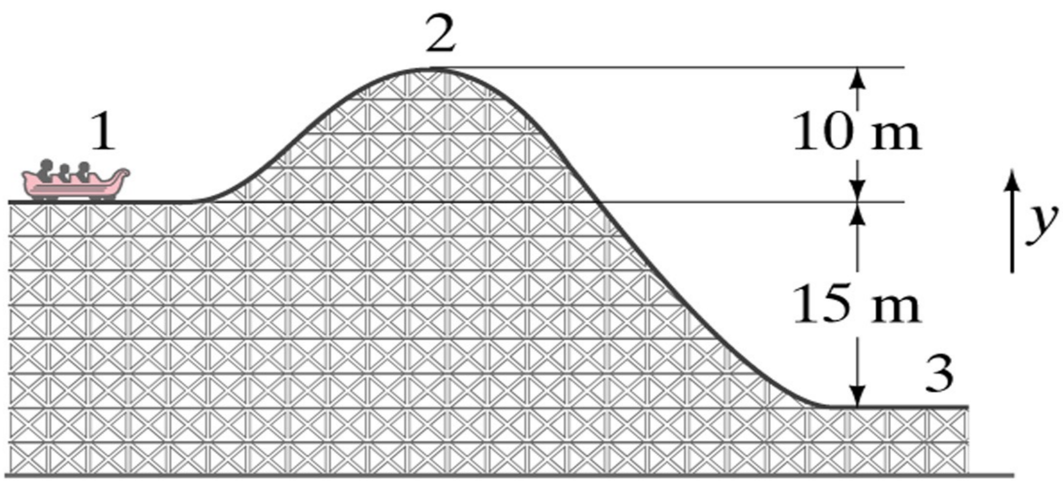
(a) Qual'è l'energia potenziale gravitazionale nei punti 2 e 3 relativamente al punto 1? (in altre parole, bisogna considerare y=0 nel punto 1)

(b) Qual'è la variazione di energia potenziale quando il vagoncino si sposta da 2 a 3?

(b) Muovendosi da 2 a 3 la variazione di energia potenziale ($Ug_{finale} - Ug_{iniziale}$) sarà:

$$U_3 - U_2 = (-1.5 \cdot 10^5 J) - (9.8 \cdot 10^4 J) = -2.5 \cdot 10^5 J$$

quindi l'energia potenziale gravitazionale del sistema diminuisce quando il vagoncino scende lungo il pendio, come in effetti ci si aspettava.



Esercizio

Un vagoncino delle montagne russe di massa 1000kg si muove dal punto 1 (vedi figura) al punto 2 e quindi al punto 3. Considerando il sistema vagoncino-Terra e fissando l'asse y con il verso positivo rivolto verso l'alto, rispondere alle seguenti domande:

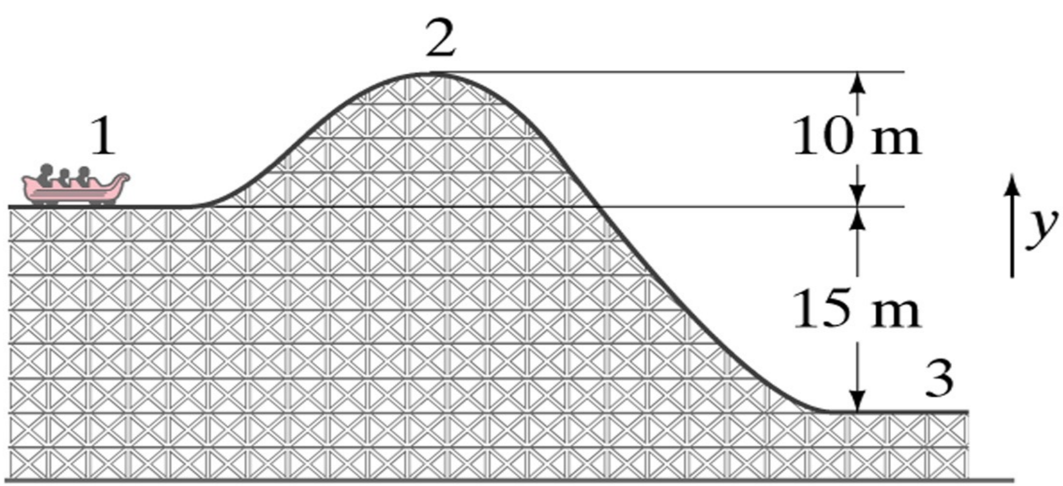
(a) Qual'è l'energia potenziale gravitazionale nei punti 2 e 3 relativamente al punto 1? (in altre parole, bisogna considerare y=0 nel punto 1;

(b) Qual'è la variazione di energia potenziale quando il vagoncino si sposta da 2 a 3?

(c) Ripetere le parti (a) e (b) considerando però il punto 3 come riferimento (y=0).

(c) In questo caso avremo y_1=+15m e y_2=25m, mentre y_3=0. Quindi sarà:

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = mgy_1 = (1000kg)(9.8m/s^2)(15m) = 1.5\cdot 10^5 J \\ U_2 = mgy_2 = (1000kg)(9.8m/s^2)(25m) = 2.5\cdot 10^5 J \\ U_3 = 0 \end{array}\right\} U_3 - U_2 = 0 - (2.5\cdot 10^5 J) = -2.5\cdot 10^5 J$$



Esercizio

Un vagoncino delle montagne russe di massa 1000kg si muove dal punto 1 (vedi figura) al punto 2 e quindi al punto 3. Considerando il sistema vagoncino-Terra e fissando l'asse y con il verso positivo rivolto verso l'alto, rispondere alle seguenti domande:

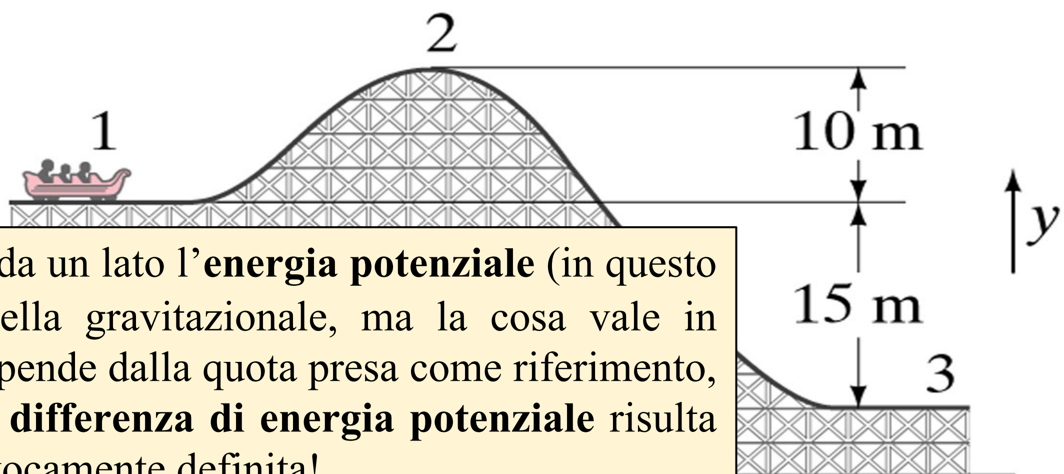
(a) Qual'è l'energia potenziale gravitazionale nei punti 2 e 3 relativamente al punto 1? (in altre parole, bisogna considerare y=0 nel punto 1;

(b) Qual'è la variazione di energia potenziale quando il vagoncino si sposta da 2 a 3?

(c) Ripetere le parti (a) e (b) considerando però il punto 3 come riferimento (y=0).

(c) In questo caso avremo y_1=+15m e y_2=25m, mentre y_3=0. Quindi sarà:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= mgy_1 = (1000kg)(9.8m/s^2)(15m) = 1.5\cdot10^5 J \\ U_2 &= mgy_2 = (1000kg)(9.8m/s^2)(25m) = 2.5\cdot10^5 J \\ U_3 &= 0 \end{aligned}\right\} U_3 - U_2 = 0 - (2.5\cdot10^5 J) = -2.5\cdot10^5 J$$



Dunque, se da un lato l'**energia potenziale** (in questo esempio quella gravitazionale, ma la cosa vale in generale) dipende dalla quota presa come riferimento, dall'altro la **differenza di energia potenziale** risulta sempre univocamente definita!

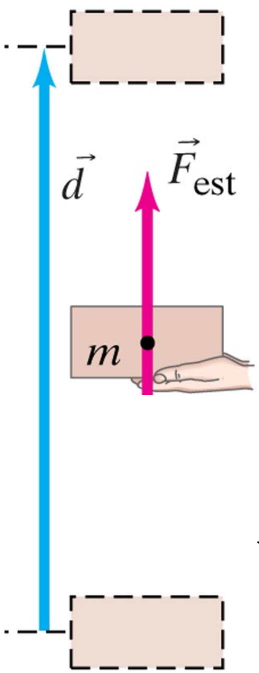
YouTube IT https://www.youtube.com/watch?v=ftYWV6cIsDU

L’energia potenziale

Lavoro ed Energia Potenziale Gravitazionale

Ancora una volta, se consideriamo il lavoro come una forma di **energia in transito** da un oggetto ad un altro, possiamo utilizzare la metafora del conto corrente. Infatti mentre **il lavoro compiuto su un oggetto <u>da una forza esterna</u> contro la forza peso**, **fa aumentare la sua energia potenziale gravitazionale** – proprio come un **versamento** di denaro fa aumentare il saldo del conto corrente –, il **lavoro compiuto sul corpo <u>dalla forza gravitazionale</u>** (a cui l'energia potenziale fa riferimento) fa **diminuire** l'energia potenziale**,** proprio come un **prelievo** fa diminuire il saldo del conto corrente.

Lavoro, positivo, fatto dalla forza esterna



(esercitata dalla mano)

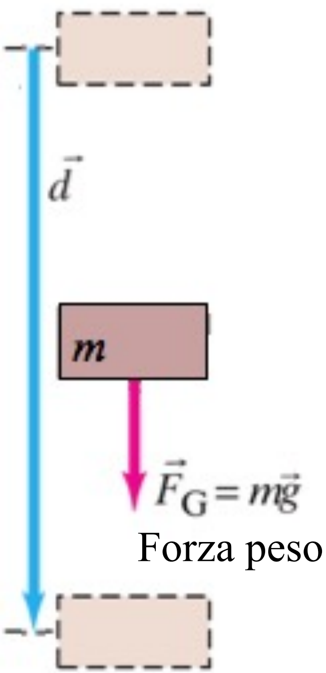
Versamento di energia potenziale
$\boldsymbol{\Delta U_g > 0}$

Prelievo di energia potenziale
$\boldsymbol{\Delta U_g < 0}$

$$W_{ext} = \Delta U_g > 0$$

$$W_g = -\Delta U_g > 0$$

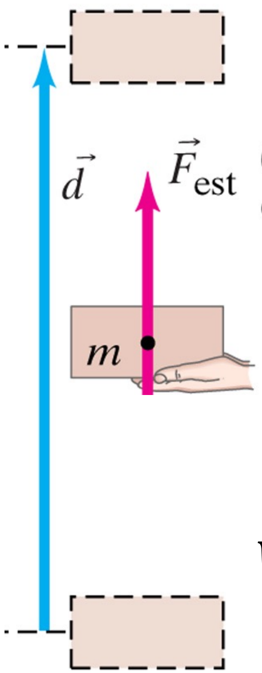
Lavoro, positivo, fatto dalla forza peso



Lavoro ed Energia Potenziale Gravitazionale

Se poi consideriamo che mentre il corpo cade sotto l'effetto della forza peso la sua **energia cinetica aumenta**, possiamo modificare ancora la **metafora del conto corrente** immaginando che il prelievo di energia, rappresentato dal lavoro della forza gravitazionale, avvenga **sotto forma di un assegno** (energia potenziale), che può essere scambiato e trasformato in **denaro liquido** (energia cinetica) dal corpo e dunque effettivamente utilizzato per altri scopi (grazie alla energia cinetica acquisita il corpo diventa infatti in grado di **compiere a sua volta lavoro** su altri corpi!)

Lavoro, positivo, fatto dalla forza esterna



(esercitata dalla mano)

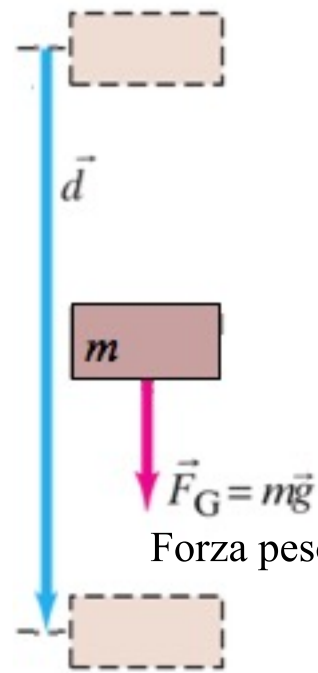
$$W_g = \Delta K > 0$$

Trasformazione in energia cinetica

Lavoro, positivo, fatto dalla forza peso

Versamento di energia potenziale
$\boldsymbol{\Delta U_g > 0}$

Prelievo di energia potenziale
$\boldsymbol{\Delta U_g < 0}$



Forza peso

$$W_{ext} = \Delta U_g > 0$$

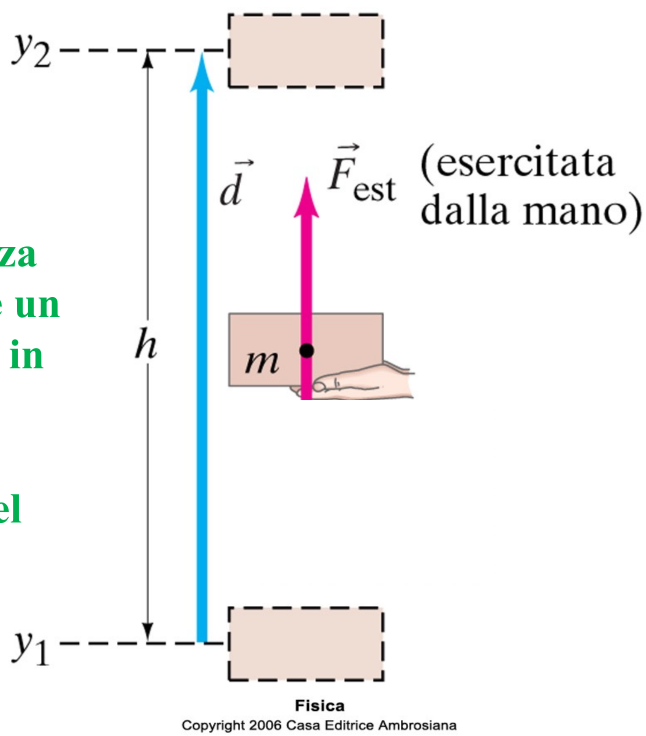
$$W_g = -\Delta U_g > 0$$

Lavoro ed Energia Potenziale Gravitazionale

Nell'esempio di sollevamento del mattone, se consideriamo il **processo complessivo di sollevamento e caduta dell'oggetto**, notiamo una particolarità: mentre la **forza esterna** compie un lavoro complessivamente positivo (visto che non è responsabile del processo di caduta ma solo di quello di salita)…

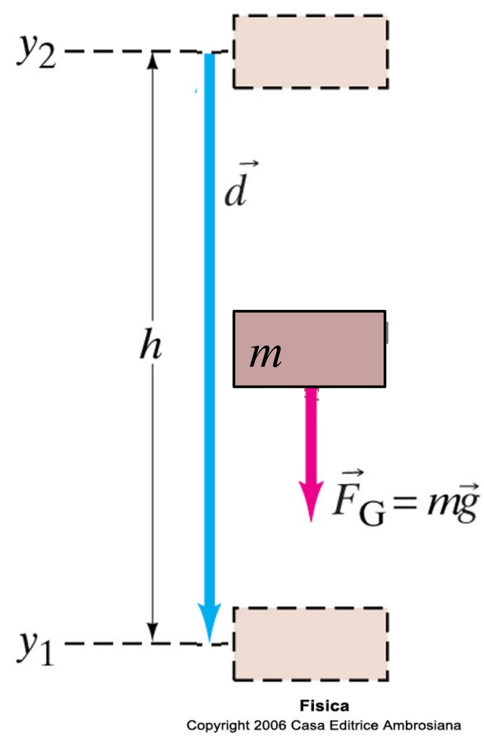
$$W_{ext} > 0$$

Quando il mattone viene sollevato la forza esterna compie un lavoro positivo in quanto è lei a causare lo spostamento del corpo



$$W_{ext} = 0$$

$$W_{TOT} > 0$$



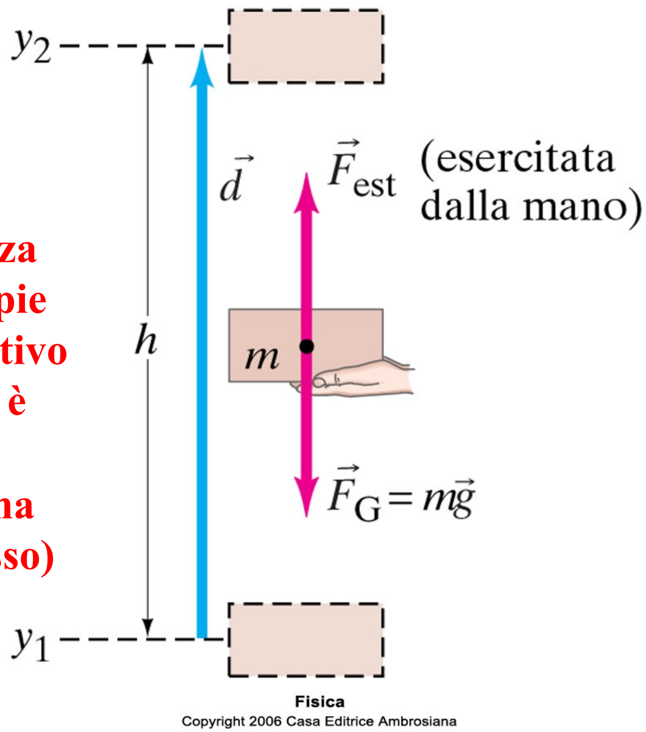
Quando il mattone ricade a terra, la forza esterna compie un lavoro nullo, in quanto non è applicata. Infatti è la forza peso a produrre lo spostamento del corpo. In totale, quindi, la forza esterna compie un lavoro positivo!

Lavoro ed Energia Potenziale Gravitazionale

Nell'esempio di sollevamento del mattone, se consideriamo il **processo complessivo di sollevamento e caduta dell'oggetto**, notiamo una particolarità: mentre la **forza esterna** compie un lavoro complessivamente positivo (visto che non è responsabile del processo di caduta ma solo di quello di salita)... **la forza di gravità compie un lavoro complessivamente nullo**, in quanto è negativo durante la salita (e pari a – *mgh*) e positivo durante la discesa (e pari a *mgh*).

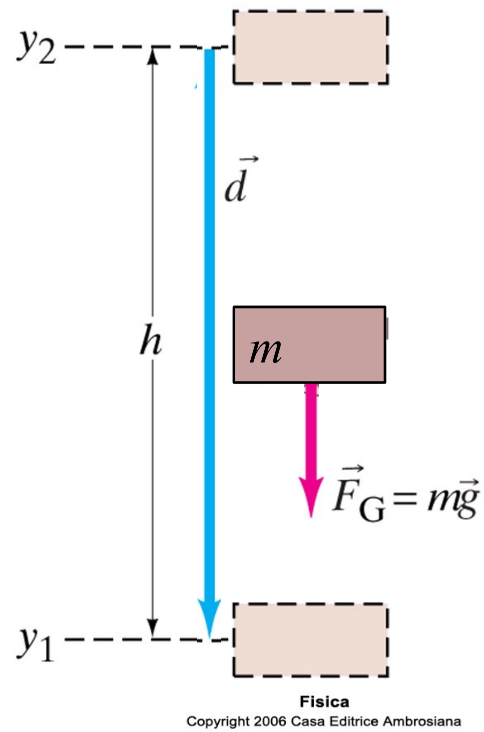
$W_g < 0$

Quando il mattone viene sollevato la forza di gravità compie un lavoro negativo (in quanto non è lei a causare lo spostamento, ma si oppone ad esso)



$W_g > 0$

$W_{TOT} = 0$

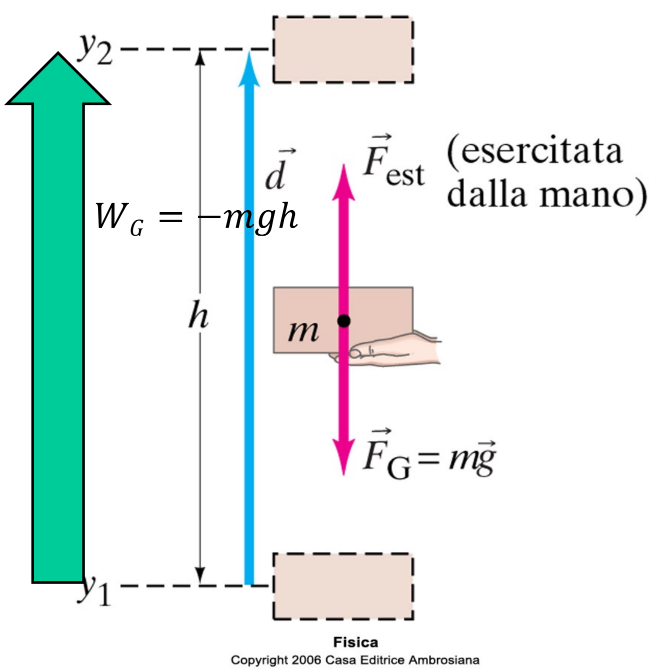


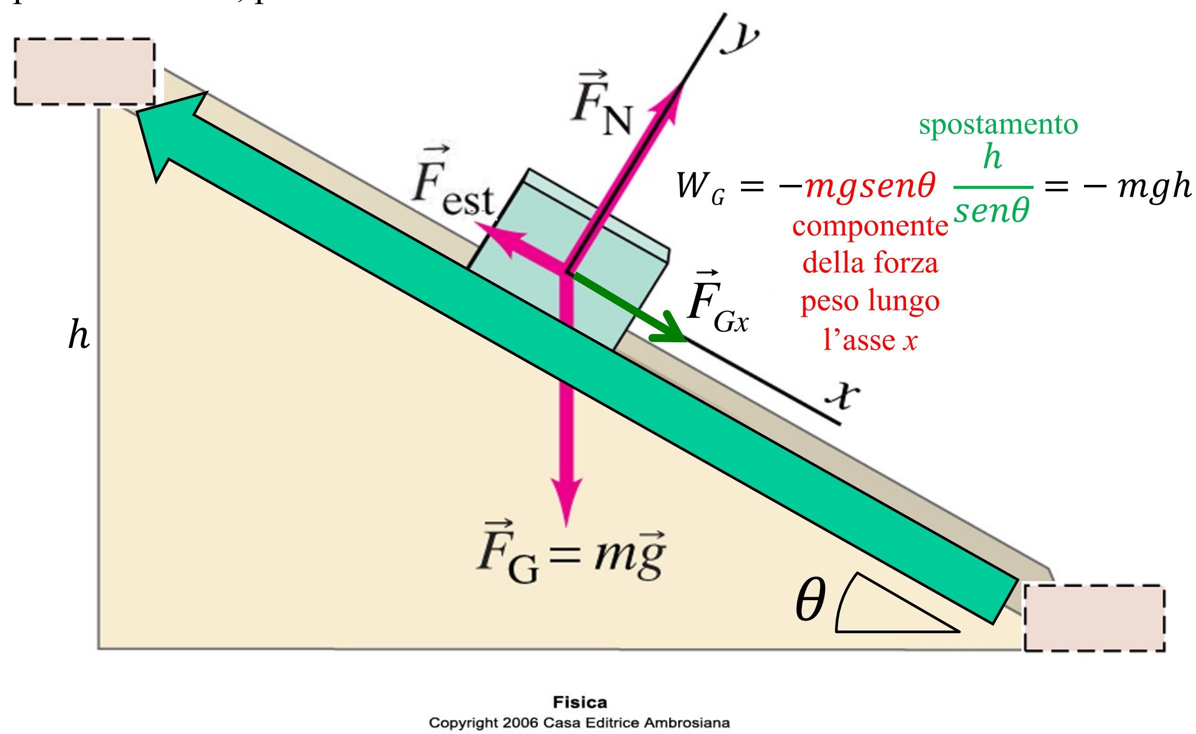
Quando il mattone ricade a terra, la forza di gravità compie lo stesso lavoro di prima, ma positivo (stavolta infatti è lei a causare lo spostamento). In totale, quindi, il lavoro compiuto dalla forza di gravità è nullo!

Lavoro delle Forze Conservative

Questa particolarità ci spiega perché sia possibile introdurre il concetto di **energia potenziale** SOLO in riferimento a certi particolari tipi di forze, come ad esempio quella gravitazionale: il motivo è che queste forze devono essere "**conservative**". In generale, si definiscono conservative quelle forze **il cui lavoro compiuto su un oggetto non dipende dal percorso seguito dall'oggetto, ma solo dalle sue posizioni finale e iniziale**, posizioni che del resto – come abbiamo visto – sono le uniche che servono per calcolare la differenza di energia potenziale ΔU.

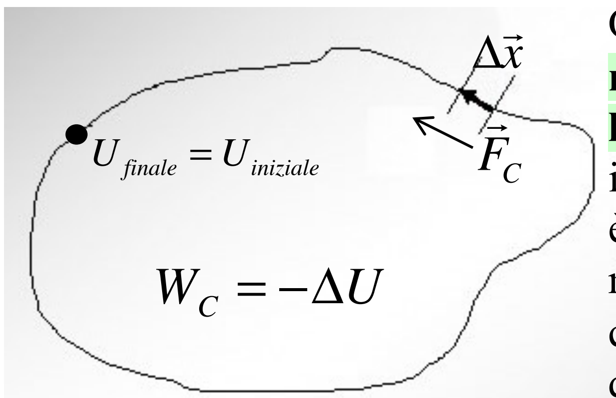
Es: Il lavoro fatto dalla forza di gravità ($W_G = -W_{ext} = -\Delta U = -mgh$) è lo stesso sia quando un oggetto di massa *m* viene sollevato *verticalmente* ad una certa altezza *h,* sia quando l'oggetto viene sollevato *obliquamente* lungo un piano inclinato, purché il dislivello *h* sia lo stesso:





Lavoro delle Forze Conservative

Questa particolarità ci spiega perché sia possibile introdurre il concetto di **energia potenziale** SOLO in riferimento a certi particolari tipi di forze, come ad esempio quella gravitazionale: il motivo è che queste forze devono essere "**conservative**". In generale, si definiscono conservative quelle forze **il cui lavoro compiuto su un oggetto non dipende dal percorso seguito dall'oggetto, ma solo dalle sue posizioni finale e iniziale**, posizioni che del resto – come abbiamo visto – sono le uniche che servono per calcolare la differenza di energia potenziale ΔU.



Questa importante proprietà implica che **le forze conservative non compiono alcun lavoro quando spostano un oggetto lungo un percorso chiuso**, in quanto in tal caso le posizioni iniziale e finale coincidono e la differenza di energia potenziale è nulla (come appunto nell'esempio dell'azione della $\vec{F}_G$ sul mattone). Se quindi consideriamo una qualunque forza conservativa $\vec{F}_C$, anche variabile lungo il percorso, e dividiamo quest'ultimo in piccoli trattini $\Delta\vec{x}$ nei quali essa è pressoché costante, avremo che il **lavoro totale** compiuto dalla forza, che è uguale alla sommatoria dei lavori parziali, sarà:

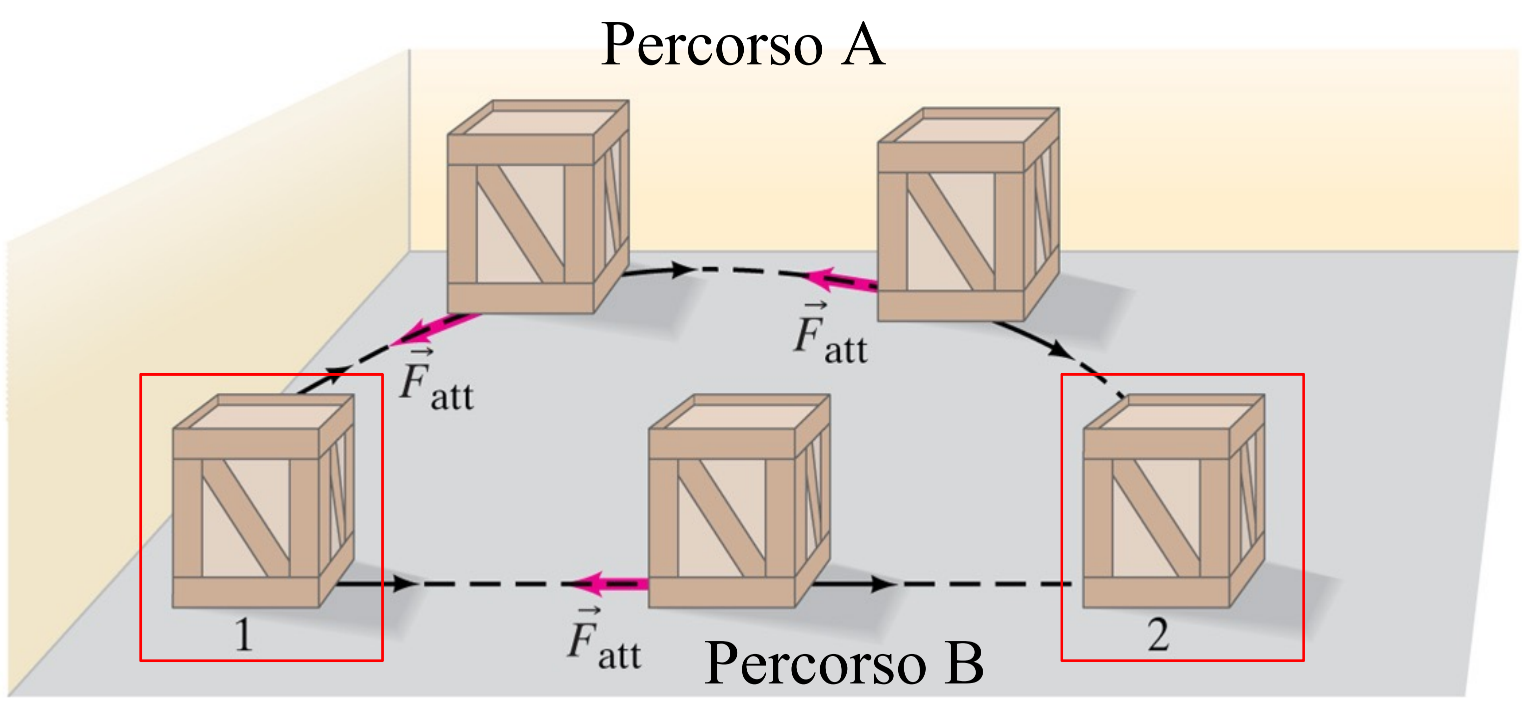
$$W_C = \sum \vec{F}_C \cdot \Delta\vec{x} = -\Delta U = 0 \quad essendo \;\; U_{finale} = U_{iniziale}$$

Se poi facciamo tendere gli spostamenti Δx a zero, la sommatoria si trasformerà nel cosiddetto **integrale di linea** calcolato lungo il percorso chiuso che, per **forze conservative**, è dunque nullo:

$$W_C = \sum \vec{F}_C \cdot \Delta\vec{x} = 0 \quad \xrightarrow{\Delta\vec{x}\to 0} \quad W_C = \oint \vec{F}_C \cdot d\vec{x} = 0$$

Lavoro delle Forze NON Conservative

Invece, forze come la forza di **attrito** (ma anche la resistenza dell'aria, la propulsione di un motore, la tensione di una corda o una persona che spinge un oggetto), sono **non conservative**, perché **il lavoro che esse compiono dipende dal percorso e non solo dalla posizione iniziale e finale**. Se ad esempio una cassa viene spinta sul pavimento dalla posizione 1 alla posizione 2 lungo due percorsi di lunghezza diversa, essendo la forza di attrito (di modulo costante) sempre ***opposta*** alla direzione del moto, il lavoro da essa compiuto $W_{att} = - F_{att}\, d$ sarà proporzionale alla lunghezza d del percorso e dunque sarà diverso nei due casi. E anche nel caso di un percorso chiuso W_{att} sarà ancora una volta proporzionale a d e dunque diverso da zero.



Conservazione dell'Energia Meccanica Totale

Supponiamo adesso che su un oggetto in moto traslazionale agiscano diverse forze, alcune **conservative** e altre **non conservative**. Il lavoro totale W_{tot} si potrà dunque scrivere come somma del lavoro compiuto dalle forze conservative, W_C, e di quello compiuto dalle forze non conservative, W_{NC}:

$$W_{tot} = W_C + W_{NC}$$

Per il **teorema dell'energia cinetica** sappiamo che $W_{tot} = \Delta K$ e quindi anche $W_C + W_{NC} = \Delta K$, cioè:

$$W_{NC} = \Delta K - W_C$$

Ma il lavoro delle forze conservative può essere scritto come **differenza di energia potenziale** cambiata di segno $W_C = -\Delta U$ e quindi:

$$W_{NC} = \Delta K + \Delta U$$

cioè ***il lavoro delle forze non conservative agenti su un oggetto è uguale alla variazione totale di energia cinetica e potenziale dell'oggetto stesso***.

Se, infine, sul sistema agiscono **solo forze conservative**, come ad esempio quella gravitazionale, si avrà $W_{NC} = 0$, e quindi:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad \rightarrow \quad (K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = 0 \quad \rightarrow \quad K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$

e se definiamo la quantità **E = K + U** come '**energia meccanica totale**' del sistema, otterremo un risultato di fondamentale importanza, e cioè:

$$E_2 = E_1 = \text{costante!}$$

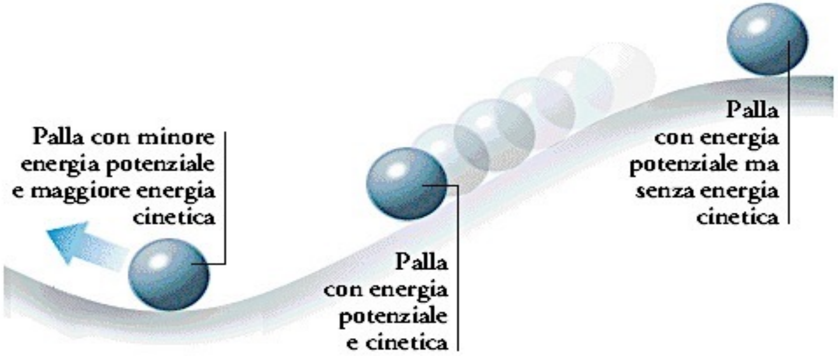
Principio di Conservazione dell’Energia Meccanica Totale

Il risultato appena trovato è chiamato “**Principio di conservazione dell’energia meccanica totale**” e può essere enunciato più precisamente nel seguente modo:

Quando in un sistema isolato agiscono solo forze conservative, l’energia cinetica e l’energia potenziale prese singolarmente possono variare, ma la loro somma, cioè l’energia meccanica totale del sistema, non cambia ma si mantiene costante nel tempo:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \quad \rightarrow \quad E = \text{ costante}$$

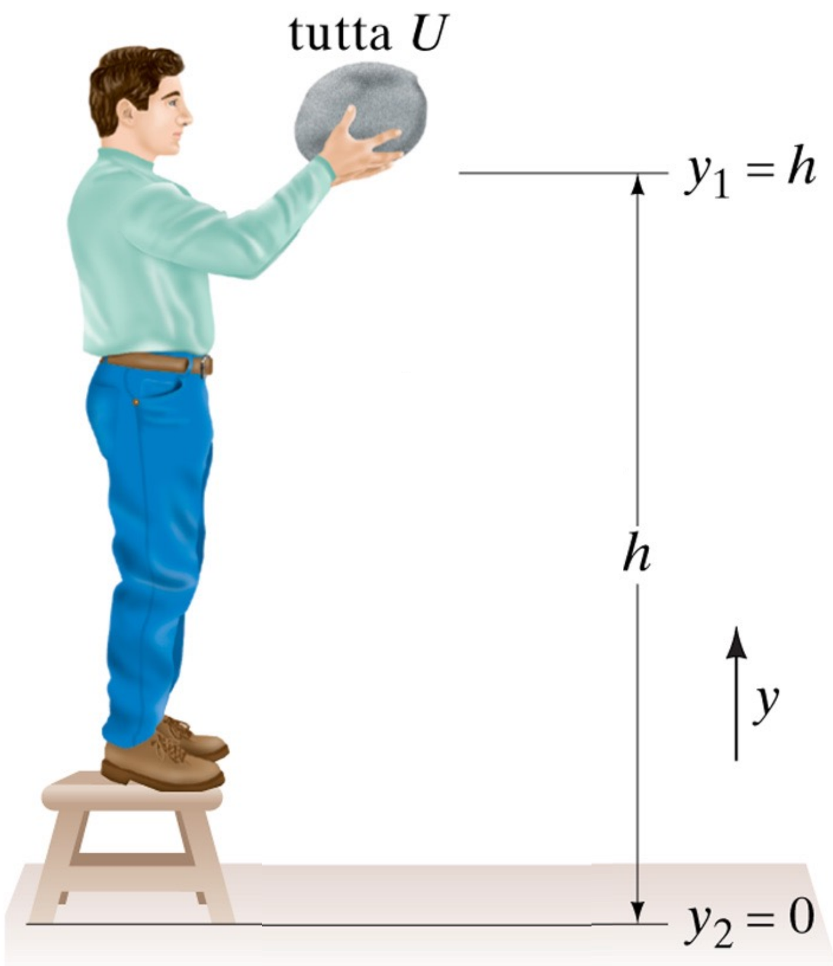
Poichè dunque per forze conservative l’energia meccanica totale E si conserva, ed essa è la somma di energia cinetica e potenziale, ne segue che, **se in un sistema isolato l’energia cinetica aumenta, quella potenziale deve diminuire, e viceversa,** in modo che K+U sia costante.



Il principio di conservazione dell’energia è molto **utile** in quanto permette di risolvere facilmente problemi che sarebbe molto più difficile risolvere usando solo le leggi di Newton. Infatti, quando l’energia meccanica totale si conserva, il fatto di poter mettere in relazione il totale dell’energia cinetica e dell’energia potenziale calcolato in un istante con quello calcolato in un altro istante, **elimina la necessità di dover considerare tutti gli stati intermedi e di conoscere il lavoro compiuto da tutte le forze coinvolte.**

Esempio 1: Pietre che cadono

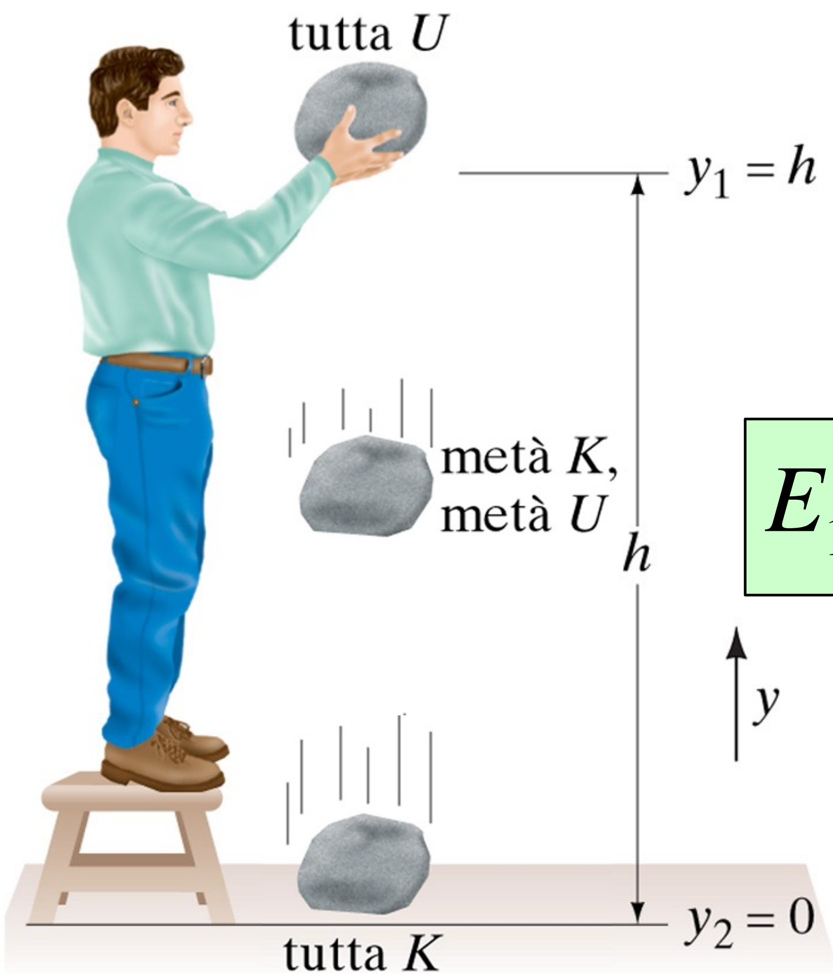
Un semplice **esempio di conservazione dell'energia meccanica** è dato da una pietra che viene lasciata cadere da un'altezza *h* sotto l'azione della gravità:



$$\rightarrow E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2} m v_1^{\ 2} + m g y_1 = 0 + m g y_1$$

Esempio 1: Pietre che cadono

Un semplice **esempio di conservazione dell'energia meccanica** è dato da una pietra che viene lasciata cadere da un'altezza *h* sotto l'azione della gravità:



$$\rightarrow E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv_1^{\,2} + mgy_1 = 0 + mgy_1$$

$$\boxed{E_1 = E_2 = E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy}$$

$$\rightarrow E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} + mgy_2 = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} + 0$$

Esempio 1: Pietre che cadono

Se l'altezza da cui cade la pietra è y_1=h=3.0 m, il **principio di conservazione dell'energia** permette di calcolare facilmente la sua velocità quando arriva ad un'altezza di 1.0 m dal suolo, *anche se non si conoscono le equazioni della cinematica*.

Al momento del rilascio la pietra è ferma nella posizione y_1=h=3.0 m, quindi v_1=0. Per trovare la velocità v_2 che la pietra ha quando si trova nella posizione y_2=1.0 m, basta imporre l'uguaglianza dell'energia totale nelle due posizioni:

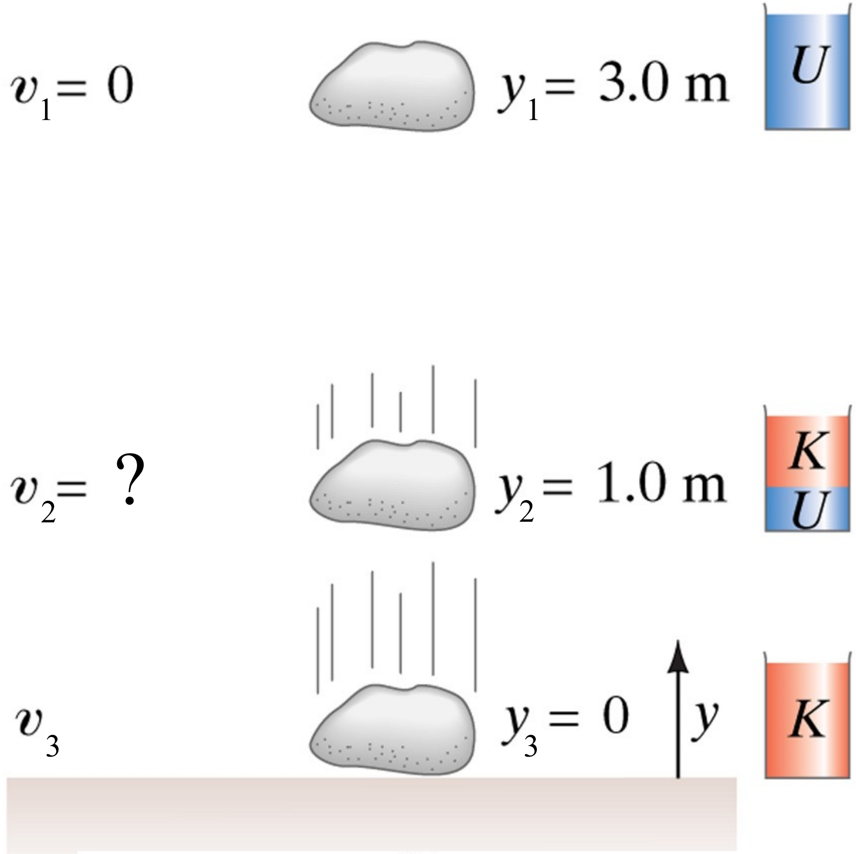
$$\frac{1}{2}mv_1^{\ 2} + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2} + mgy_2$$

da cui, considerando che la massa m si semplifica e che v_1=0, avremo immediatamente, risolvendo rispetto a v_2:

$$v_2^{\ 2} = 2g(y_1 - y_2) =$$

$$= 2(9.8m/s^2)[(3.0m)-(1.0m)] = 39.2m^2/s^2$$

$$\rightarrow \quad v_2 = \sqrt{39.2m^2/s^2} = 6.3m/s$$



Fisica

P.S. Si noti che l'equazione appena trovata non è altro che l'equazione 3 della cinematica del moto uniformemente accelerato!

Esempio 2: Bambini che scivolano

A volte l'utilizzo del principio di conservazione dell'energia non è solo una via alternativa a quella cinematica ma è l'unica possibile. Consideriamo ad esempio una **bambina** di massa m che, partendo da ferma (v_1=0), si lanci lungo uno **scivolo a spirale** da un'altezza y_1=h=8.5m sopra il livello della piscina, e chiediamoci con quale velocità v_2 arriverà in acqua. Supponiamo che lo scivolo, su cui scorre continuamente dell'acqua, sia **privo di attrito**.

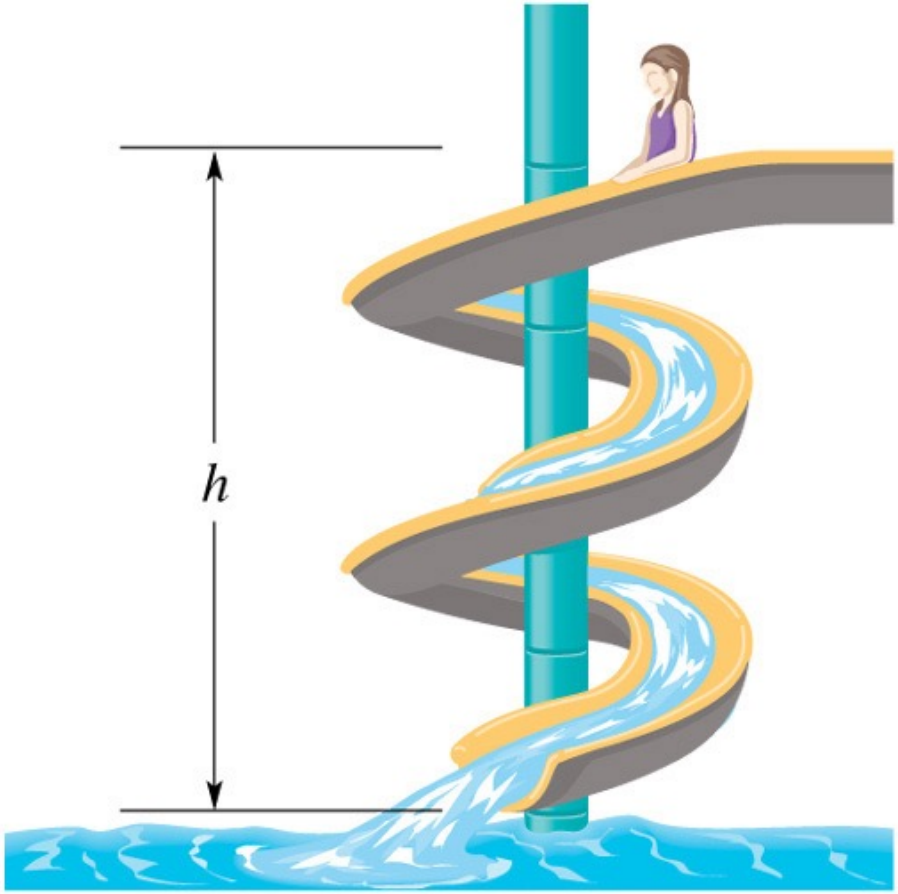
Non conoscendo la **pendenza** dello scivolo, e vista la sua **forma** a spirale 3D, non possiamo usare le equazioni della cinematica del moto unif. accelerato in 1D, quindi il problema sembrerebbe molto complicato…

Dato però che la **forza normale**, essendo sempre perpendicolare allo spostamento, non compie lavoro, l'unica forza che compie lavoro sulla bambina è quella **gravitazionale**, che è conservativa, dunque possiamo usare il principio di conservazione dell'energia come nell'esempio della pietra che cade, con y_2=0:

$$\frac{1}{2}mv_1^{\;2} + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^{\;2} + mgy_2$$

$$\rightarrow v_2^{\;2} = 2g(y_1 - y_2) = 2gy_1 \quad \rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2gh}$$

$$\rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2(9.8m/s^2)(8.5m)} = 13m/s$$



Fondamenti di Fisica - 6° ed.

https://www.youtube.com/watch?v=Gc1DMktv4VU

La conservazione dell’energia meccanica