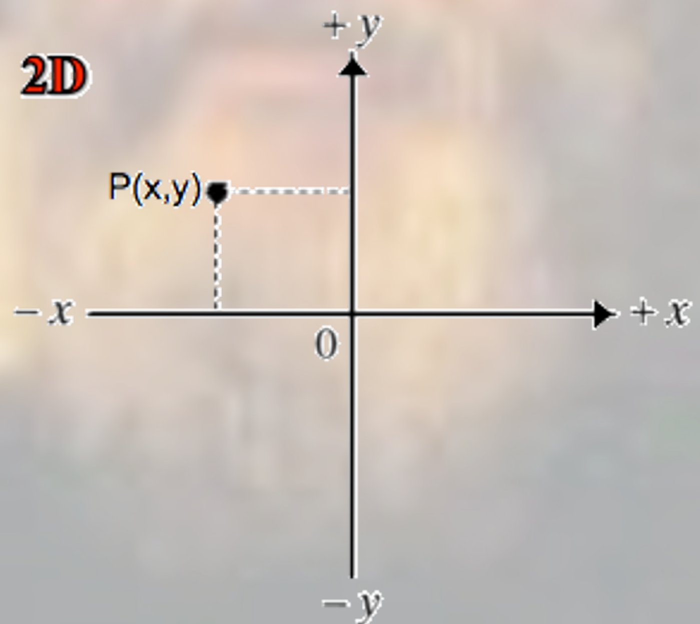
LA CINEMATICA in DUE DIMENSIONI

2D



Moto di un proiettile in due dimensioni

Galileo fu il primo a capire che il moto di un proiettile soggetto alla gravità può essere analizzato molto più semplicemente ed efficacemente prendendo in considerazione **separatamente** le componenti orizzontale e verticale del moto. Così facendo, poiché l'accelerazione di gravità è diretta costantemente verso il basso (asse y negativo), il moto lungo l'**asse y** sarà **uniformemente accelerato**; il moto lungo l'**asse x** invece, non essendo soggetto ad accelerazione, sarà **uniforme** (cioè a velocità costante). **La velocità vettoriale complessiva sarà data quindi, ad ogni istante, dalla somma delle sue componenti lungo i due assi coordinati:** $\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$

Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. ($a_x = 0$, $a_y = -g = \text{cost}$)

moto orizzontale (uniforme a_x=0, v_x=cost.)

(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0} t$

Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

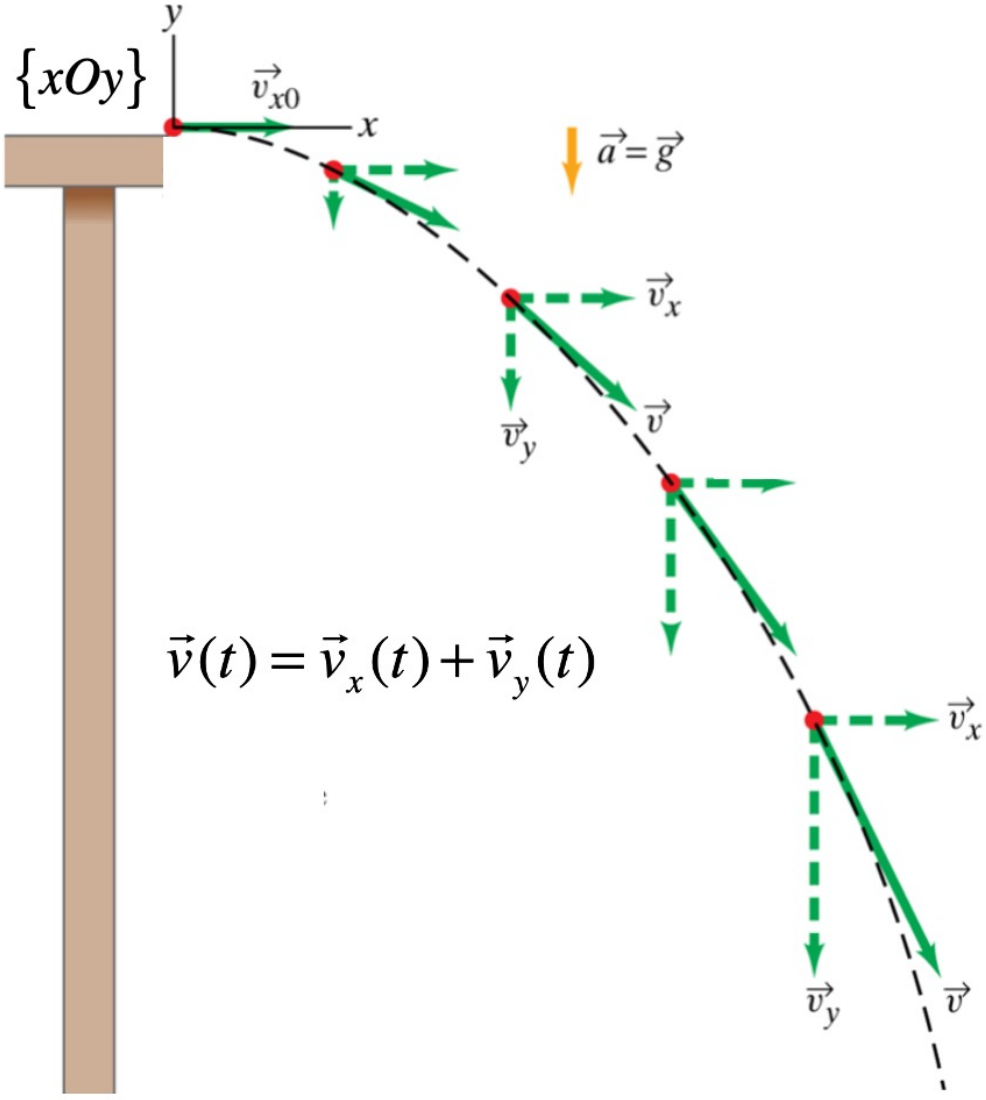
moto verticale (unif.accel. a_y= – g)

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2$

(III-y) $v_y^{\,2} = v_{y0}^{\,2} - 2g(y - y_0)$

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1



$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

Equazioni del moto per le due componenti indipendenti

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} = \text{cost.} \; ; \quad x(t) = v_{x0} t \\ v_y(t) = -gt \; ; \quad y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Combinando i moti lungo i due assi si ottiene una traiettoria parabolica (in questo caso un arco di parabola)

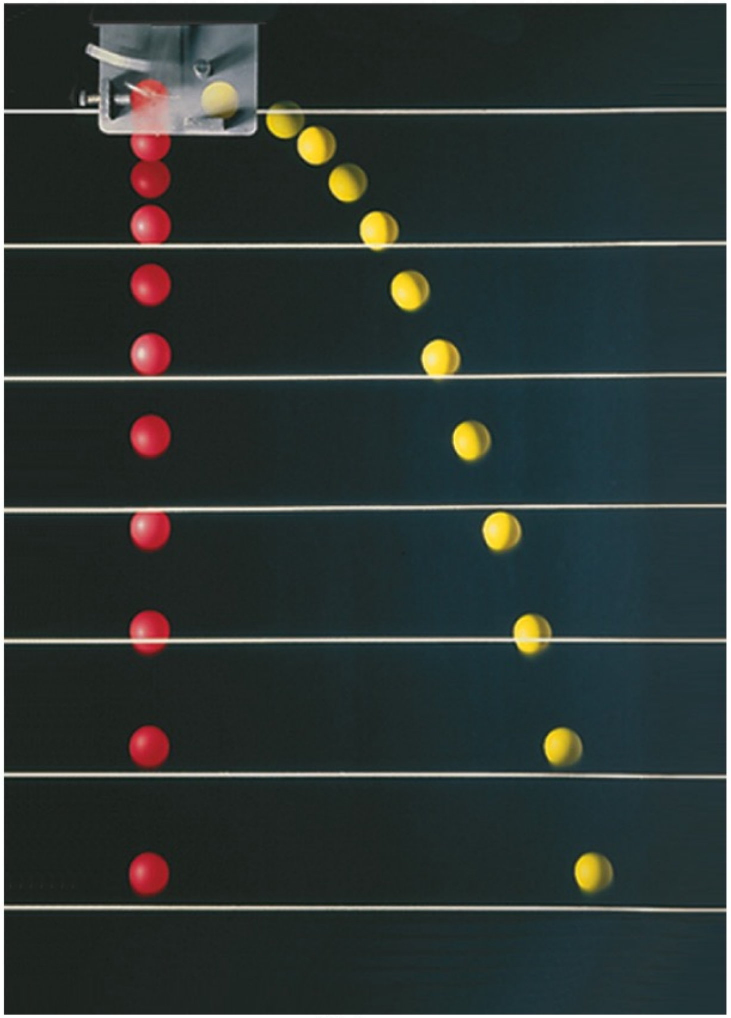
Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1

Quesito

Se contemporaneamente alla pallina (**gialla**) dell'esempio precedente un'altra pallina (**rossa**) viene lasciata cadere dal bordo del tavolo da ferma (v_{x0}=0 e v_{y0}=0), **quale delle due palline raggiungerà prima il suolo**?

Risposta

Le due palline raggiungono il suolo **contemporaneamente**, perchè il loro moto (uniformemente accelerato) lungo la direzione **verticale** è il medesimo (essendo la componente verticale della velocità v_{y0}=0 in entrambi i casi). Il moto **differisce** invece lungo la componente **orizzontale** (moto uniforme), in quanto la velocità v_{x0} iniziale è differente nei due casi – diversa da zero per la pallina gialla, uguale a zero per la rossa .

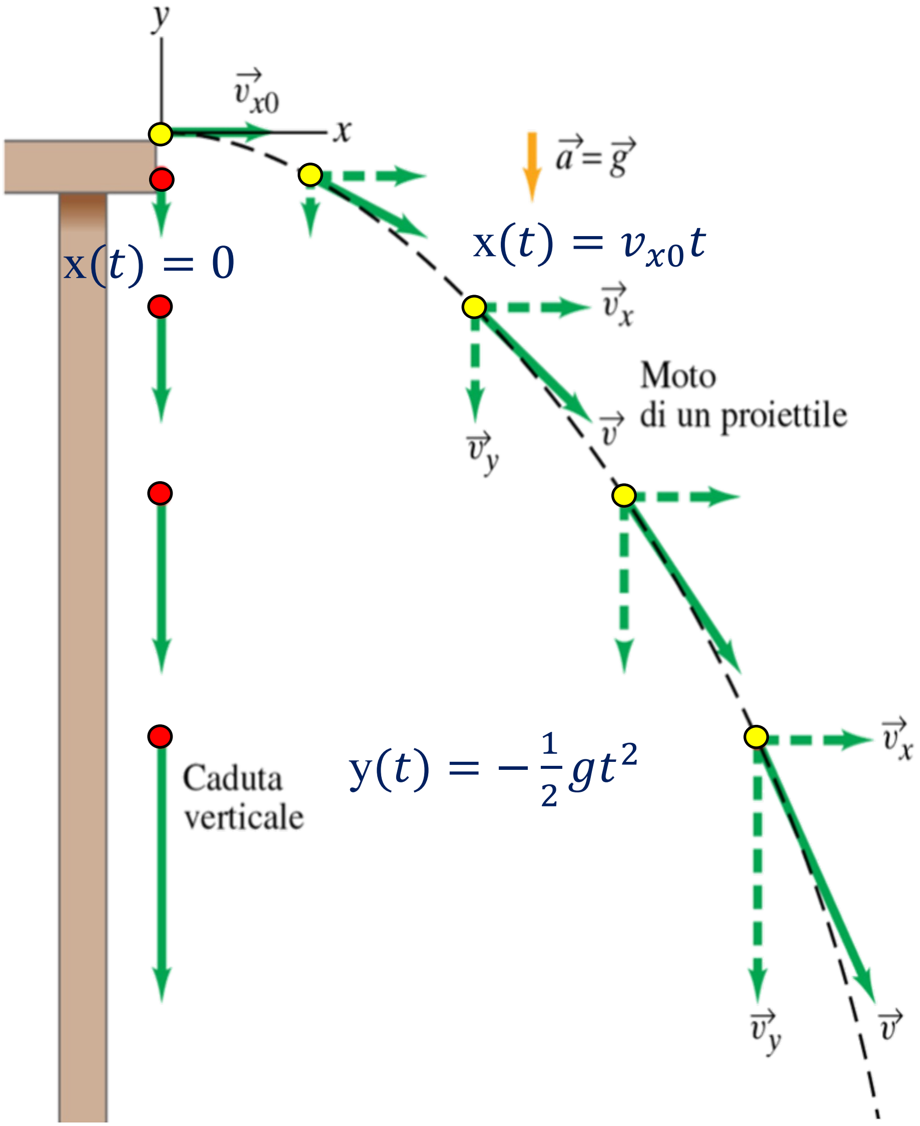


Fisica

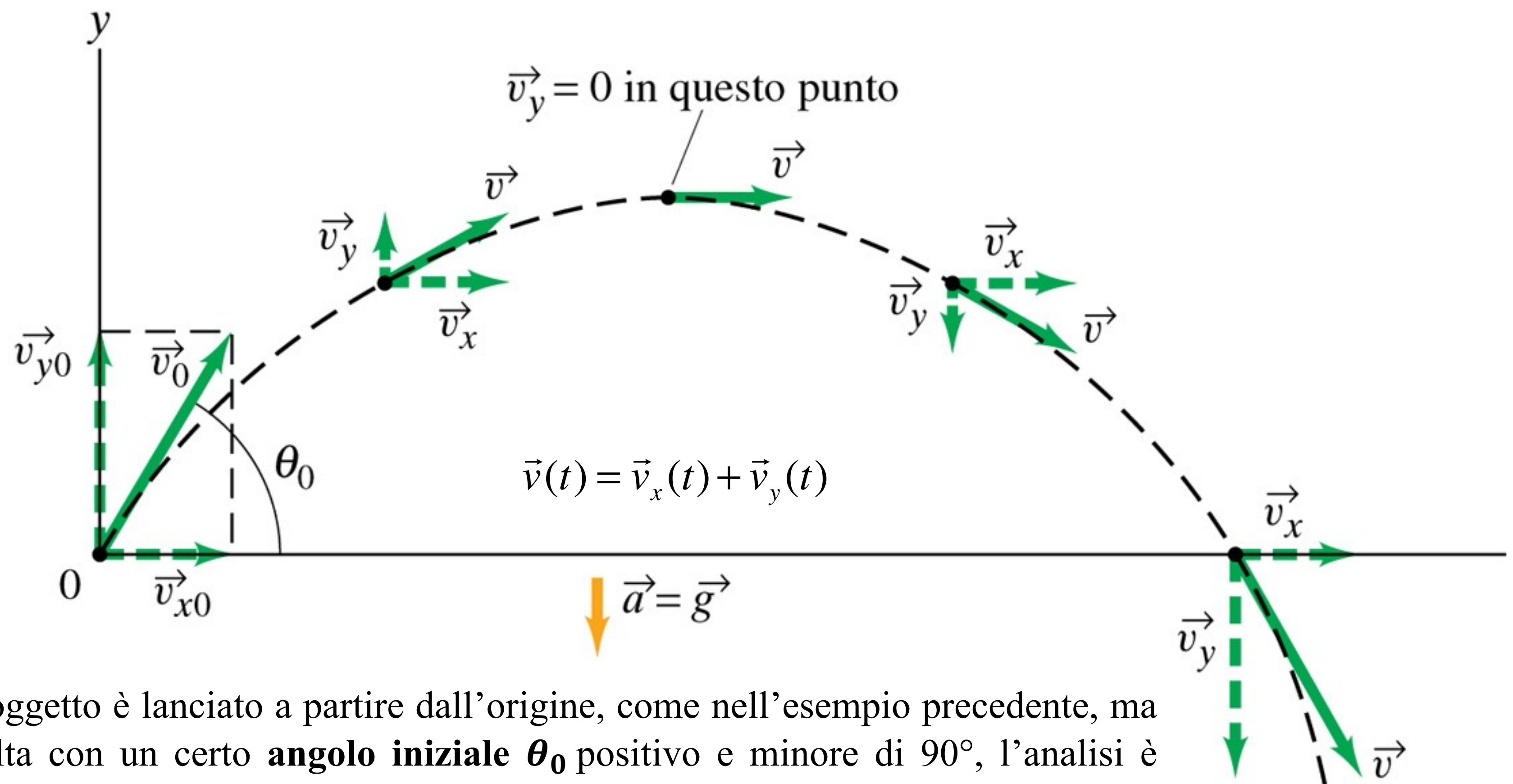
Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1

Quesito
Se contemporaneamente alla pallina (**gialla**) dell'esempio precedente un'altra pallina (**rossa**) viene lasciata cadere dal bordo del tavolo da ferma (v_{x0}=0 e v_{y0}=0), **quale delle due palline raggiungerà prima il suolo**?

Risposta
Le due palline raggiungono il suolo **contemporaneamente**, perchè il loro moto (uniformemente accelerato) lungo la direzione **verticale** è il medesimo (essendo la componente verticale della velocità v_{y0}=0 in entrambi i casi). Il moto **differisce** invece lungo la componente **orizzontale** (moto uniforme), in quanto la velocità v_{x0} iniziale è differente nei due casi – diversa da zero per la pallina gialla, uguale a zero per la rossa .

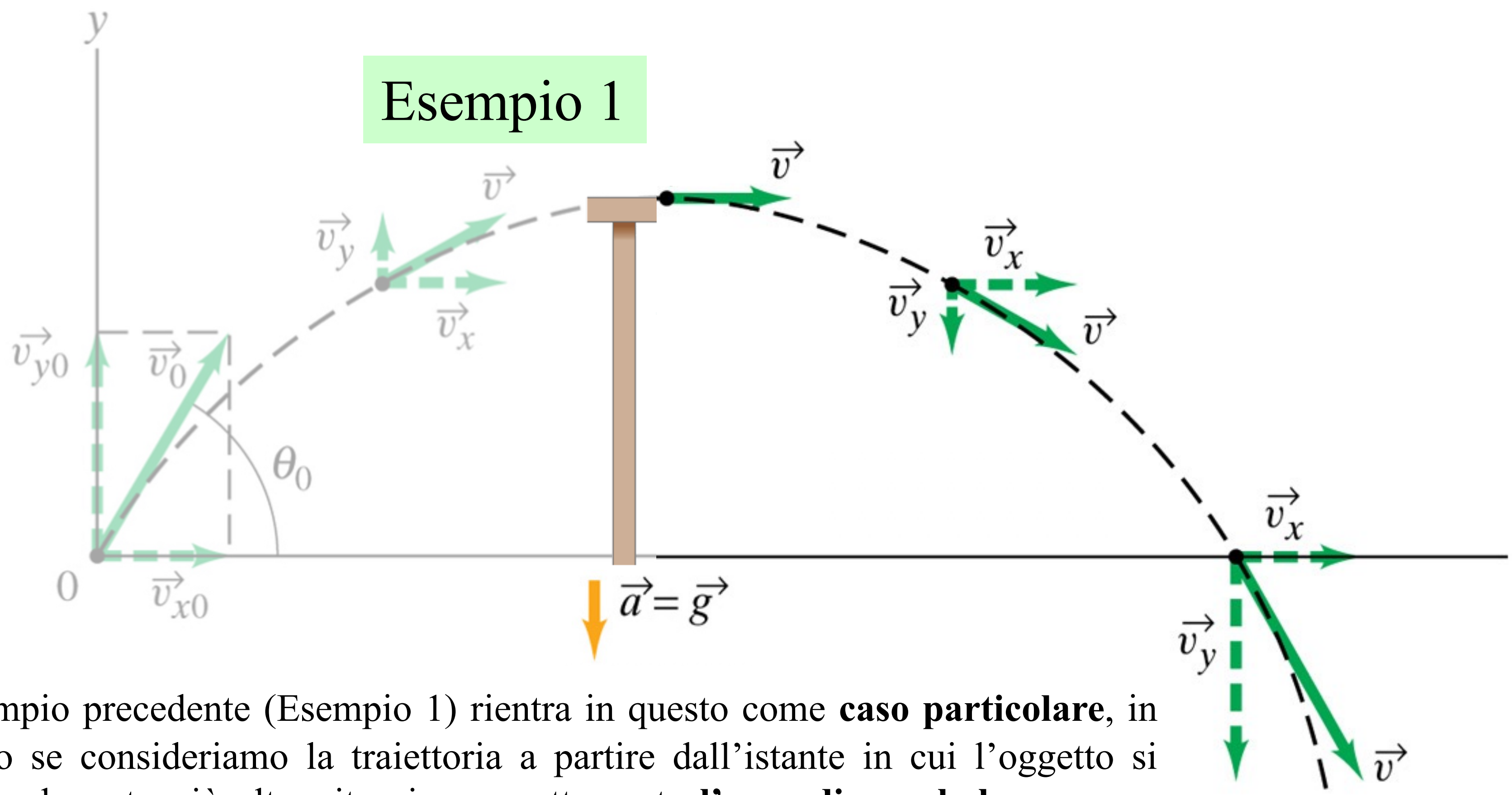


Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 2



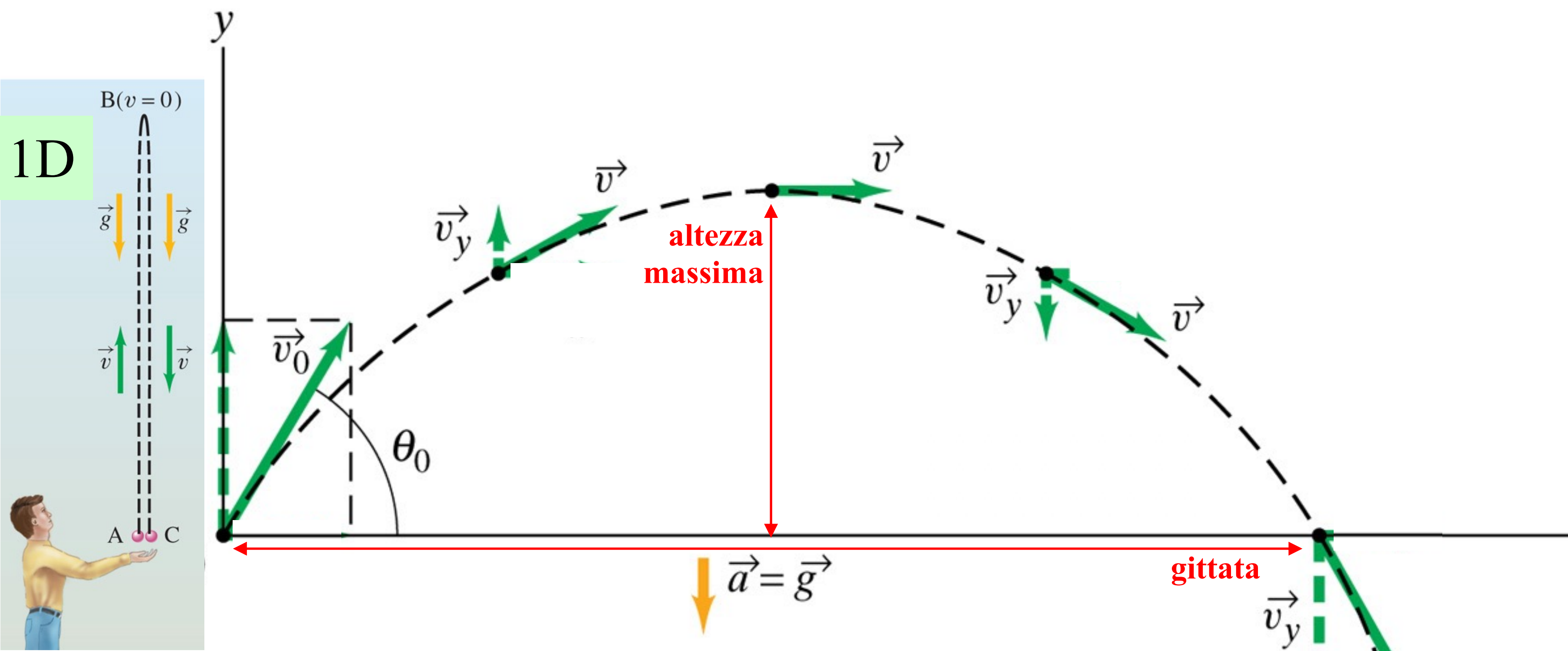
Se l'oggetto è lanciato a partire dall'origine, come nell'esempio precedente, ma stavolta con un certo **angolo iniziale $\boldsymbol{\theta_0}$** positivo e minore di 90°, l'analisi è simile a quella già vista ma qui è presente anche una **componente verticale positiva** della velocità $v_{y0} > 0$ che a causa della gravità decresce uniformemente fino ad annullarsi quando l'oggetto raggiunge il punto più alto della traiettoria, dopodiché cresce nuovamente in modulo ma con verso opposto. La **componente orizzontale** v_{x0} resta invece costante come nell'esempio precedente. La traiettoria complessiva è adesso una **parabola** completa.

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 2



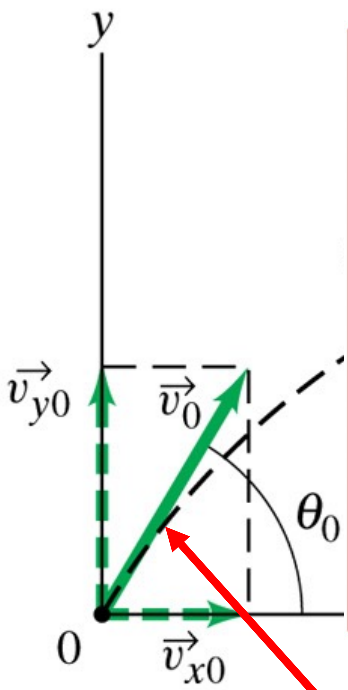
L'esempio precedente (Esempio 1) rientra in questo come **caso particolare**, in quanto se consideriamo la traiettoria a partire dall'istante in cui l'oggetto si trova nel punto più alto, ritroviamo esattamente **l'arco di parabola** percorso dalla pallina che, rotolando, cadeva dal tavolo con velocità verticale iniziale nulla…

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 2



D’altra parte, se consideriamo invece solo **il moto verticale** del proiettile in 2D dell’Esempio 2, questo **coinciderà** esattamente con il **moto della pallina lanciata verso l’alto** lungo l’asse y visto nell’ultimo esempio in cinematica 1D. Da questa analogia possiamo dedurre che **l’altezza massima** raggiunta dal proiettile e il suo **tempo totale di volo** coincideranno con quelli della pallina (se lanciata con la stessa velocità verticale iniziale v_{y0}) e quindi non dipenderanno dalla componente v_{x0}, la quale entrerà in gioco solo nel calcolo della **gittata** del proiettile (cioè la distanza dall’origine del punto in cui il proiettile tocca terra).

Esercizi sul moto di un proiettile in due dimensioni



Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. ($a_x = 0$, $a_y = - g = \text{cost}$)

moto orizzontale (uniforme $a_x=0$, v_x=cost.)

(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

moto verticale (unif.accel. $a_y = - g$)

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

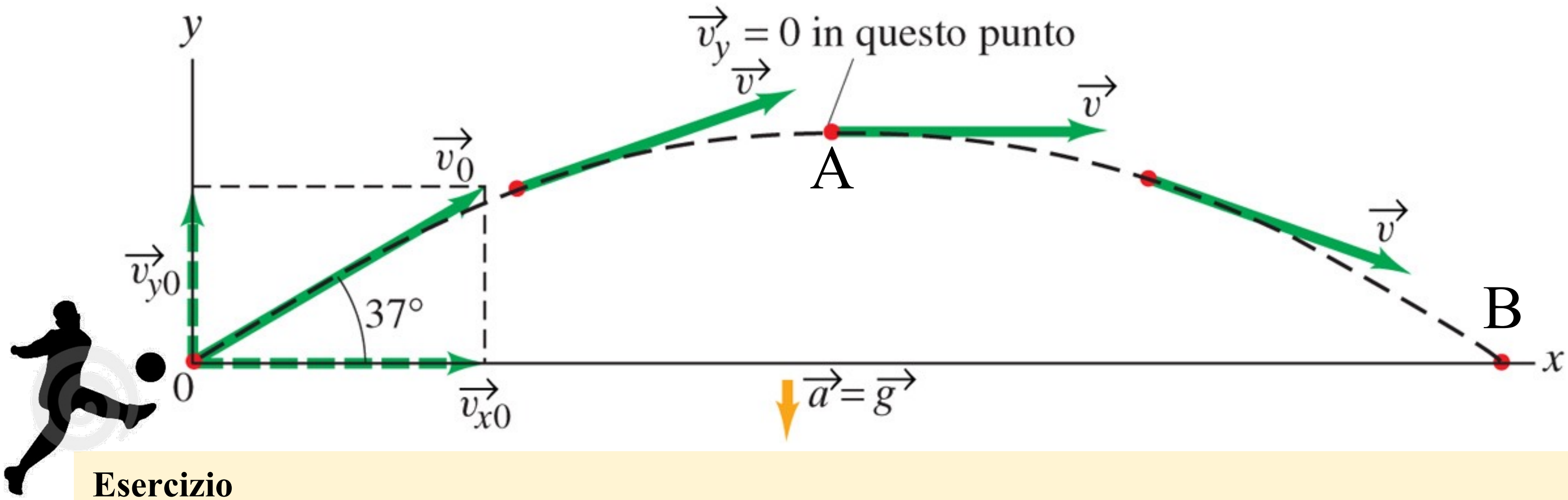
(III-y) $v_y{}^2 = v_{y0}{}^2 - 2g(y - y_0)$

Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

Componenti:

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0; \; v_{y0} = v_0 sen\theta_0$$



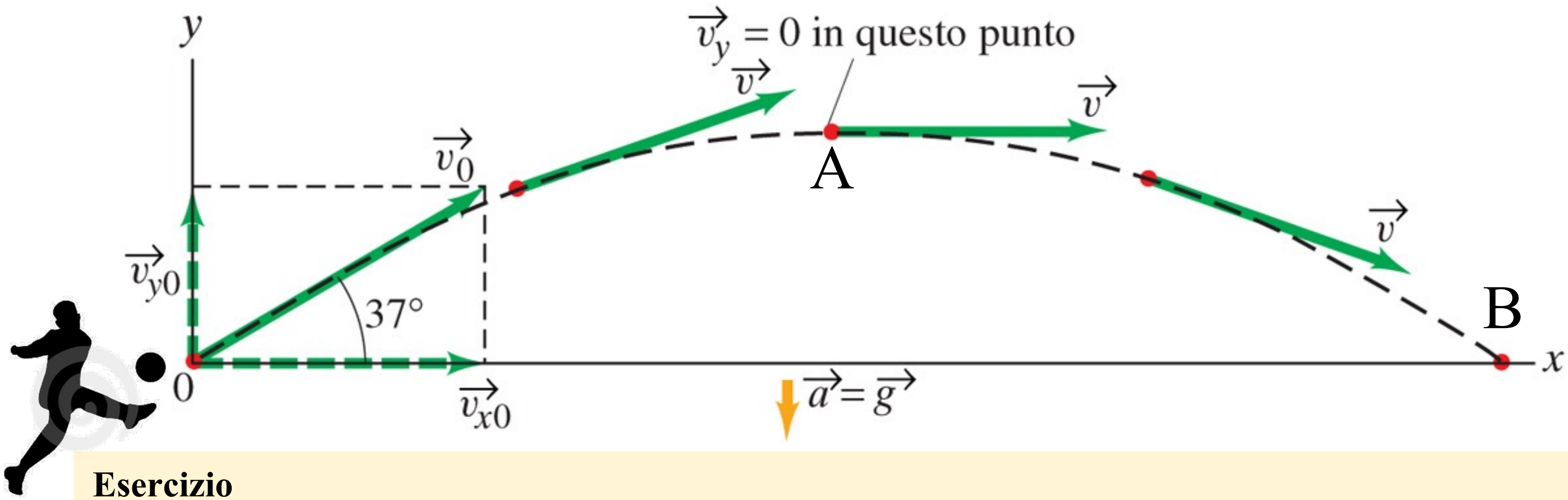
Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
(a) l'altezza massima y_A raggiunta dal pallone nel punto A
...

Suggerimenti
-Trattare separatamente i moti lungo gli assi x e y e usare le equazioni del moto di un proiettile;
-Ricordare che il moto lungo x avviene a velocità costante mentre quello lungo y è a velocità variabile.
-Considerare che il **tempo totale che il pallone trascorre in aria e l'altezza massima che raggiunge** sono determinati solo dal moto lungo y, mentre la **distanza massima in orizzontale (gittata)** è determinata dal moto congiunto lungo gli assi x e y;

Innanzitutto occorre scomporre la velocità iniziale nelle sue componenti:

$$\boxed{v_{x0} = v_0 \cos\theta \ ; \ v_{y0} = v_0 sen\theta}$$

$$v_{x0} = v_0 \cos 37.0° = (20.0 m/s)(0.799) = 16.0 m/s$$
$$v_{y0} = v_0 sen 37.0° = (20.0 m/s)(0.602) = 12.0 m/s$$



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
(a) l'altezza massima y_A raggiunta dal pallone nel punto A
...

Equazioni del moto di un proiettile ($a_x = 0$, $a_y = -g = \text{cost}$)

moto orizzontale (a_x=0, v_x=cost.) UNIFORME

(I-x) $v_x = v_{x0}$

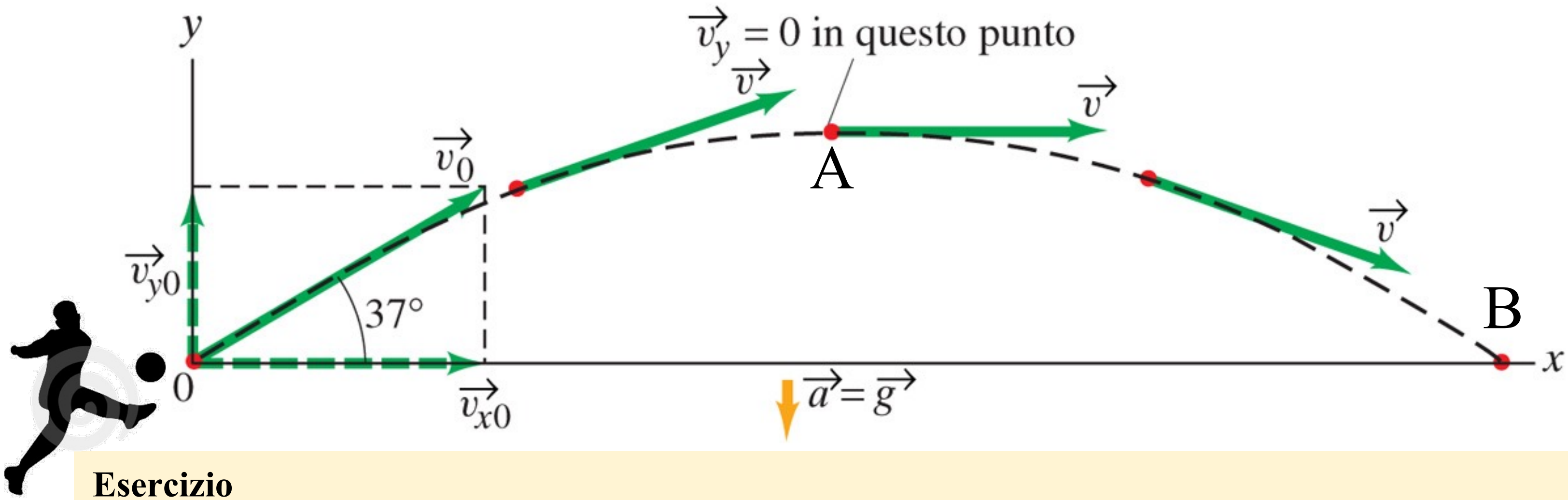
(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

moto verticale (a_y= – g) UNIFORMEMENTE ACCELERATO

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

(III-y) $v_y^{\,2} = v_{y0}^{\,2} - 2g(y - y_0)$



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
(a) l'altezza massima y_A raggiunta dal pallone nel punto A
...

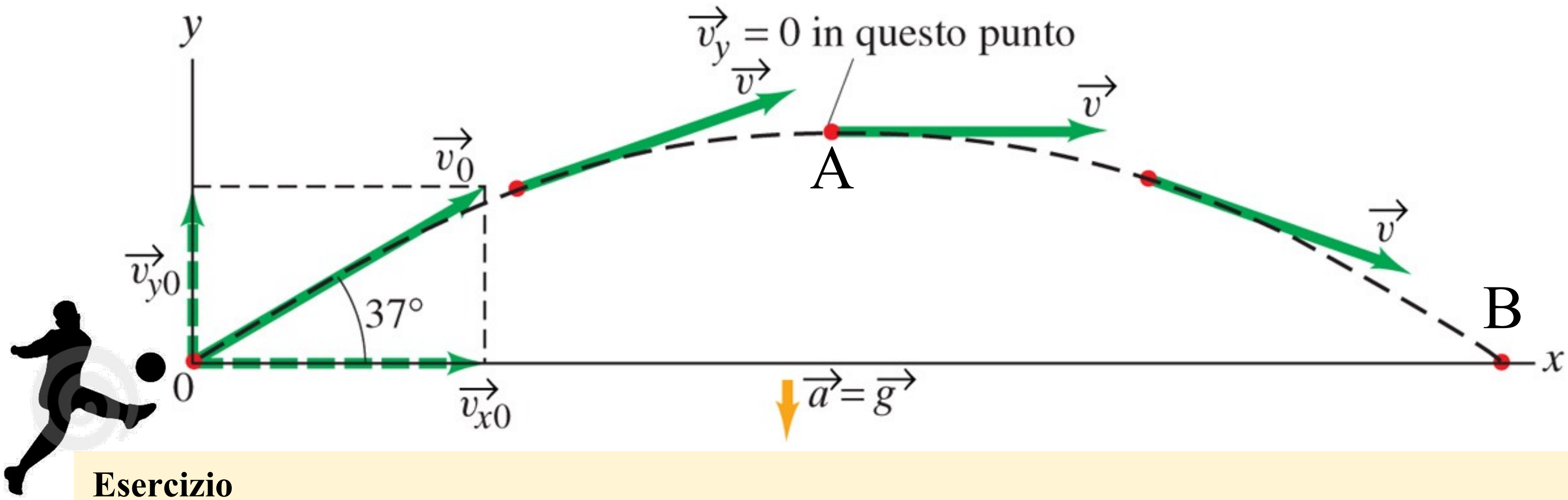
Nel punto A la velocità ha direzione orizzontale, dunque v_y=0 e il tempo t_A necessario a raggiungere il punto A sarà dato dall'equazione I-y risolta rispetto a t:

$$v_y = v_{y0} - gt \quad \rightarrow \quad t_A = \frac{v_{y0}}{g} = \frac{12.0 m/s}{9.80 m/s^2} = 1.22 s$$

da cui, essendo x_0=0 ed y_0=0, dall'equazione II-y si ricava la coordinata y_A della massima altezza:

$$y_A = v_{y0} t_A - \frac{1}{2} g t_A{}^2 = (12.0 m/s)(1.22 s) - \frac{1}{2}(9.80 m/s^2)(1.22 s)^2 = 7.35 m$$

Questo risultato si poteva ricavare anche utilizzando solo l'equazione III-y (considerando che il pallone raggiunge la quota y_A con velocità v_y=0) ma in questo modo abbiamo ottenuto una informazione supplementare sul tempo t_A che ci risulterà utile per rispondere alle prossime domande…



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
...
(b) il tempo trascorso prima che il pallone tocchi terra nel punto B
...

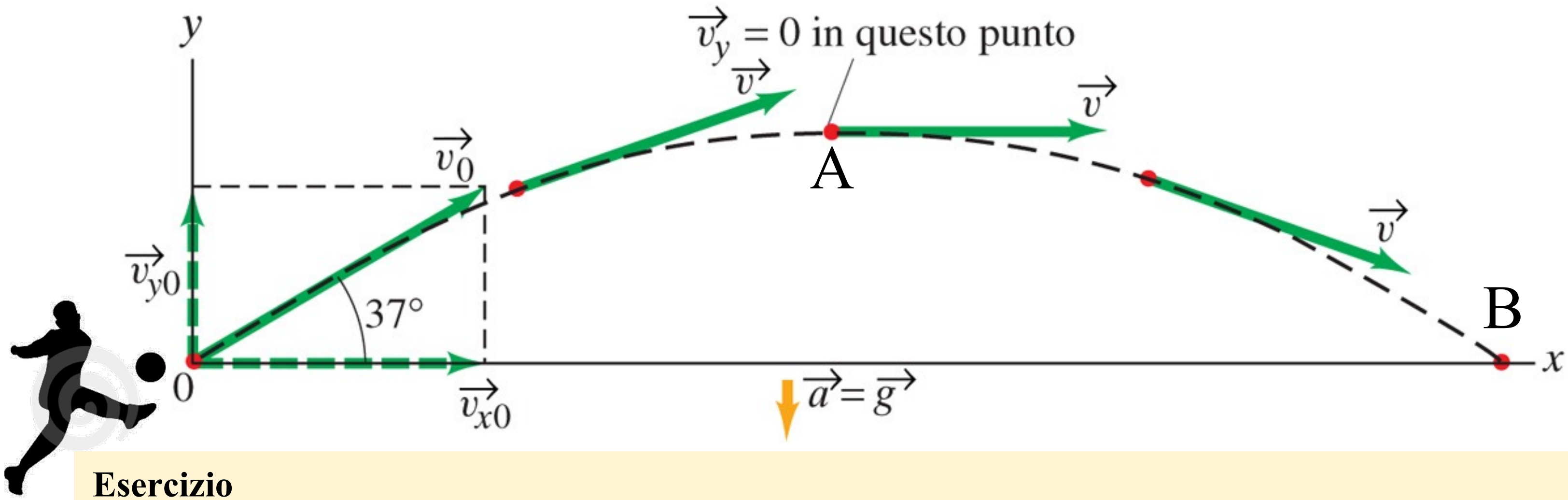
Sarebbe semplicemente uguale al doppio del tempo t_A necessario a raggiungere il punto A:

$$t_B = 2t_A = 2 \cdot (1.22s) = 2.44s$$

ma è possibile ricavarlo anche dall'equazione II-y con y_0=0 ed y=0, risolvendola rispetto al tempo:

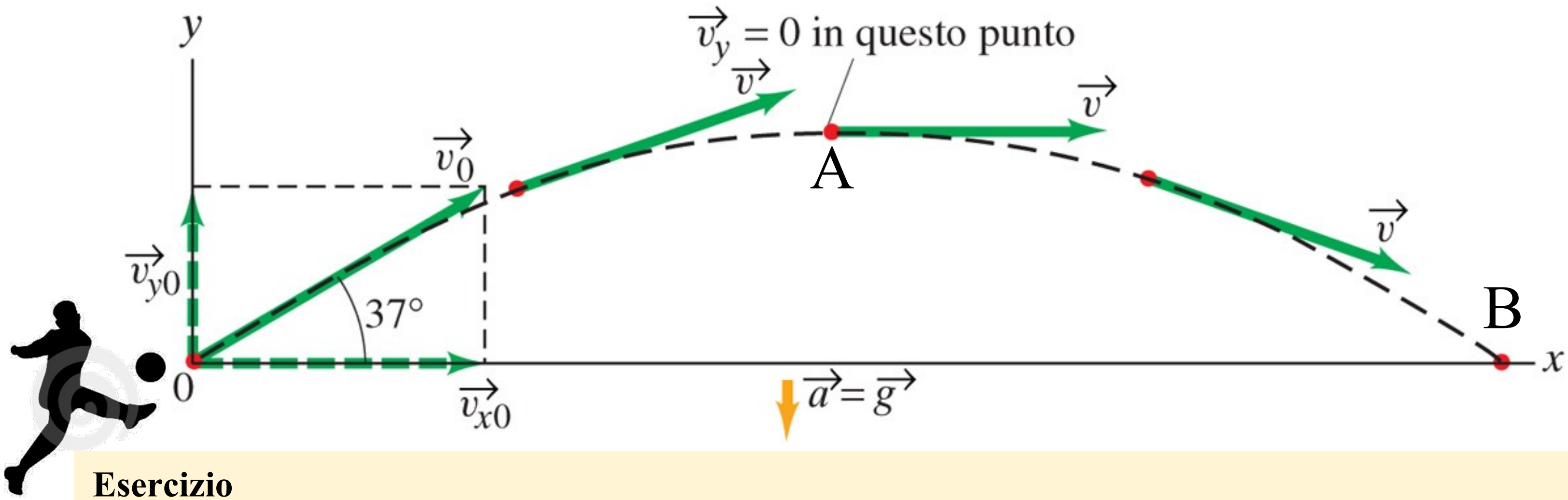
$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \;\rightarrow\; 0 = 0 + (12m/s)t - \frac{1}{2}(9.80m/s^2)t^2$$

$$\rightarrow\; [\frac{1}{2}(9.80m/s^2)t - 12.0m/s]t = 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow\; t = 0 \\ \rightarrow\; t_B = \dfrac{2(12.0m/s)}{(9.80m/s^2)} = 2.45s \end{array}$$



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
...
(c) la distanza a cui tocca terra nel punto B
(d) le componenti del vettore velocità nel punto A
(e) le componenti del vettore accelerazione nel punto A

moto orizzontale (a_x=0, v_x=cost.) UNIFORME	**moto verticale (a_y= – g) UNIFORMEMENTE ACCELERATO**
(I-x) $v_x = v_{x0}$	**(I-y)** $v_y = v_{y0} - gt$
(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$	**(II-y)** $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$
	(III-y) $v_y{}^2 = v_{y0}{}^2 - 2g(y - y_0)$



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
...
(c) la distanza a cui tocca terra nel punto B
(d) le componenti del vettore velocità nel punto A
(e) le componenti del vettore accelerazione nel punto A

(c) La coordinata x_B si ricava semplicemente sostituendo t_B nell'equazione II-x con x_0=0 e v_{x0}=16.0m/s:

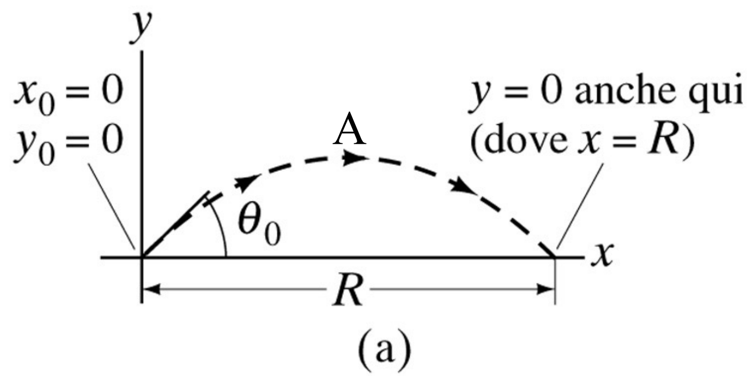
$$x = x_0 + v_{x0}t \quad \rightarrow \quad x_B = v_{x0}t_B = (16.0m/s)(2.45s) = 39.2m$$

(d) La componente y della velocità nel punto A è nulla, mentre la componente x resta costante per tutta la durata del moto e dunque è uguale a $v_{xA}=v_{x0}$=16.0m/s;

(e) Il vettore accelerazione, ormai dovrebbe essere chiaro, è sempre costante, di modulo pari a g e rivolto verso il basso.

Gittata orizzontale di un proiettile

La gittata orizzontale di un proiettile è definita come *la distanza orizzontale percorsa dal proiettile prima di tornare all'altezza iniziale $y=y_0$* (che di solito è quella del suolo). E' interessante derivare una **formula generale** che permetta di calcolare la gittata orizzontale R di un proiettile sparato al tempo t=0 dall'origine (x_0,y_0) di un sistema di riferimento (nel verso delle x crescenti) in funzione della sua velocità iniziale v_0 e del suo angolo di sparo θ_0 .



Calcoliamo il tempo totale di volo dall'equazione (I-y) per il moto verticale, ponendo a zero la componente y della velocità nel punto A e poi raddoppiando il tempo necessario a raggiungere quel punto:

$$0 = v_{y0} - g t_A \;\rightarrow\; t_A = \frac{v_{y0}}{g} \;\rightarrow\; t = 2\,\frac{v_{y0}}{g}$$

…e sostituiamo nell'equazione per il moto orizzontale:

$$R = x = v_{x0} t \;\rightarrow\; R = v_{x0}\left(\frac{2v_{y0}}{g}\right) = \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} = \frac{2{v_0}^2 sen\theta_0 \cos\theta_0}{g} \qquad \text{essendo:} \quad \vec{v}_0 \begin{cases} v_{x0} = v_0\cos\theta_0 \\ v_{y0} = v_0 sen\theta_0 \end{cases}$$

Da quì, utilizzando l'identità trigonometrica **2senθcosθ=sen2θ** , avremo infine l'espressione cercata:

$$\rightarrow R = \frac{{v_0}^2 sen2\theta_0}{g}$$

Nota
Da questa equazione si vede che **la gittata orizzontale aumenta col quadrato di v_0**, perciò una velocità iniziale doppia (a parità di angolo di sparo θ_0) porta ad un incrememento di quattro volte nella gittata massima!

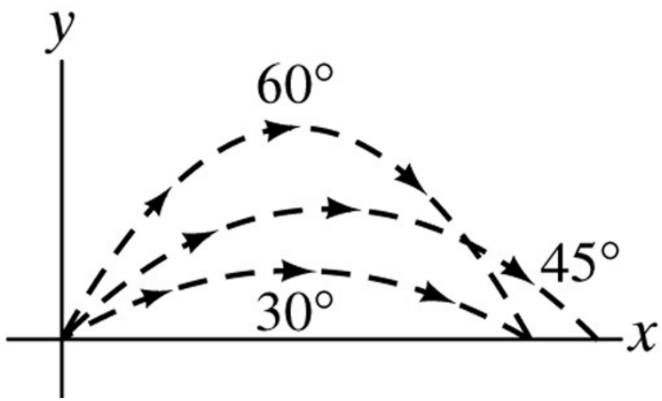
Gittata orizzontale di un proiettile

$$R = \frac{v_0^{\ 2} sen 2\theta_0}{g}$$

Fissata invece la velocità iniziale v_0, e facendo variare l'angolo di sparo θ_0, dalla formula appena vista avremo che la **gittata massima R_{max}** si otterrà quando il $sen(2\theta_0)$ assume il suo valore massimo (=1), e cioè quando:

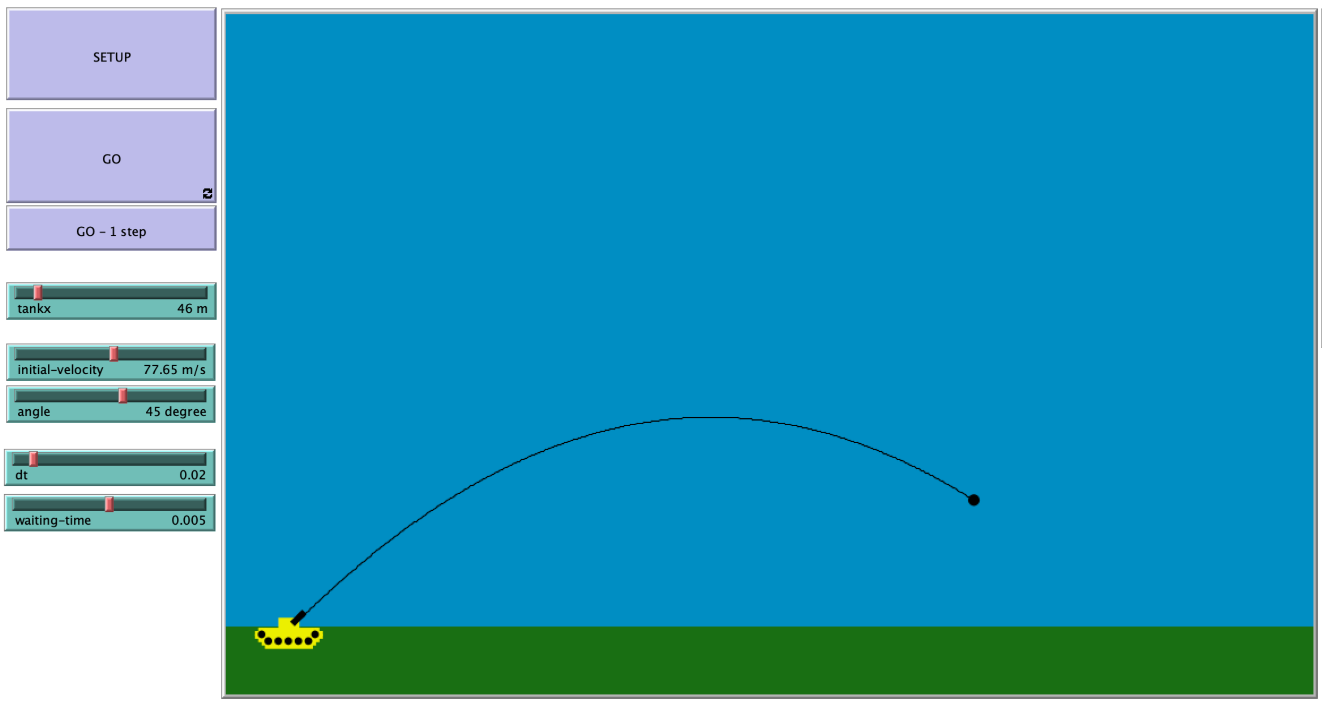
$$2\theta_0 = 90° \rightarrow \theta_0 = 45° \quad per \quad cui \quad R_{\max} = \frac{v_0^{\ 2}}{g}$$

Ovviamente se la **resistenza** dell'aria non è trascurabile (come si è tacitamente supposto finora) la gittata – per un certo valore della velocità iniziale – sarà minore di quella appena calcolata, e si può verificare che il suo valore massimo si ottiene per un angolo minore di 45°.



angolo in gradi	angolo in radianti	seno
0°	0	0
30°	0,52	0,5
45°	0,79	0,71
60°	1,05	0,87
90°	1,57	1
180°	3,14	0

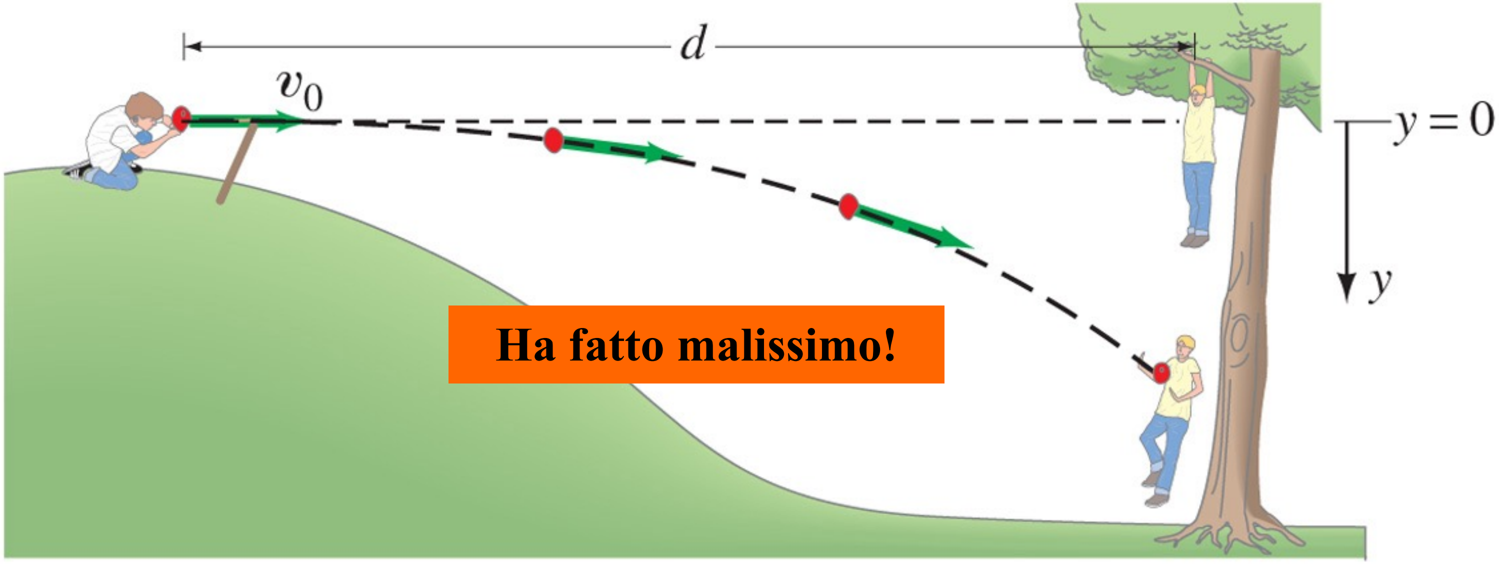
Simulare la traiettoria di un proiettile in 2D



Problema concettuale n.1

Un ragazzo su una collina punta la sua **fionda** caricata con un palloncino ad acqua orizzontalmente verso un secondo ragazzo che fa da bersaglio (poverino!) e che sta appeso al ramo di un **albero** (non avendo evidentemente di meglio da fare!). Nell'istante in cui il palloncino viene lanciato, il ragazzo-bersaglio, pensando di fare una **furbata** e di evitare così di essere colpito, abbandona istintivamente la presa e si lascia cadere dal ramo...

Ha fatto bene o ha fatto male a mollare la presa?



Ha fatto malissimo!

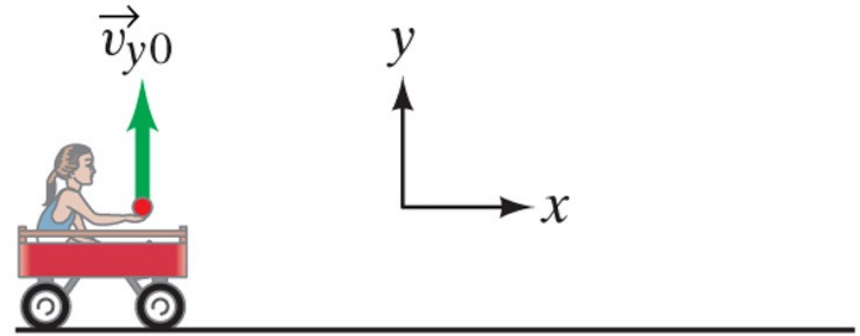
Problema concettuale n.2

Una bambina è seduta su un **carretto** che si muove verso destra con velocità costante. La bambina stende la mano e lancia una **mela** verticalmente verso l'alto (nel suo sistema di riferimento), mentre il carretto continua a muoversi con **velocità costante**.

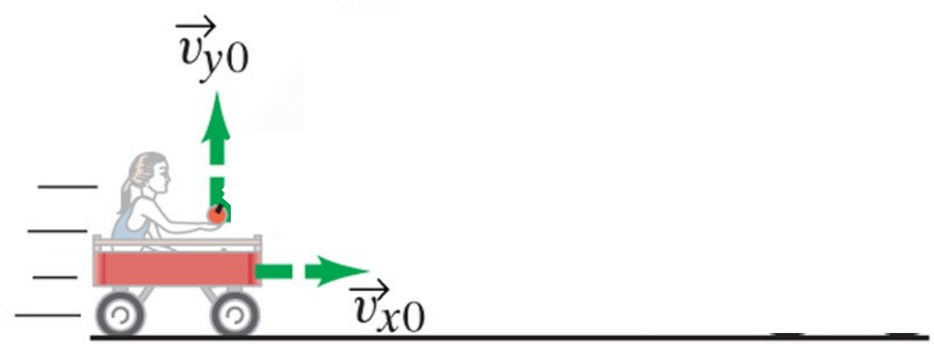
Trascurando l'attrito dell'aria, la mela cadrà (A) dietro il carretto, (B) sul carretto, (C) davanti al carretto?

Suggerimento

Ragionare ponendosi nel *sistema di riferimento* del terreno...



(a) Sistema di riferimento del carretto



(b) Sistema di riferimento del terreno

Problema concettuale n.2

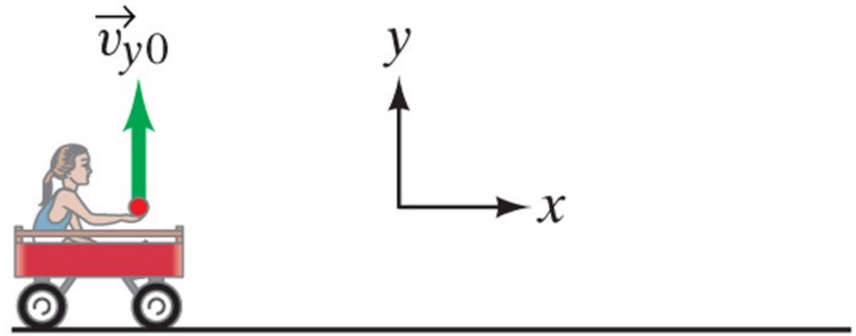
Una bambina è seduta su un **carretto** che si muove verso destra con velocità costante. La bambina stende la mano e lancia una **mela** verticalmente verso l'alto (nel suo sistema di riferimento), mentre il carretto continua a muoversi con **velocità costante**.

Trascurando l'attrito dell'aria, la mela cadrà (A) dietro il carretto, (B) sul carretto, (C) davanti al carretto?

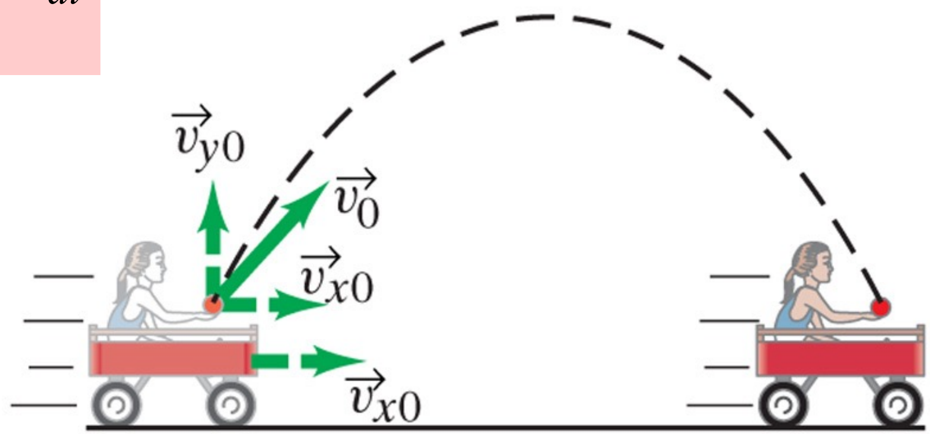
Suggerimento

Ragionare ponendosi nel *sistema di riferimento* del terreno...

La risposta corretta è la B!

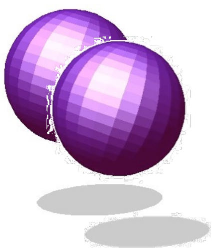


(a) Sistema di riferimento del carretto



(b) Sistema di riferimento del terreno

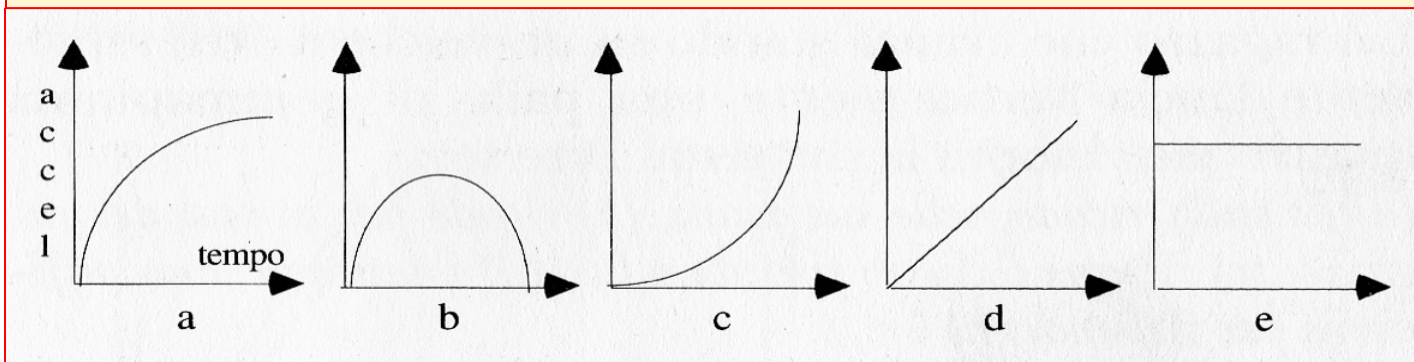
Qualche quesito...



Quesito n.1
Due sfere uguali ma di diverso peso sono lanciate verso l'alto con la *stessa velocità iniziale*. Trascurando l'effetto dell'aria, si hanno dati sufficienti per dire **quale delle due sfere arriverà più in alto?**
Possibili risposte: (a) sì, arriva più in alto la sfera che pesa meno; (b) sì, le due sfere arrivano alla stessa altezza; (c) sì, arriva più in alto la sfera che pesa di più; (d) no, non ci sono dati sufficienti per poterlo dire.

(b)

Quesito n.2
Una pietra è lanciata verso l'alto. Se si *trascura la resistenza dell'aria*, quale dei cinque grafici rappresenta **l'accelerazione** della pietra al trascorrere del tempo mentre è in aria?



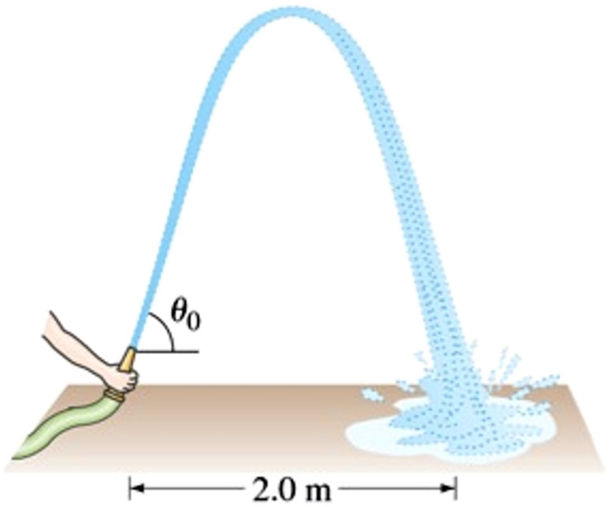
(e)

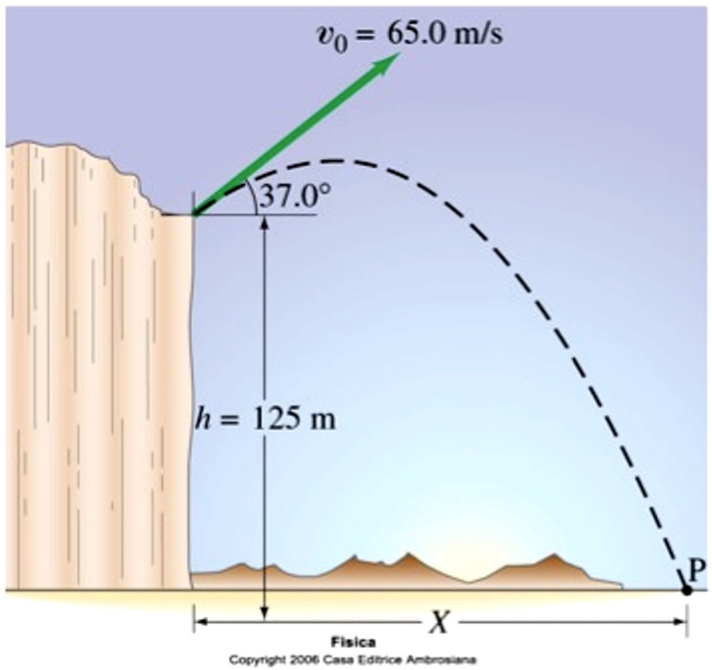
Quesito n.3
Un atleta che corre a *velocità costante* lascia cadere una boccia di piombo dalla sua mano. Dire se **essa tocca terra**: *(a) sulla verticale del punto da dove è lasciata cadere; (b) un po' più indietro; (c) nel punto dove, in quell'istante si troverà l'atleta; (d) in un punto intermedio tra (a) e (c).*

(c)

Esercizi Cinematica 2-D

Esercizio 1
La canna di una pompa antincendio, tenuta vicino al suolo, espelle l'acqua a una velocità pari a 6.8 m/s. A quale/i angolo/i deve essere orientata la canna per fare ricadere l'acqua a una distanza di 2.0 m (vedi figura)? Perchè gli angoli sono due? Disegnate le due traiettorie.





Esercizio 2
Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura). (a) Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno. (b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe. Nell'istante immediatamente prima di colpire il punto P, trovate (c) le componenti orizzontale e verticale della sua velocità, (d) il modulo della velocità e (e) l'angolo formato dal vettore velocità con l'orizzontale. (f) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Esercizi Cinematica 2-D

Esercizio 3

Durante il servizio, un tennista cerca di colpire la palla orizzontalmente. Qual'è la velocità minima che deve essere impressa alla palla per superare la rete alta 0.90 m e posta a circa 15.0 m di distanza dal tennista, se la palla viene lanciata da 2.50 m di altezza? Dove cadrà la palla, se sfiora la rete? E in tal caso sarà un servizio valido (cioè la palla cadrà entro 7.0 m dalla rete)? Quanto a lungo resterà in aria?