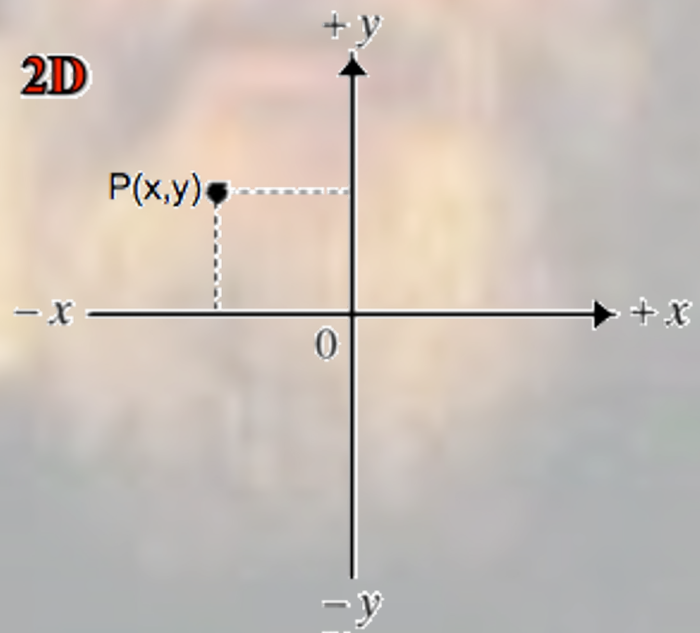
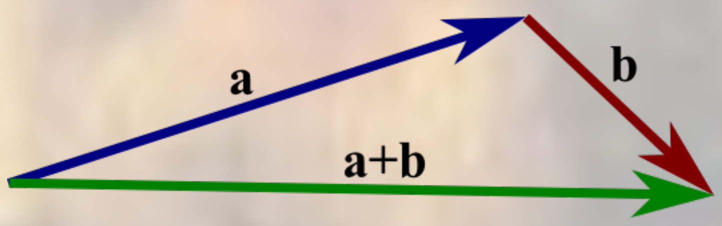
VERSO LA CINEMATICA in 2D…

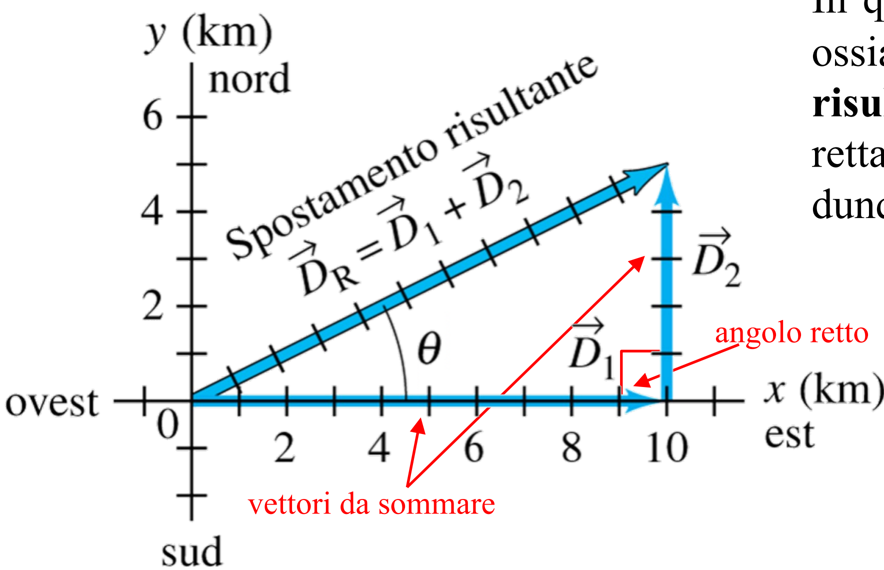


I Vettori



Somma di vettori in 2 dimensioni

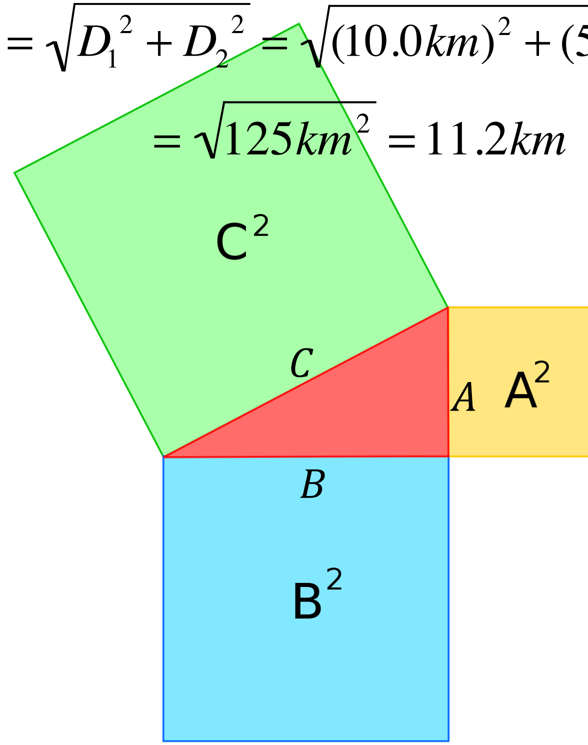
Se si lavora in **sistemi di riferimento a due dimensioni** e se i due vettori da sommare (10 Km e 5 Km) non giacciono lungo la stessa retta, come in figura, bisogna fare attenzione.



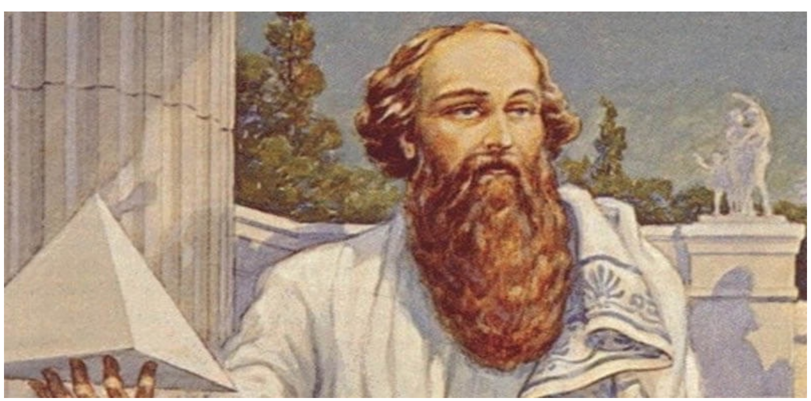
In questo caso i vettori da sommare sono **ortogonali**, ossia formano un angolo retto, e il **modulo del vettore risultante**, che rappresenta *l'ipotenusa* del triangolo rettangolo che ha per *cateti* i due vettori originali, può dunque essere calcolato con il *teorema di Pitagora:*

$$D_R = \sqrt{D_1^{\,2} + D_2^{\,2}} = \sqrt{(10.0km)^2 + (5.0km)^2} =$$

$$= \sqrt{125km^2} = 11.2km$$



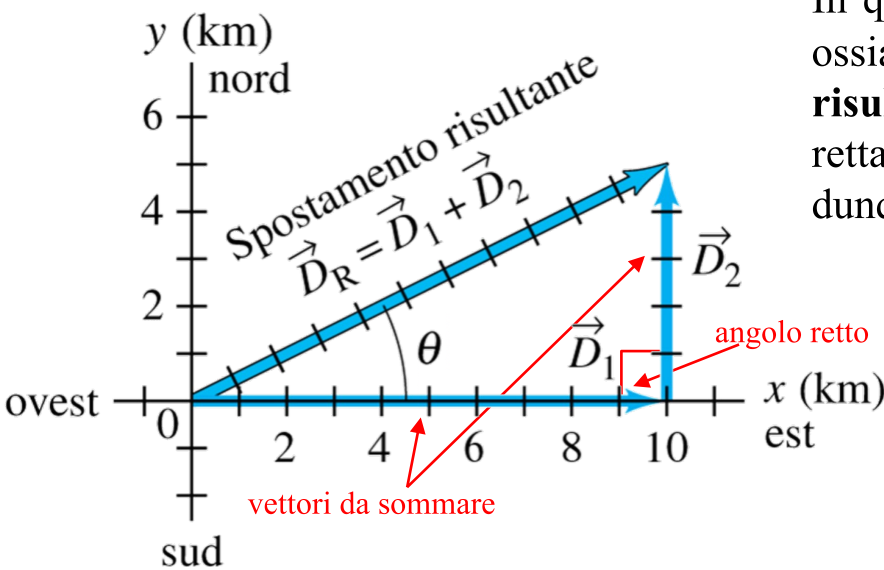
$$C^2 = B^2 + A^2 \rightarrow C = \sqrt{B^2 + A^2}$$



Pitagora (Samo, 580 a.C. circa - Metaponto, 495 a.C. circa)

Somma di vettori in 2 dimensioni

Se si lavora in **sistemi di riferimento a due dimensioni** e se i due vettori da sommare (10 Km e 5 Km) non giacciono lungo la stessa retta, come in figura, bisogna fare attenzione.

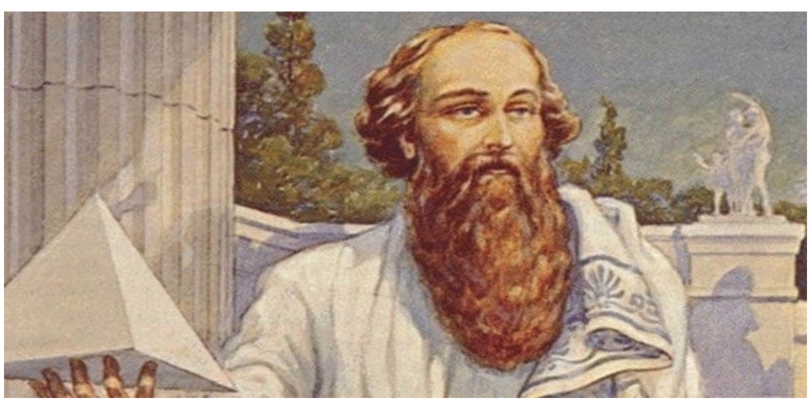


In questo caso i vettori da sommare sono **ortogonali**, ossia formano un angolo retto, e il **modulo del vettore risultante**, che rappresenta *l'ipotenusa* del triangolo rettangolo che ha per *cateti* i due vettori originali, può dunque essere calcolato con il *teorema di Pitagora:*

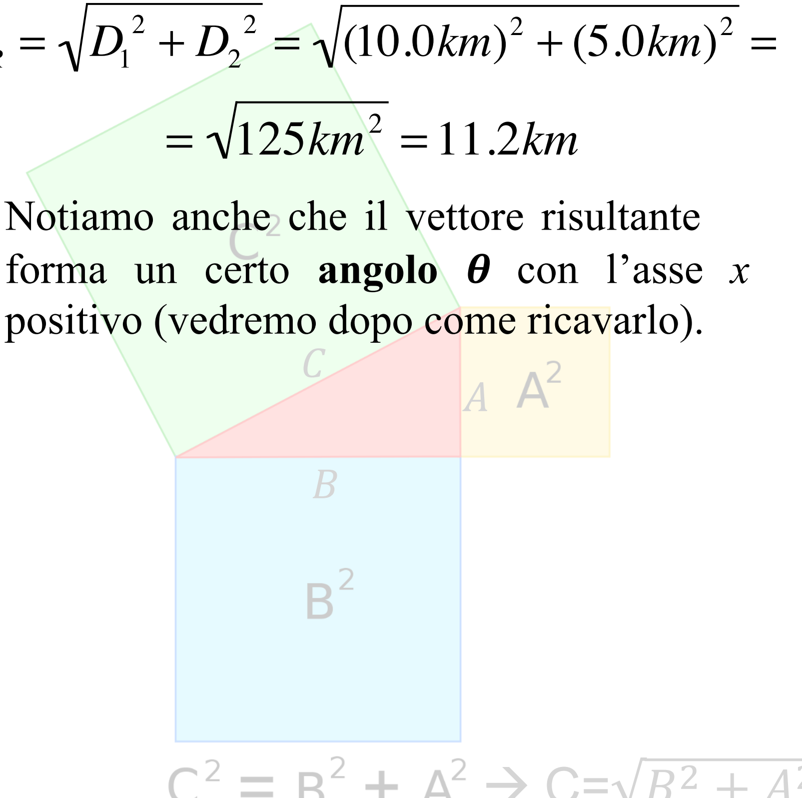
$$D_R = \sqrt{D_1^{\,2} + D_2^{\,2}} = \sqrt{(10.0km)^2 + (5.0km)^2} =$$

$$= \sqrt{125km^2} = 11.2km$$

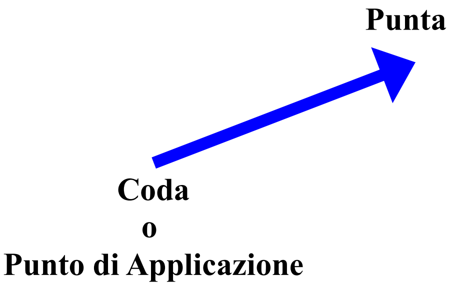
Notiamo anche che il vettore risultante forma un certo **angolo** $\boldsymbol{\theta}$ con l'asse x positivo (vedremo dopo come ricavarlo).



Pitagora (Samo, 580 a.C. circa - Metaponto, 495 a.C. circa)



Metodi per la somma grafica di due o più vettori

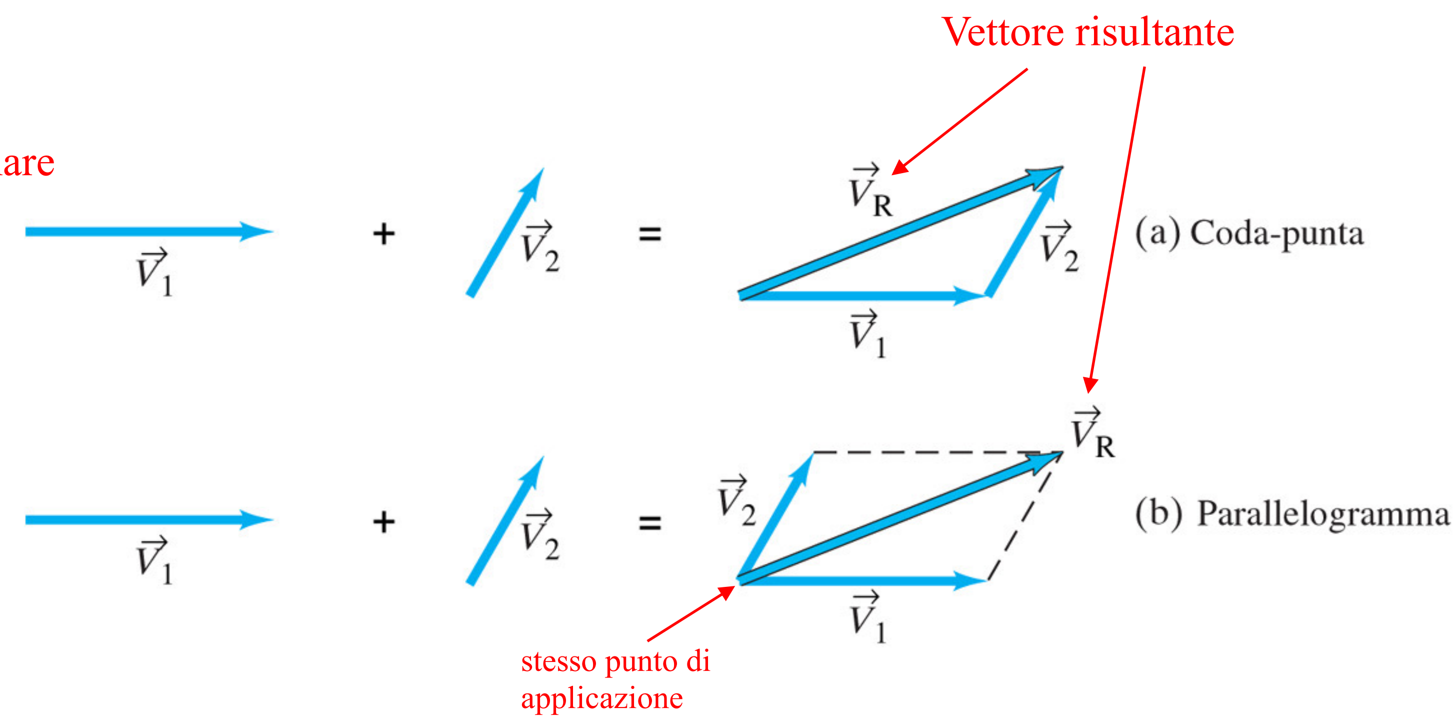


Generalmente le tre informazioni che individuano una *grandezza vettoriale* (e dunque il vettore ad essa corrispondente) sono:

* **l'intensità o modulo** (un numero reale con unità di misura)
* **la direzione** (l'insieme delle rette parallele al vettore dato)
* **il verso** (uno dei due versi di percorrenza, data una direzione)

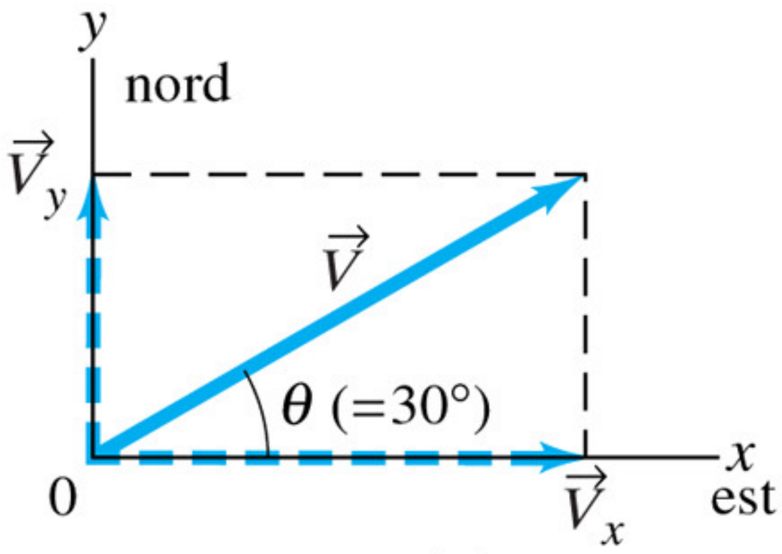
Se i vettori da sommare sono disposti l'uno consecutivamente all'altro:

Se i vettori da sommare hanno lo stesso punto di applicazione:



Scomposizione di un vettore nelle sue componenti

Le componenti di un vettore rispetto agli assi coordinati di un certo sistema di riferimento, in questo caso a 2 dimensioni, sono due vettori, mutuamente perpendicolari e diretti lungo gli assi medesimi, la cui somma è uguale al vettore originario:



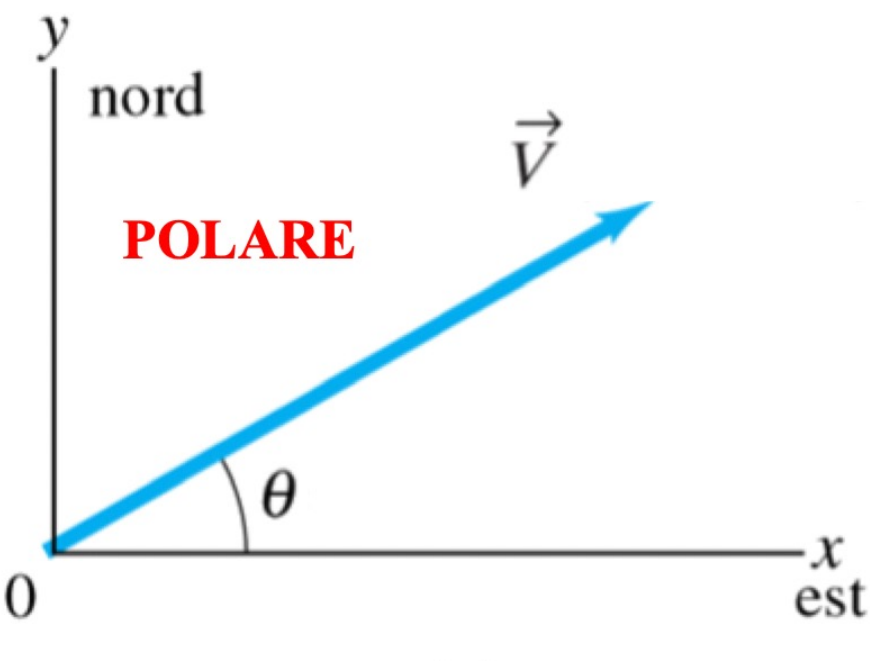
$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

Ai **moduli V_x e V_y delle due componenti** si attribuisce un segno positivo o negativo a seconda che i rispettivi vettori siano rivolti nel verso positivo o negativo degli assi coordinati, ed essi contengono tante informazioni quante il vettore di cui rappresentano le componenti.

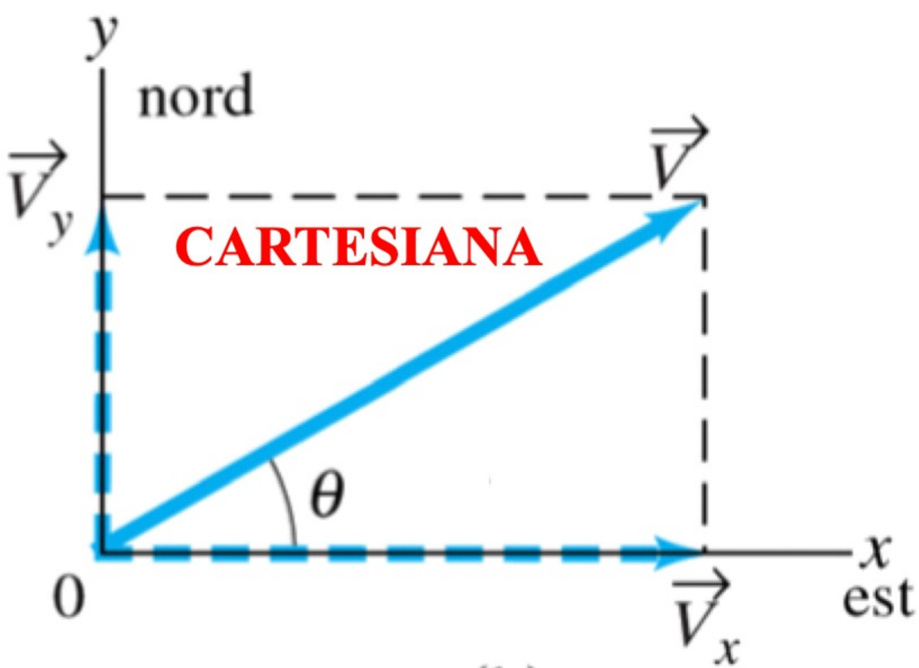
Notare che le componenti di un dato vettore cambiano se cambia la **scelta degli assi coordinati**, cioè del sistema di riferimento. Essendo questa scelta sempre arbitraria, spesso una buona selezione degli assi può ridurre il lavoro necessario per sommare dei vettori.

Rappresentazioni polare e cartesiana di un vettore in 2D

Abbiamo dunque **due modi** per rappresentare un vettore in un dato sistema di coordinate in 2D:
a) Darne il *modulo* V e l'*angolo* che il vettore forma con l'asse x (**rappresentazione polare**)
b) Darne le *componenti* V_x e V_y (**rappresentazione cartesiana**)



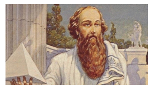
(a)



(b)

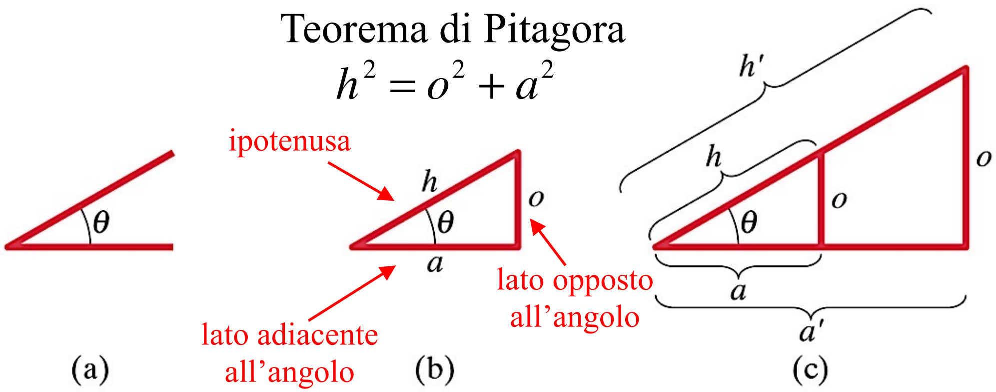
Un po' di trigonometria...☹

Per sommare vettori con il metodo delle componenti dobbiamo ricorrere alle **funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente** (i cui valori sono numeri puri e sono funzioni solo dell'angolo θ, cioè non cambiano se non cambia l'angolo):



Teorema di Pitagora

$$h^2 = o^2 + a^2$$



$$\begin{cases} sen\theta = \dfrac{lato\ \ opposto}{ipotenusa} = \dfrac{o}{h} = \dfrac{o'}{h'} \\ \cos\theta = \dfrac{lato\ \ adiacente}{ipotenusa} = \dfrac{a}{h} = \dfrac{a'}{h'} \\ tg\theta = \dfrac{lato\ \ opposto}{lato\ \ adiacente} = \dfrac{o}{a} = \dfrac{o'}{a'} \end{cases}$$

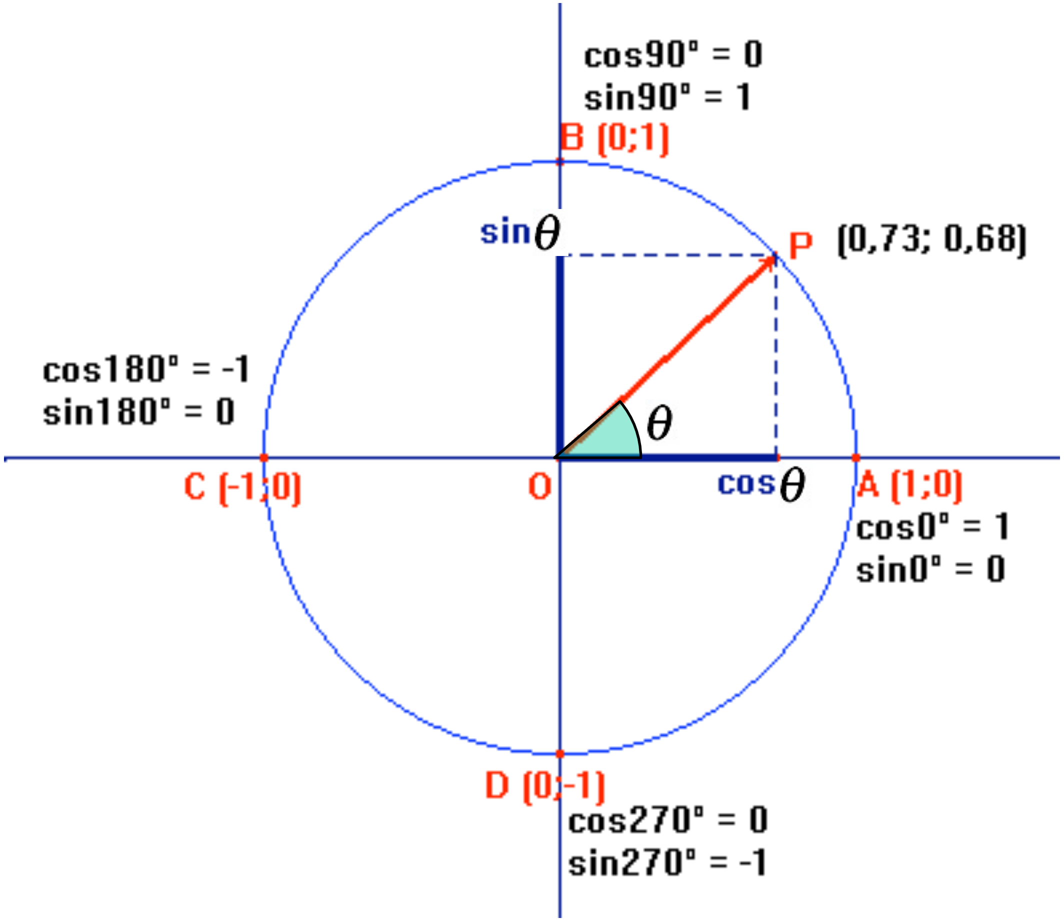
2 utili identità trigonometriche

$$\begin{cases} sen^2\theta + \cos^2\theta = \dfrac{o^2}{h^2} + \dfrac{a^2}{h^2} = \dfrac{o^2 + a^2}{h^2} = \dfrac{h^2}{h^2} = 1 \\ tg\theta = \dfrac{o}{a} = \dfrac{o}{h}\dfrac{h}{a} = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta} \end{cases}$$

(T.Pitagora, per h=1)

(Definizione di tangente)

Variazione delle funzioni trigonometriche sulla circonferenza goniometrica (di centro l'origine e raggio unitario)



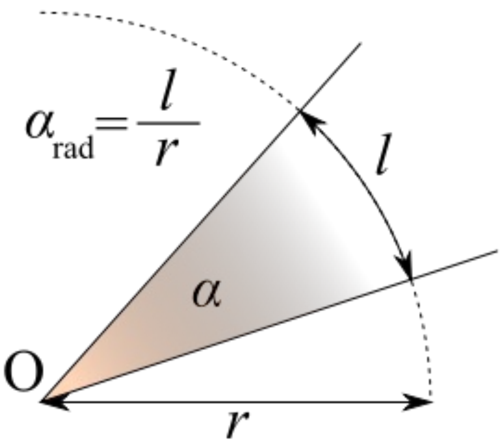
angolo in gradi	seno	coseno
0°	0	1
30°	0,5	0,87
45°	0,71	0,71
60°	0,87	0,5
90°	1	0
180°	0	-1

$$\sin\theta \in [-1,1]$$

$$\cos\theta \in [-1,1]$$

Misura degli angoli nel Sistema Internazionale: il radiante

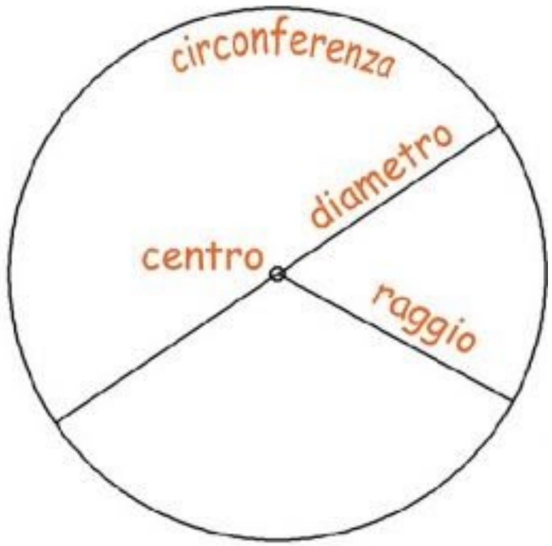
Il **radiante** (rad) è l'unità di misura degli angoli nel Sistema Internazionale (più precisamente si tratta di una unità derivata). Tale misura rappresenta il *rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza spazzato dall'angolo, diviso per la lunghezza del raggio di tale circonferenza*. Ne deriva che un radiante è pari all'ampiezza dell'arco di circonferenza che, rettificato, è uguale al raggio della circonferenza stessa. In altre parole, **un radiante è l'angolo che si ha in corrispondenza di un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza.**



Quanti radianti ci sono in una circonferenza C?

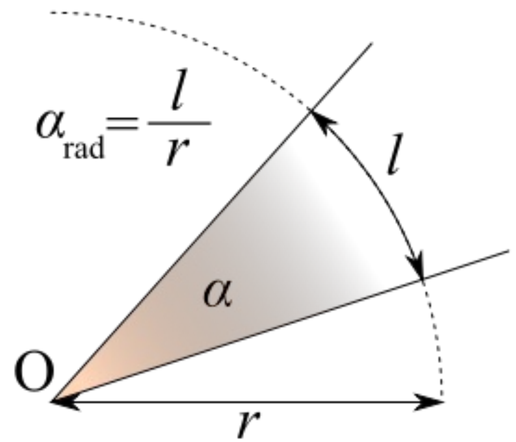
Quante volte il raggio r è contenuto nella circonferenza C?

$$C = 2\pi r \rightarrow \frac{C}{r} = 2\pi$$



Misura degli angoli nel Sistema Internazionale: il radiante

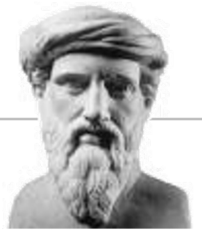
Il **radiante** (rad) è l'unità di misura degli angoli nel Sistema Internazionale (più precisamente si tratta di una unità derivata). Tale misura rappresenta il *rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza spazzato dall'angolo, diviso per la lunghezza del raggio di tale circonferenza*. Ne deriva che un radiante è pari all'ampiezza dell'arco di circonferenza che, rettificato, è uguale al raggio della circonferenza stessa. In altre parole, **un radiante è l'angolo che si ha in corrispondenza di un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza.**



Quanti radianti ci sono in una circonferenza C?

Quante volte il raggio r è contenuto nella circonferenza C?

$$C = 2\pi r \rightarrow \frac{C}{r} = 2\pi$$



Prime 100 mila cifre decimali del pi greco

Si riportano di seguito le prime centomila e uno cifre del pi greco: quella delle unità, 3, seguita dalle prime centomila cifre decimali.[4]

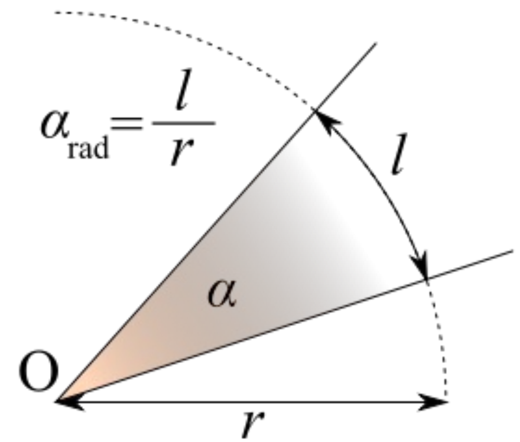
3,

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 8214808651 3282306647
0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165
2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360
0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724
8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872 1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235 4201995611 2129021960
8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859 5024459455 3469083026 4252230825 3344685035
2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303 5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 1857780532
1712268066 1300192787 6611195909 2164201989 3809525720 1065485863 2788659361 5338182796 8230301952 0353018529 6899577362 2599413891

• •

Misura degli angoli nel Sistema Internazionale: il radiante

Il **radiante** (rad) è l'unità di misura degli angoli nel Sistema Internazionale (più precisamente si tratta di una unità derivata). Tale misura rappresenta il *rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza spazzato dall'angolo, diviso per la lunghezza del raggio di tale circonferenza*. Ne deriva che un radiante è pari all'ampiezza dell'arco di circonferenza che, rettificato, è uguale al raggio della circonferenza stessa. In altre parole, **un radiante è l'angolo che si ha in corrispondenza di un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza.**



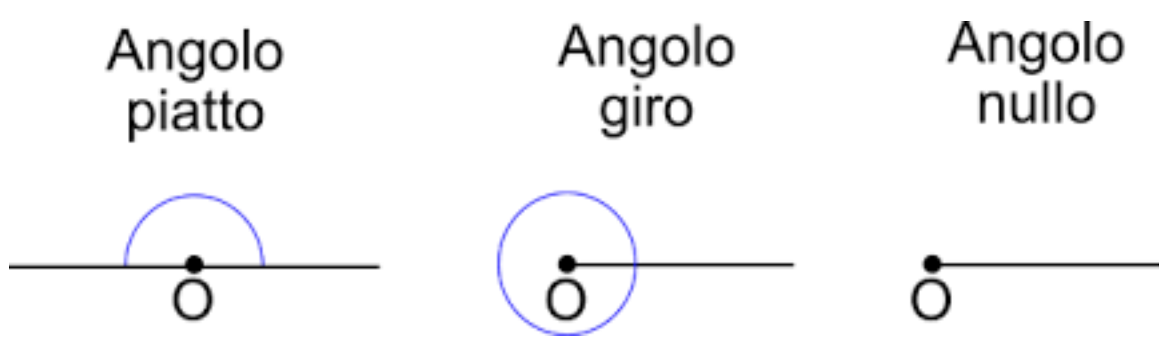
Quanti radianti ci sono in una circonferenza C?

Quante volte il raggio r è contenuto nella circonferenza C?

$$C = 2\pi r \rightarrow \frac{C}{r} = 2\pi$$

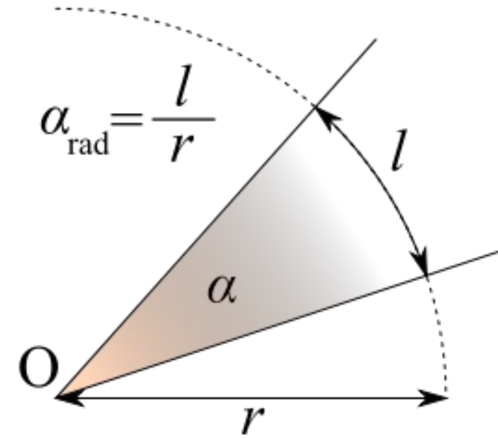
$$\rightarrow 1 \text{ angolo giro} = 360° = 2\pi \text{ rad}$$

$$\rightarrow 1 \text{ angolo piatto} = 180° = \pi \text{ rad}$$



Misura degli angoli nel Sistema Internazionale: il radiante

Il **radiante** (rad) è l'unità di misura degli angoli nel Sistema Internazionale (più precisamente si tratta di una unità derivata). Tale misura rappresenta il *rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza spazzato dall'angolo, diviso per la lunghezza del raggio di tale circonferenza*. Ne deriva che un radiante è pari all'ampiezza dell'arco di circonferenza che, rettificato, è uguale al raggio della circonferenza stessa. In altre parole, **un radiante è l'angolo che si ha in corrispondenza di un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza.**



Quanti radianti ci sono in una circonferenza C?

Quante volte il raggio r è contenuto nella circonferenza C?

$$C = 2\pi r \rightarrow \frac{C}{r} = 2\pi$$

$$\rightarrow 1\ angolo\ giro = 360° = 2\pi\ rad$$

$$\rightarrow 1\ angolo\ piatto = 180° = \pi\ rad$$

Come si trasformano i gradi in radianti e viceversa?

$$\frac{\alpha°}{360°} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi}$$

$$\alpha° = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi} 360° = \frac{\alpha_{rad}}{\pi} 180°$$

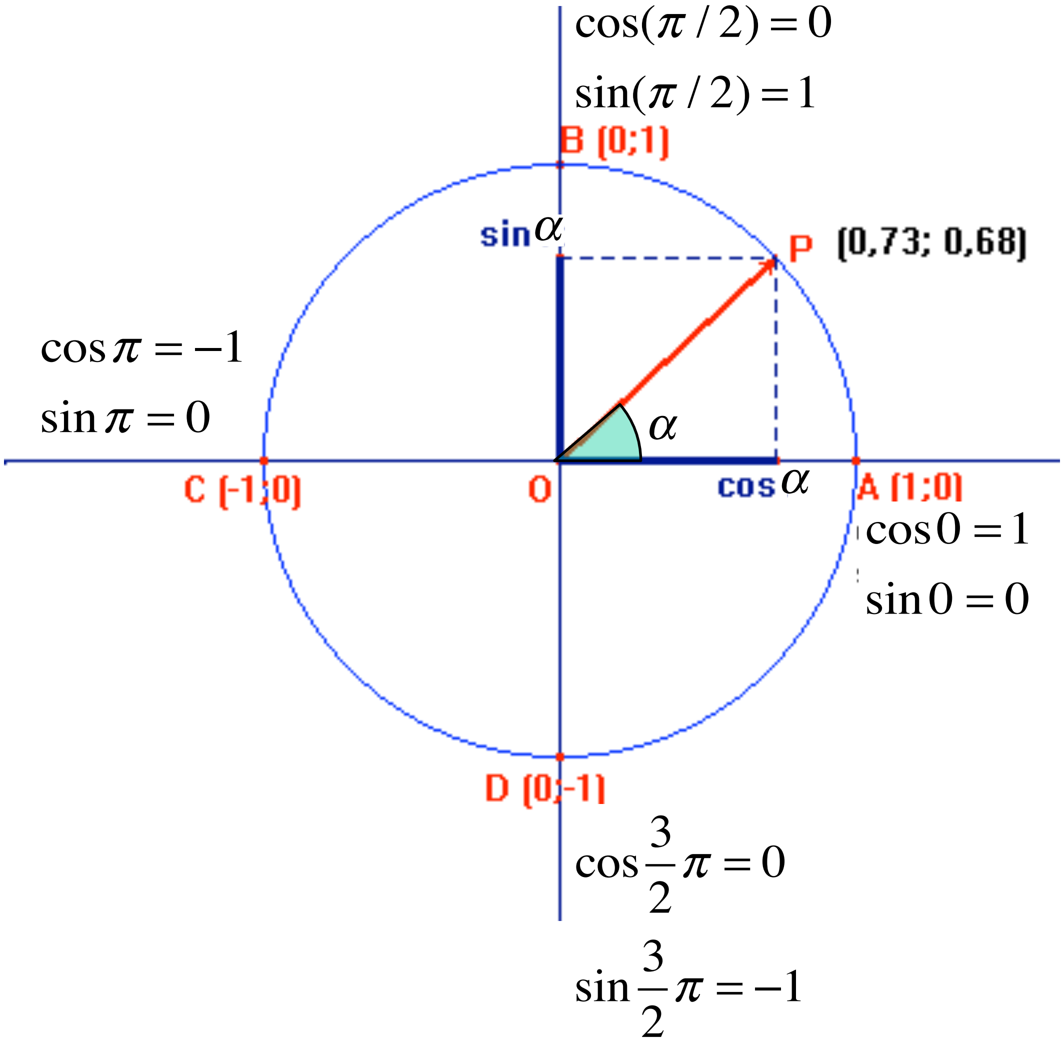
$$\alpha_{rad} = \frac{\alpha°}{360°} 2\pi = \frac{\alpha°}{180°} \pi$$

A quanti gradi corrisponde un radiante e viceversa?

$$\alpha° = \frac{1}{\pi} 180° = 57.29°$$

$$\alpha_{rad} = \frac{1°}{180°} \pi = 0.017$$

Variazione delle funzioni trigonometriche sulla circonferenza goniometrica per angoli espressi in radianti

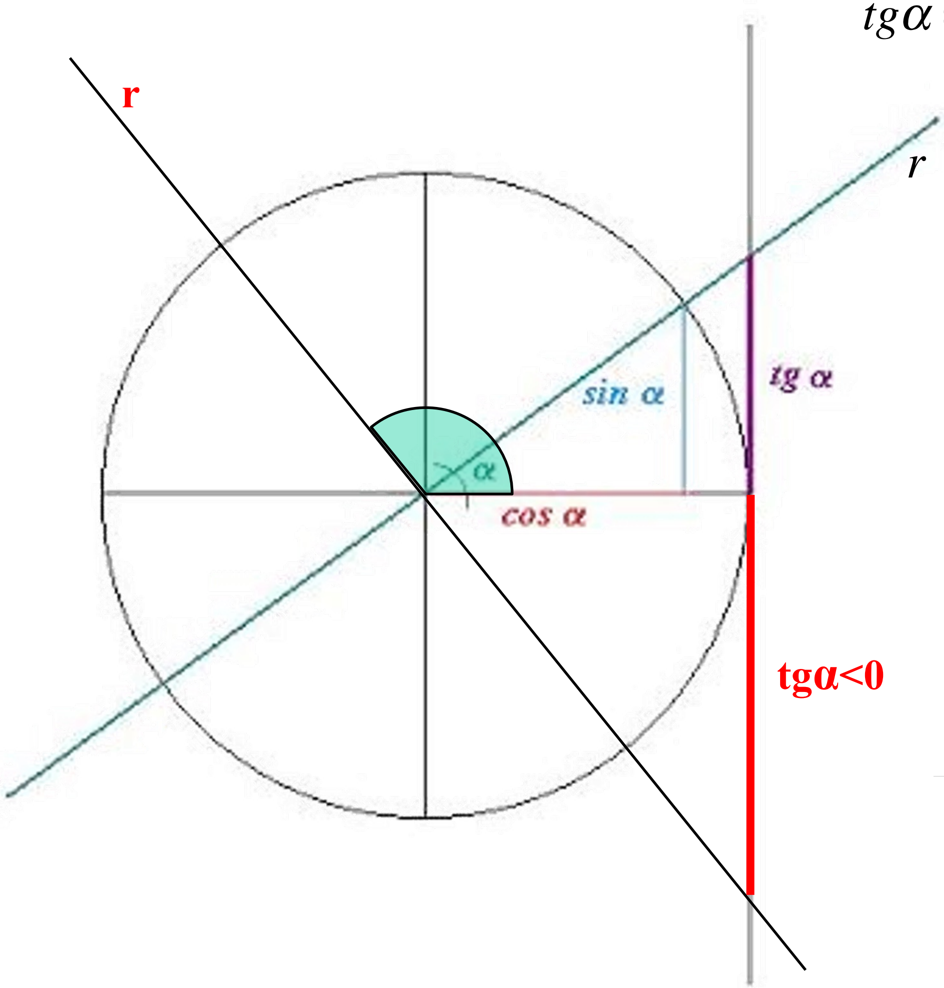


angolo in gradi	angolo in radianti	seno	coseno
0°	0	0	1
30°	0,52	0,5	0,87
45°	0,79	0,71	0,71
60°	1,05	0,87	0,5
90°	1,57	1	0
180°	3,14	0	-1

Tangente di un angolo e coefficiente angolare di una retta r: y = mx

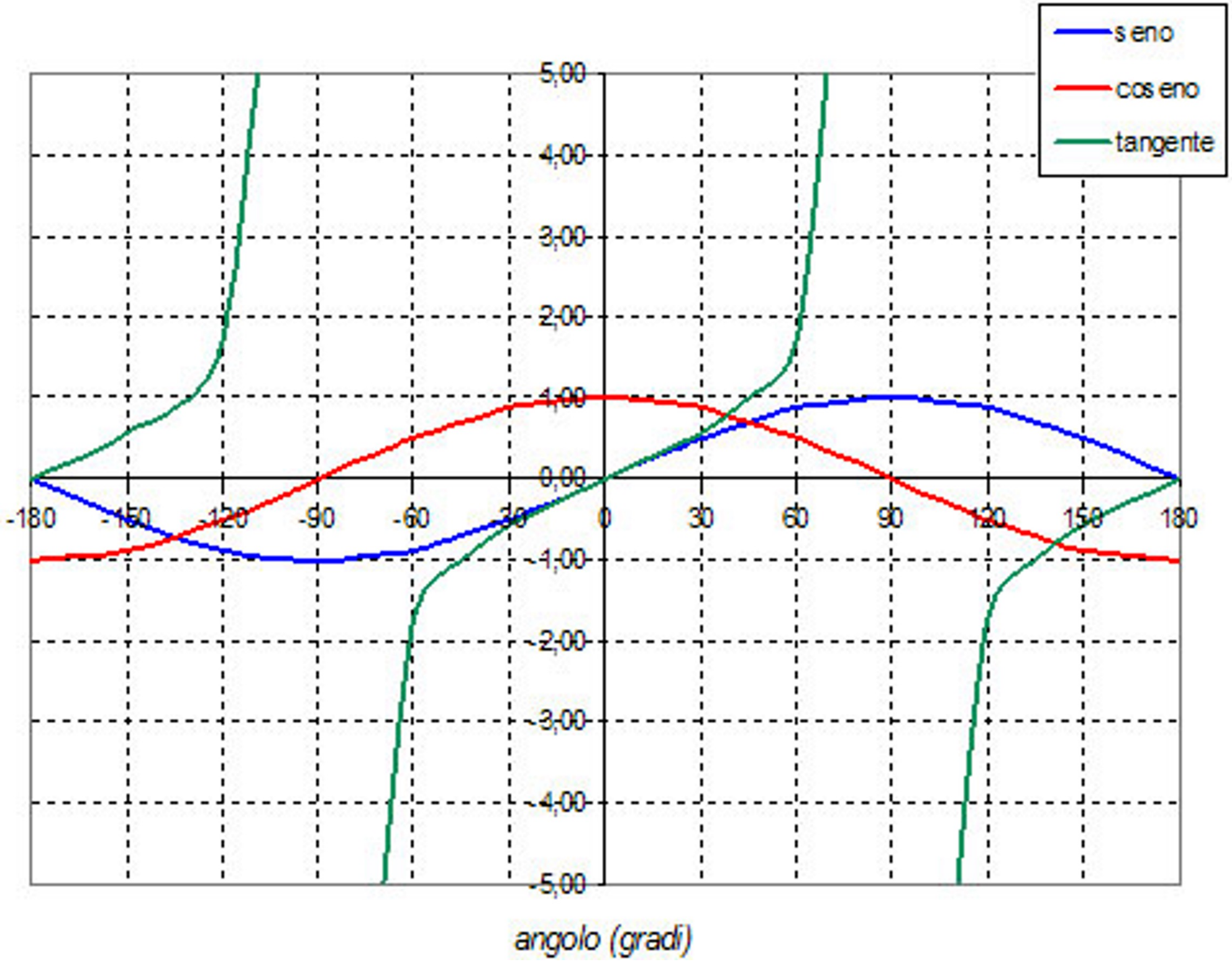
$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = m$$

Coefficiente angolare della retta r



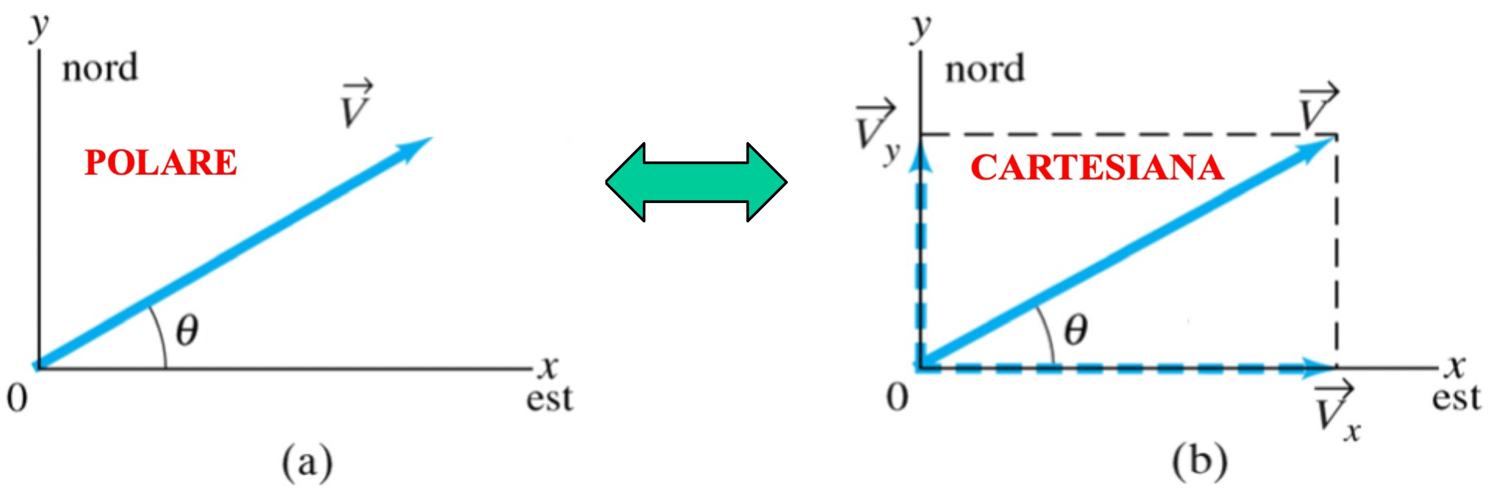
angolo in gradi	angolo in radianti	seno	coseno	tangente
0°	0	0	1	0
30°	0,52	0,5	0,87	0,58
45°	0,79	0,71	0,71	1
60°	1,05	0,87	0,5	1,73
90°	1,57	1	0	--
180°	3,14	0	-1	0

Grafico delle funzioni trigonometriche



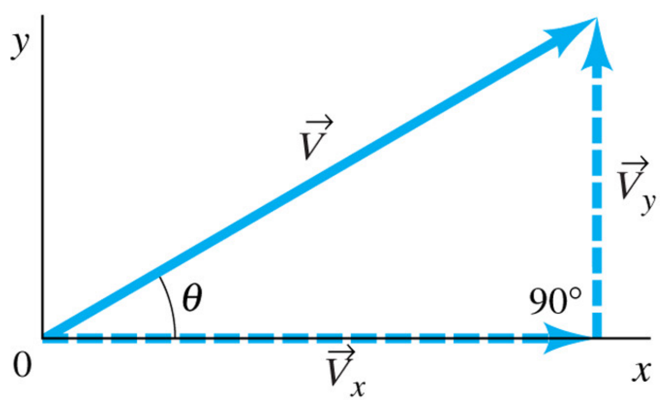
Cambiare la rappresentazione di un vettore

Le funzioni trigonometriche sono indispensabili per cambiare la rappresentazione di un vettore:



POLARE → CARTESIANA

$$\begin{cases} sen\theta = \dfrac{V_y}{V} \rightarrow V_y = V sen\theta \\ \cos\theta = \dfrac{V_x}{V} \rightarrow V_x = V\cos\theta \end{cases}$$



CARTESIANA → POLARE

T. di Pitagora:

$$V^2 = V_x^{\ 2} + V_y^{\ 2} \rightarrow V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$tg\theta = \frac{V_y}{V_x} \rightarrow \theta = arctg\frac{V_y}{V_x}$$

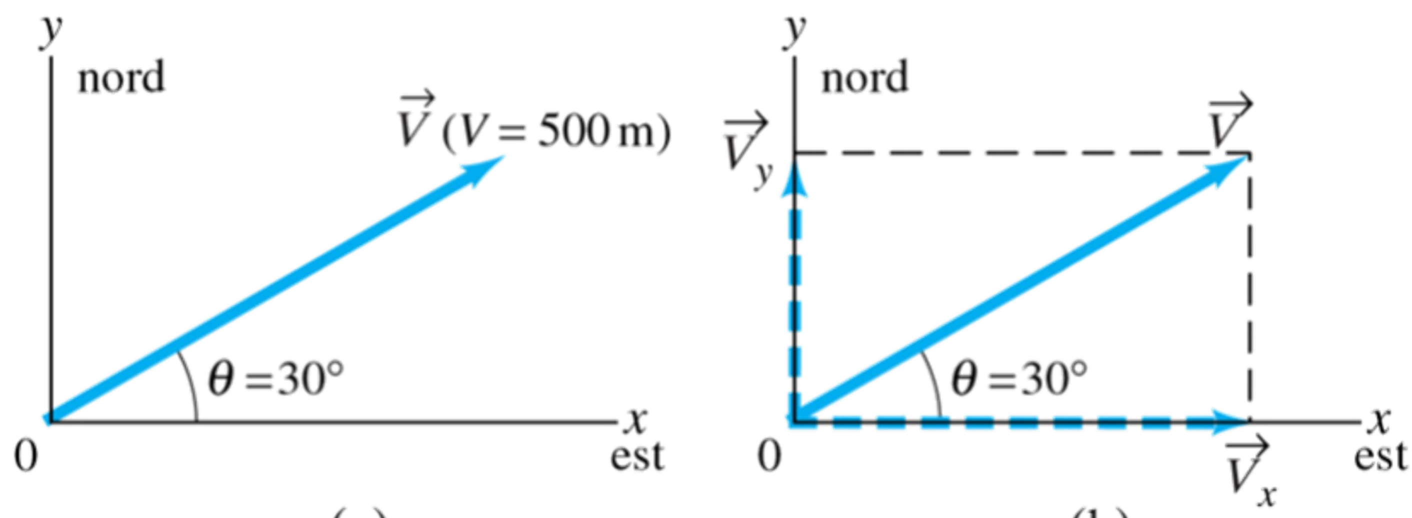
Cambiare la rappresentazione di un vettore: un esempio

Esempio. Supponiamo che il vettore in figura (a) rappresenti uno spostamento di 500m in direzione 30° nord, rispetto ad est (*rappresentazione polare*). Sapendo che sen 30° = 0.500 e cos 30° = 0.866, dalle formule appena viste avremo, nella *rappresentazione cartesiana*:

$$V_x = V\cos(30°) = (500m)(0.866) = 433m \ (est) \qquad V_y = Vsen(30°) = (500m)(0.500) = 250m \ (nord)$$

Da qui è anche possibile tornare indietro e ricavare il modulo e l'angolo (*rappresentazione polare*) per mezzo delle trasformazioni inverse:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(433m)^2 + (250m)^2} = 500m \qquad tg\theta = \frac{V_y}{V_x} \rightarrow \theta = arctg\frac{V_y}{V_x} = arctg\frac{250m}{433m} = 30°$$

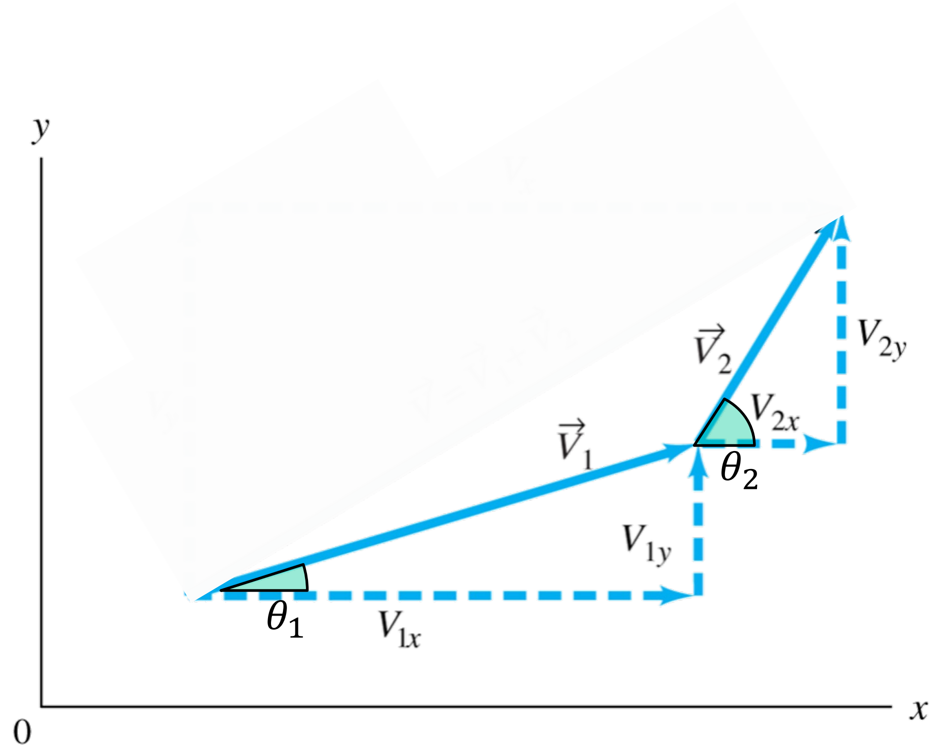


(a) (b)

Somma di vettori per mezzo delle componenti

Per sommare due vettori $\overrightarrow{V_1}$ e $\overrightarrow{V_2}$ utilizzando il **metodo delle componenti** occorre innanzitutto scomporre i due vettori nelle loro componenti proiettandoli lungo gli assi coordinati:

$$\begin{cases} V_{1x} = V_1 \cos\theta_1 \\ V_{1y} = V_1 \sin\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{2x} = V_2 \cos\theta_2 \\ V_{2y} = V_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$



Somma di vettori per mezzo delle componenti

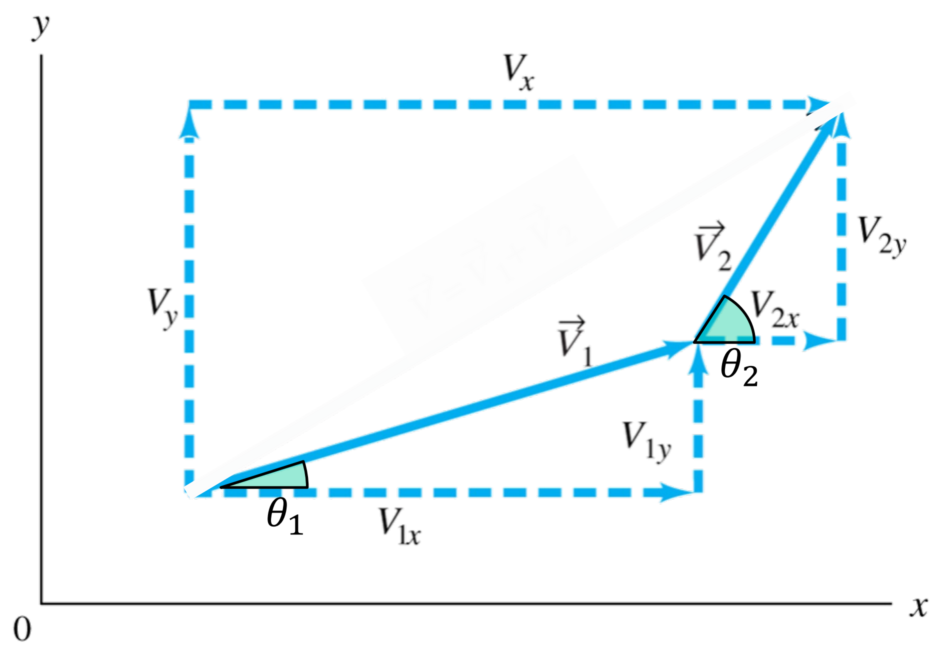
Per sommare due vettori $\overrightarrow{V_1}$ e $\overrightarrow{V_2}$ utilizzando il **metodo delle componenti** occorre innanzitutto scomporre i due vettori nelle loro componenti proiettandoli lungo gli assi coordinati:

$$\begin{cases} V_{1x} = V_1 \cos\theta_1 \\ V_{1y} = V_1 \sin\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{2x} = V_2 \cos\theta_2 \\ V_{2y} = V_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

dopodiché avremo che le componenti V_x e V_y del vettore risultante, incognito, saranno uguali – rispettivamente – alla somma (**algebrica**, trattandosi di scalari – anche negativi) delle componenti x e y dei due vettori originari:

Rappresentazione cartesiana

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \rightarrow \begin{cases} V_x = V_{1x} + V_{2x} \\ V_y = V_{1y} + V_{2y} \end{cases}$$



Somma di vettori per mezzo delle componenti

Per sommare due vettori $\overrightarrow{V_1}$ e $\overrightarrow{V_2}$ utilizzando il **metodo delle componenti** occorre innanzitutto scomporre i due vettori nelle loro componenti proiettandoli lungo gli assi coordinati:

$$\begin{cases} V_{1x} = V_1 \cos\theta_1 \\ V_{1y} = V_1 \sin\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{2x} = V_2 \cos\theta_2 \\ V_{2y} = V_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

dopodiché avremo che le componenti V_x e V_y del vettore risultante, incognito, saranno uguali – rispettivamente – alla somma (**algebrica**, trattandosi di scalari – anche negativi) delle componenti x e y dei due vettori originari:

Rappresentazione cartesiana

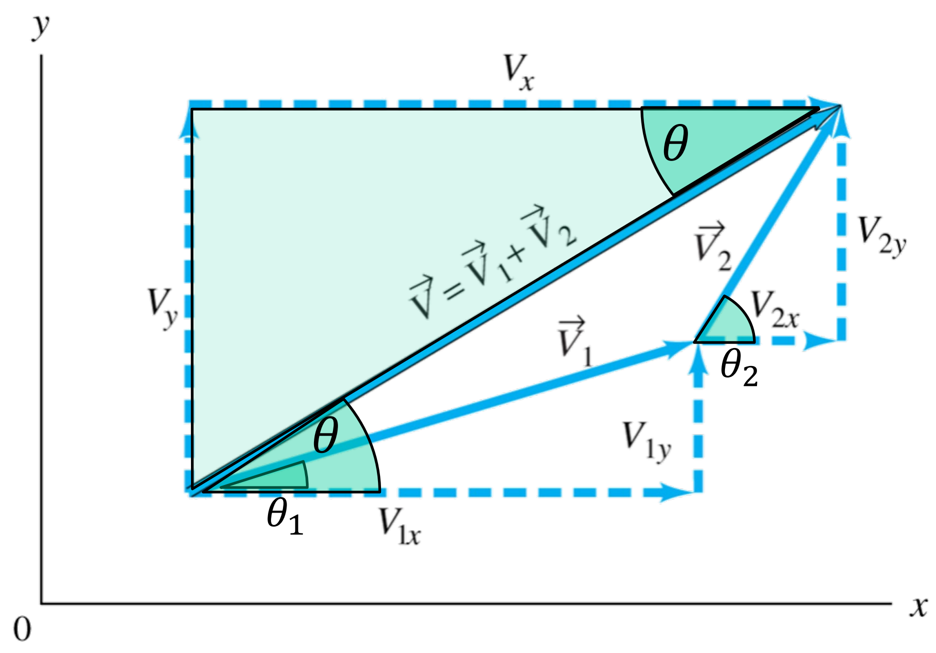
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \rightarrow \begin{cases} V_x = V_{1x} + V_{2x} \\ V_y = V_{1y} + V_{2y} \end{cases}$$

da cui si possono poi ottenere modulo e direzione del vettore **risultante** per mezzo delle seguenti trasformazioni:

Rappresentazione polare

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}}$$

$$tg\theta = \frac{V_y}{V_x} \quad \rightarrow \theta = arctg\frac{V_y}{V_x}$$



Somma di vettori per mezzo delle componenti

Come già detto, è importante ricordare che le componenti di un dato vettore cambiano se cambia la **scelta degli assi coordinati**, cioè del sistema di riferimento. In generale **conviene scegliere uno degli assi nella stessa direzione di uno dei vettori da sommare**, il quale avrà dunque una sola componente non nulla!). Vediamo subito un esempio…

Rappresentazione cartesiana

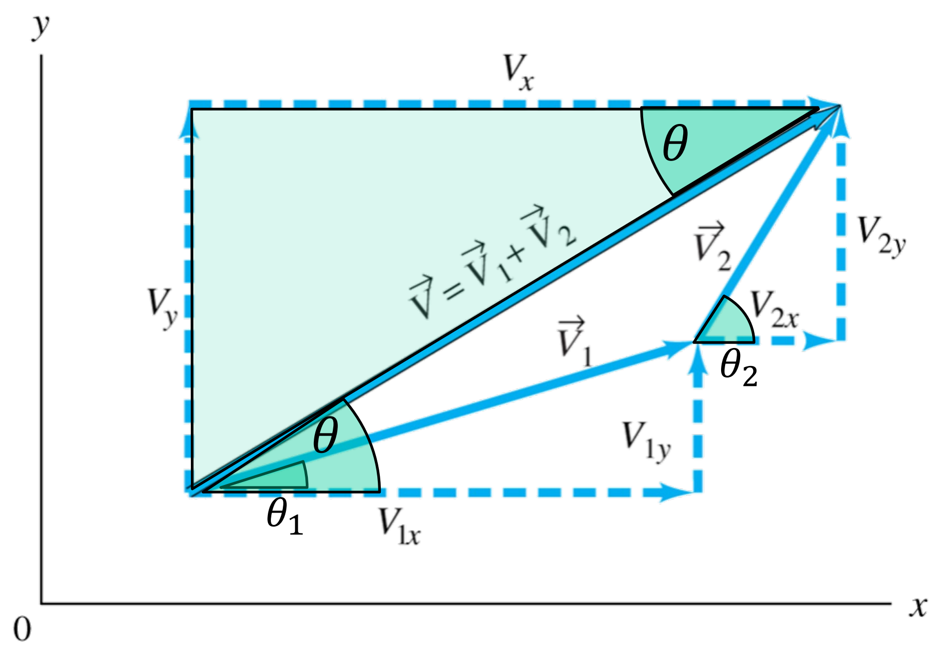
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \rightarrow \begin{cases} V_x = V_{1x} + V_{2x} \\ V_y = V_{1y} + V_{2y} \end{cases}$$

da cui si possono poi ottenere modulo e direzione del vettore **risultante** per mezzo delle seguenti trasformazioni:

Rappresentazione polare

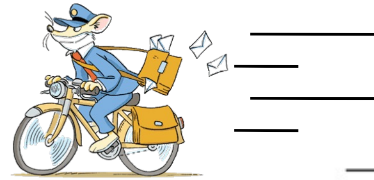
$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}}$$

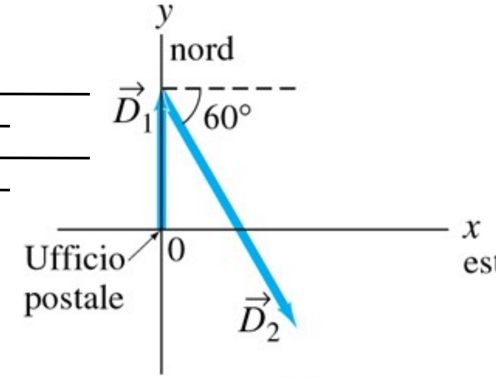
$$tg\theta = \frac{V_y}{V_x} \quad \rightarrow \theta = arctg\frac{V_y}{V_x}$$



Esempio

Un maldestro postino di campagna lascia l'ufficio postale e guida per 22.0 km in direzione nord, quindi prosegue in direzione 60.0° sud rispetto ad est per 47.0 km verso un'altra città. Qual'è il suo spostamento complessivo rispetto all'ufficio postale?





(a)

Soluzione

Scelta la direzione est come asse x positivo e la nord come y positivo, scomponiamo ogni vettore spostamento nelle sue componenti:

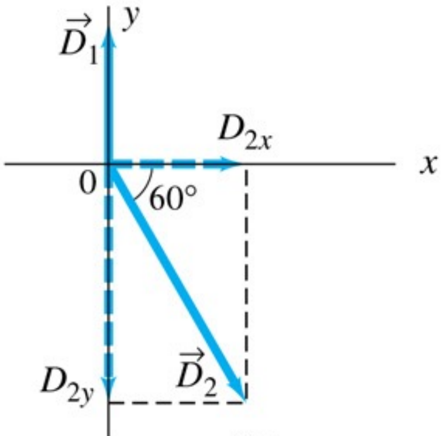
$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = 0km \\ D_{1y} = 22.0km \end{cases}$$

$$\vec{D}_2 \begin{cases} D_{2x} = (47.0km)(\cos 60°) = (47.0km)(0.500) = 23.5km \\ D_{2y} = (47.0km)(sen 60°) = -(47.0km)(0.866) = -40.7km \end{cases}$$

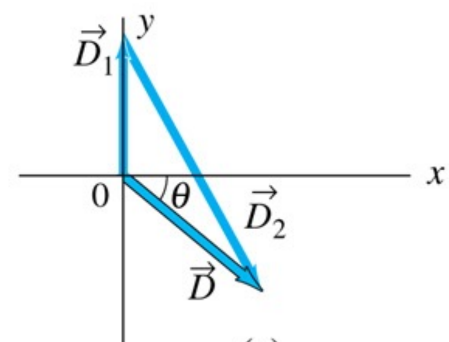
$$\vec{D} \begin{cases} D_x = D_{1x} + D_{2x} = 0km + 23.5km = +23.5km \\ D_y = D_{1y} + D_{2y} = 22.0km + (-40.7km) = -18.7km \end{cases}$$

$$D = \sqrt{D_x{}^2 + D_y{}^2} = \sqrt{(23.5km)^2 + (-18.7km)^2} = 30.0km$$

$$tg\theta = \frac{D_y}{D_x} = \frac{-18.7km}{23.5km} = -0.796 \rightarrow \theta = arctg(-0.796) = -38.5°$$

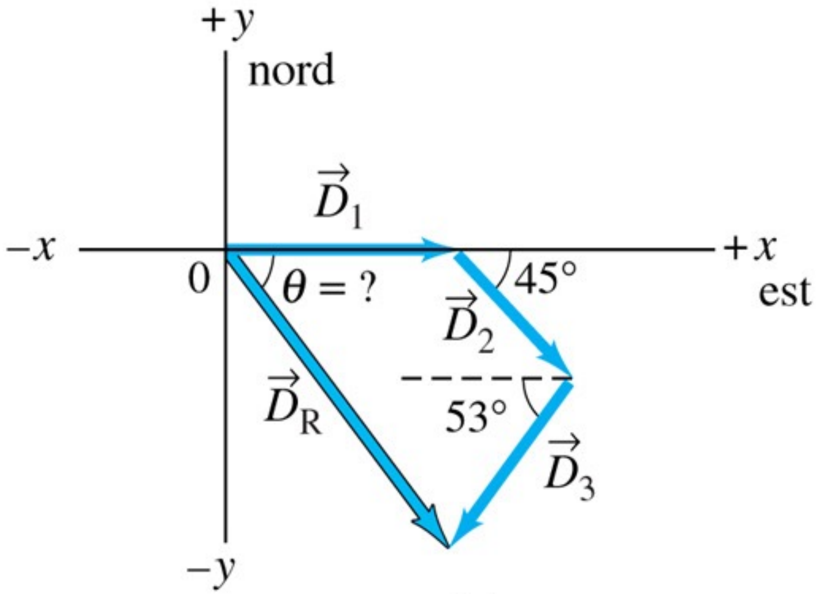


(b)



(c)

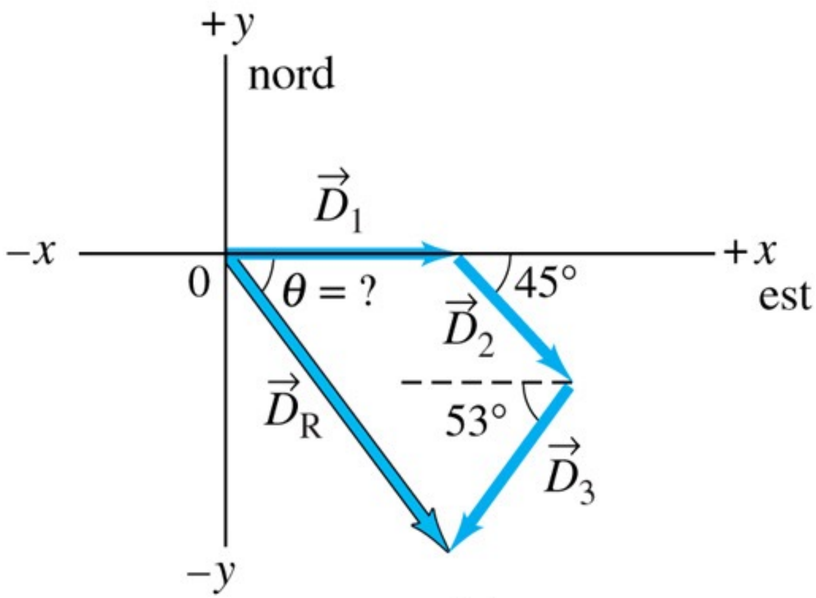
Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?



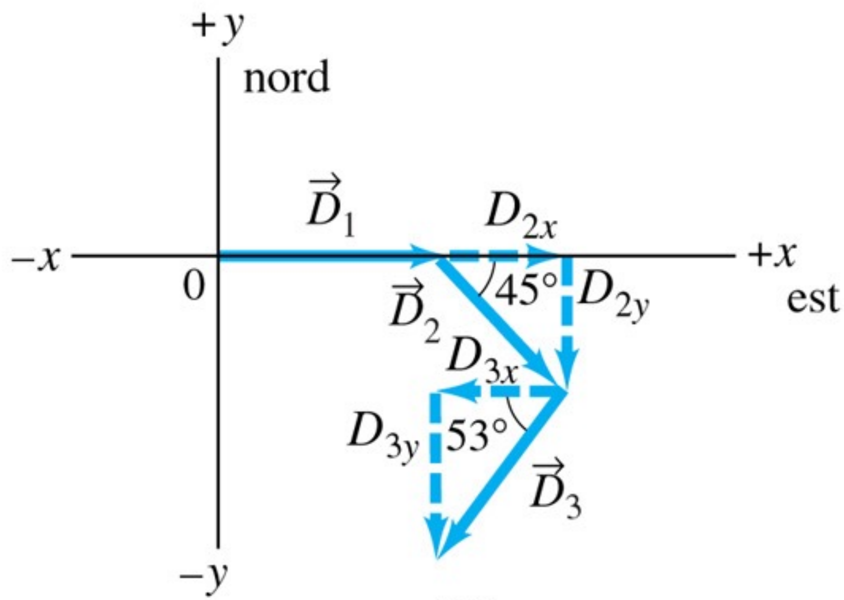
(a)

Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



(a)



(b)