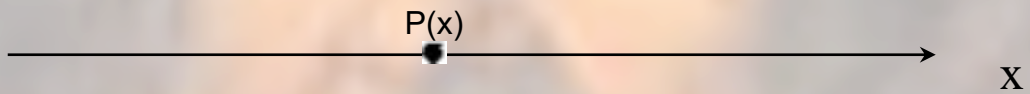


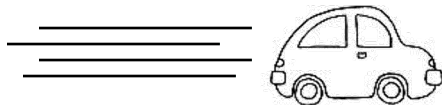
Cinematica in una dimensione

1D





La Velocità Media e il Moto Uniforme



La **velocità** di un oggetto si definisce come la distanza percorsa dall'oggetto durante il suo cammino divisa per il tempo impiegato a percorrere tale distanza

Velocità scalare media

$$\bar{v} = \frac{\text{distanza percorsa}}{\text{tempo trascorso}}$$

unità di misura: metri al secondo (m/s)

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Equazione del moto uniforme (cioè a velocità costante $v = \bar{v}$)

→ $x(t) = x_0 + vt$ → Equazione di una retta, del tipo: $y = q + mx$

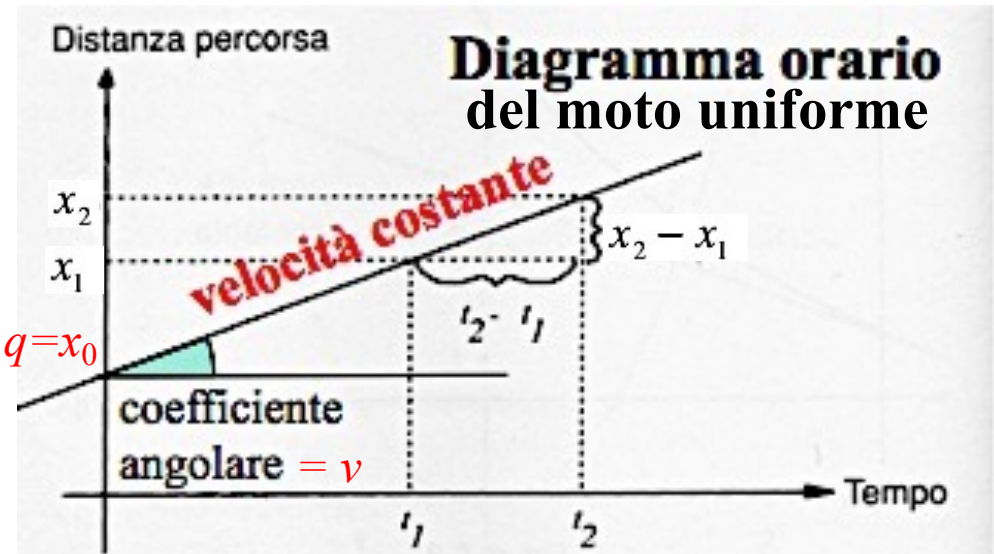


Figura 6-4
Per calcolare una velocità costante, dividiamo la differenza fra due distanze percorse ($x_2 - x_1$) per la differenza fra i tempi impiegati per percorrerle ($t_2 - t_1$).

La Velocità Istantanea e il Calcolo Infinitesimale

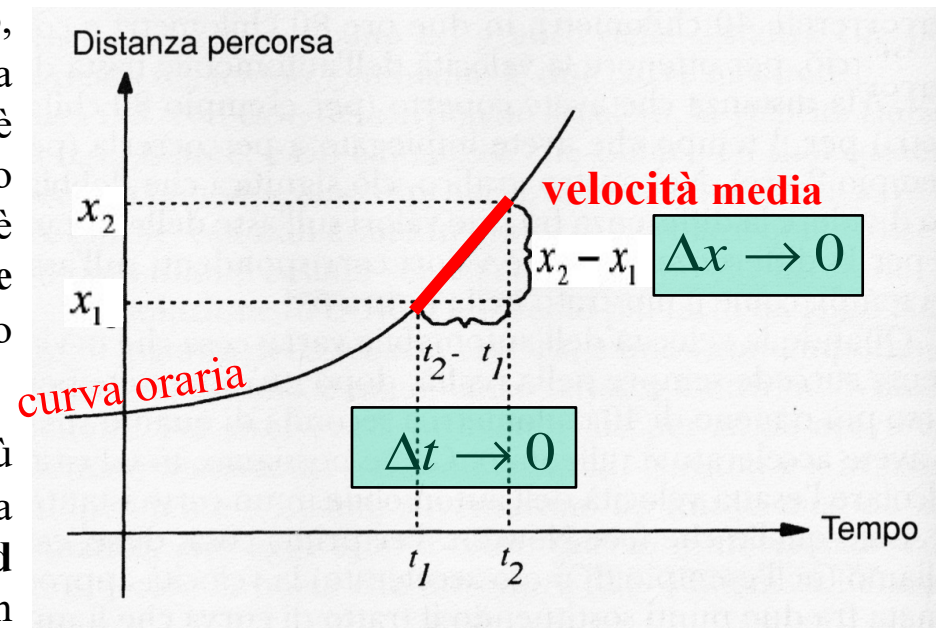
Grazie al nuovo metodo introdotto da Cartesio, già nel XVII secolo si era in grado di calcolare la velocità media di un corpo. Ma né Galileo, né Cartesio, né i loro contemporanei, erano in grado di calcolare la **velocità istantanea** di un corpo né tantomeno di descrivere il **moto di un corpo che procede a velocità variabile**, crescente o decrescente.

La soluzione al problema fu trovata un secolo più tardi da **Isaac Newton**, il vero gigante della fisica classica, e dal grande filosofo e logico **Gottfried Leibniz**, i quali nel XVIII secolo inventarono un nuovo metodo matematico noto come **calcolo infinitesimale**.

Newton



Leibniz



Con questo metodo la **velocità istantanea** resta definita attraverso un ‘passaggio al limite’ come la *velocità media durante un intervallo di tempo infinitamente piccolo* (cioè, al limite, per Δt tendente a zero):

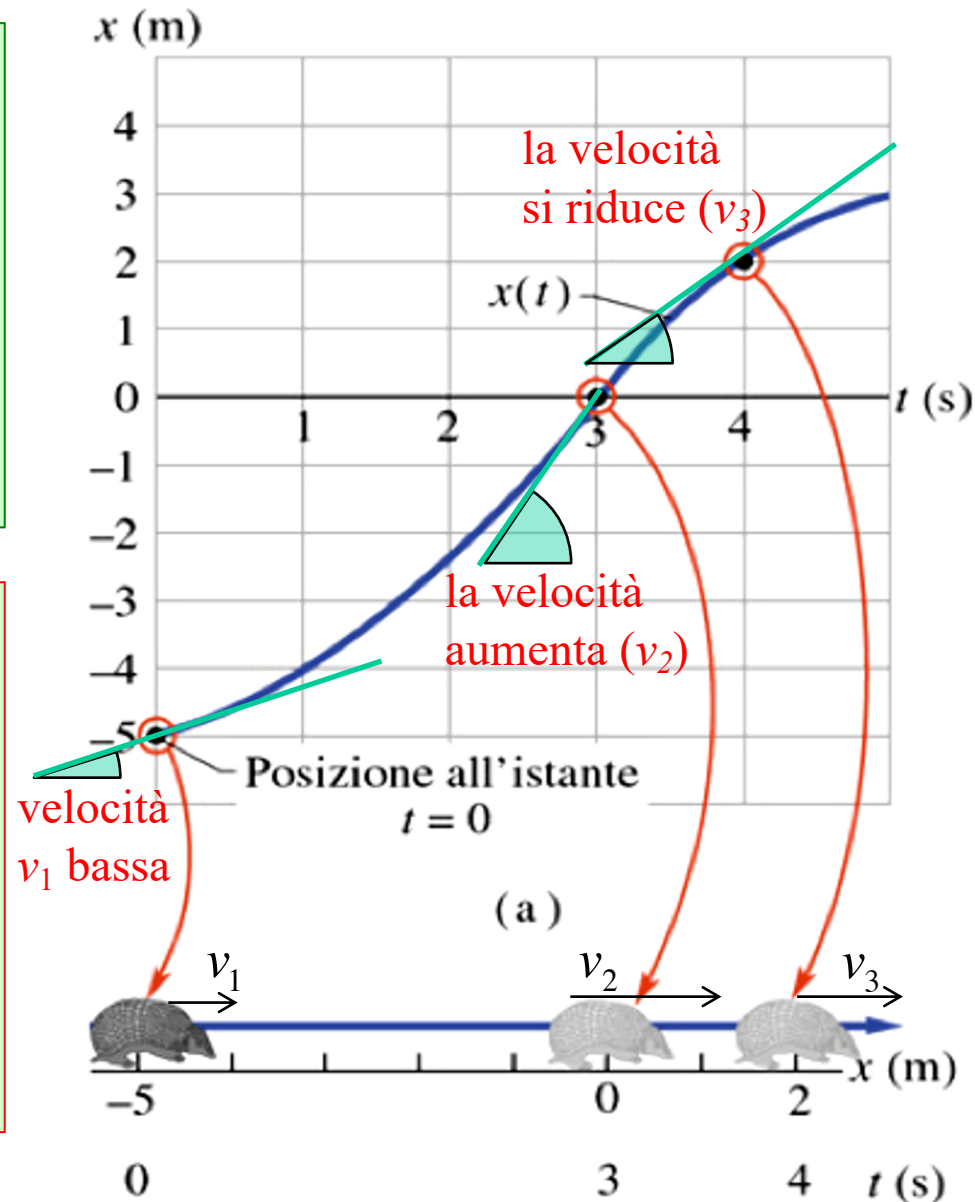
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocità istantanea è la derivata prima dello spostamento!

La velocità istantanea non è nient'altro che la **derivata prima** dello spazio rispetto al tempo calcolata in un certo istante di tempo e coincide con il **coefficiente angolare della retta tangente** alla curva oraria $x(t)$ in quell'istante di tempo:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Anche la **velocità**, come lo spostamento, è una **grandezza vettoriale**. Nel caso unidimensionale il suo modulo coincide con la velocità scalare. Una **velocità negativa** (cioè un eventuale **coefficiente angolare negativo** della retta tangente nel diagramma orario) indica semplicemente un verso di percorrenza nel senso delle x decrescenti.



Accelerazione media

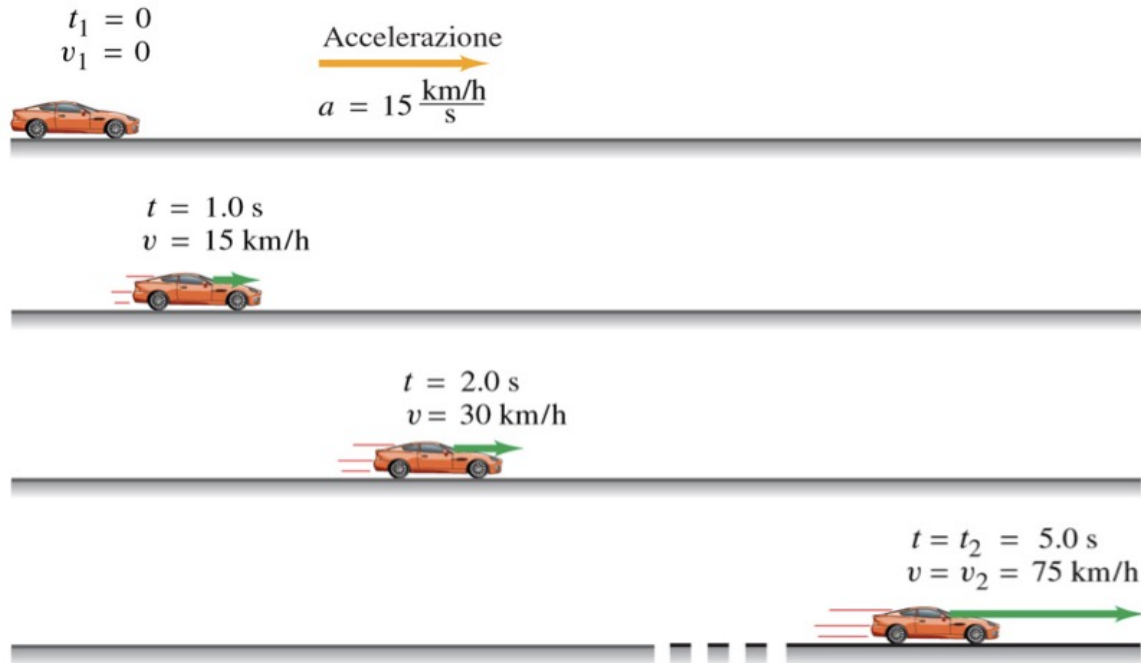
Quando la velocità di un corpo varia si dice che esso è sottoposto ad una **accelerazione** (o che sta accelerando). L'accelerazione media si calcola come rapporto tra la variazione di velocità ($v_2 - v_1$) e l'intervallo di tempo ($t_2 - t_1$) impiegato per farla variare:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

unità di misura: metri al secondo quadrato (m/s^2)

Esempio

Accelerazione media di un'auto che, partendo da ferma su una strada diritta, passa da 0 a 75 km/h in 5.0 secondi:



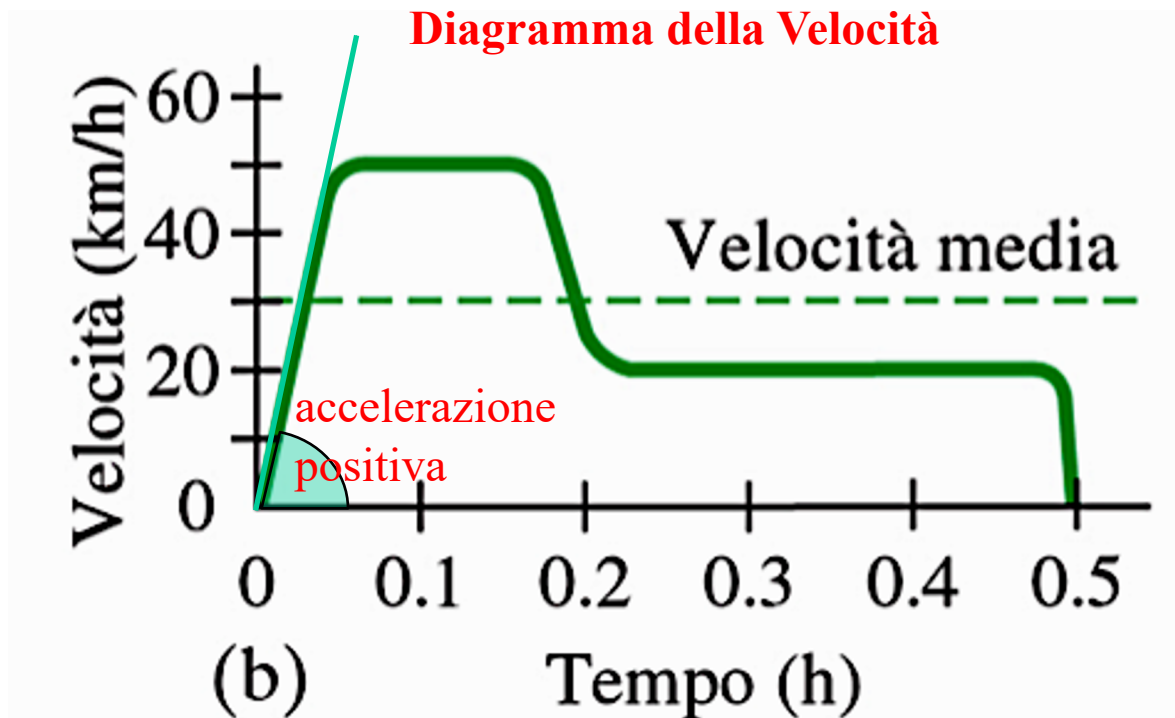
$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{75 km/h - 0 km/h}{5.0 s} = 15 \frac{km/h}{s} \left(\frac{1000 m}{1 km} \right) \left(\frac{1 h}{3600 s} \right) = 4.2 m/s^2$$

Accelerazione istantanea

L'**accelerazione istantanea** (o semplicemente accelerazione) è la rapidità di variazione della velocità in un certo istante ed è matematicamente rappresentata dalla derivata prima della velocità rispetto al tempo:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Geometricamente rappresenta dunque la **pendenza della curva v(t)** in un certo punto.



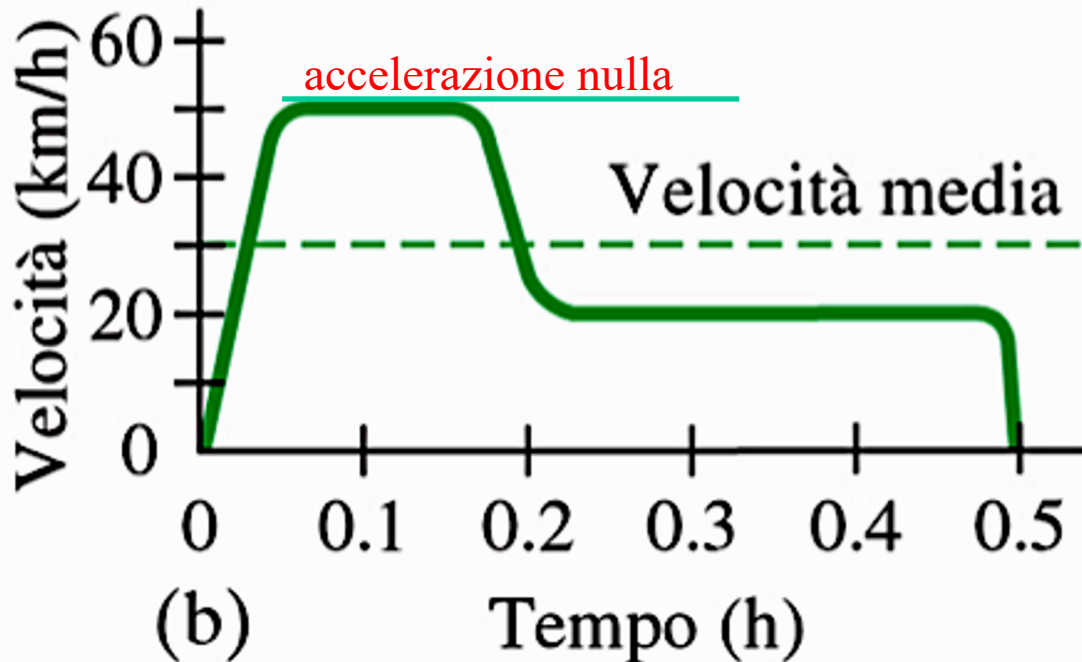
Accelerazione istantanea

L'**accelerazione istantanea** (o semplicemente accelerazione) è la rapidità di variazione della velocità in un certo istante ed è matematicamente rappresentata dalla derivata prima della velocità rispetto al tempo:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Geometricamente rappresenta dunque la **pendenza della curva $v(t)$** in un certo punto.

Diagramma della Velocità



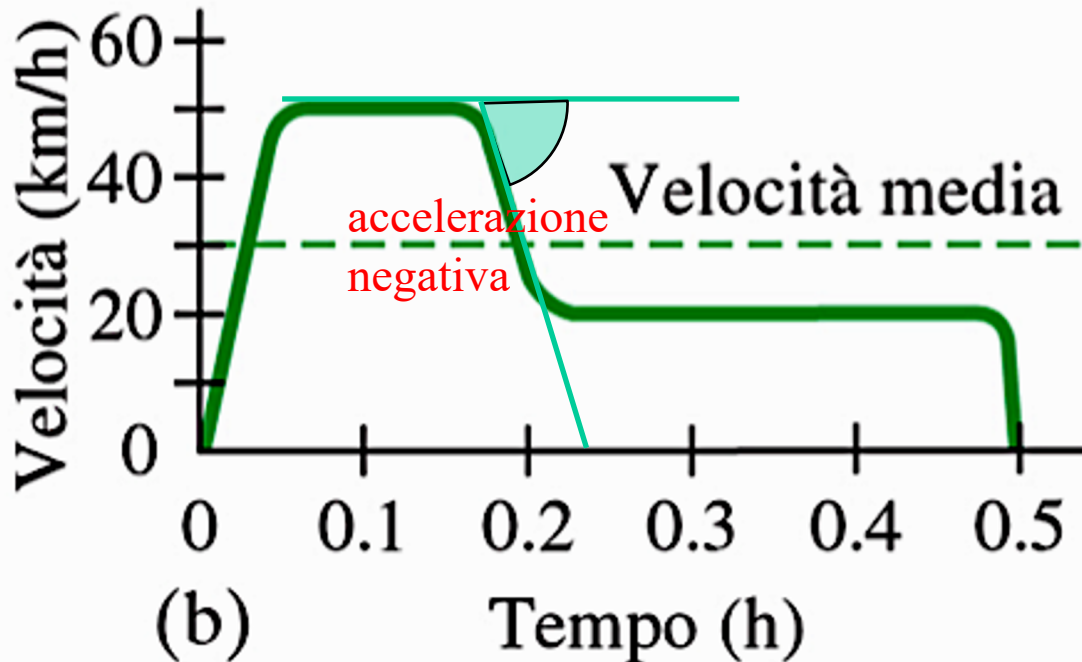
Accelerazione istantanea

L'**accelerazione istantanea** (o semplicemente accelerazione) è la rapidità di variazione della velocità in un certo istante ed è matematicamente rappresentata dalla derivata prima della velocità rispetto al tempo:

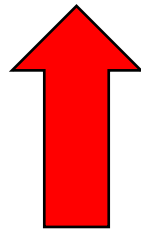
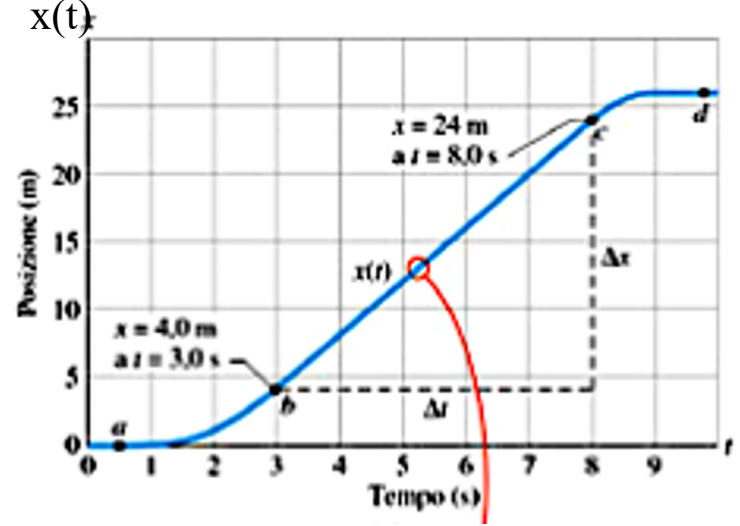
$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Geometricamente rappresenta dunque la **pendenza della curva v(t)** in un certo punto.

Diagramma della Velocità



Esempio. Consideriamo il moto della **cabina di un ascensore** che è inizialmente ferma, poi si muove verso l'alto (considerato come verso positivo) e infine si arresta. Immaginiamo di conoscere il suo **diagramma orario $x(t)$** e cerchiamo di capire come disegnare il **diagramma della velocità $v(t)$** e quello **dell'accelerazione $a(t)$** ...



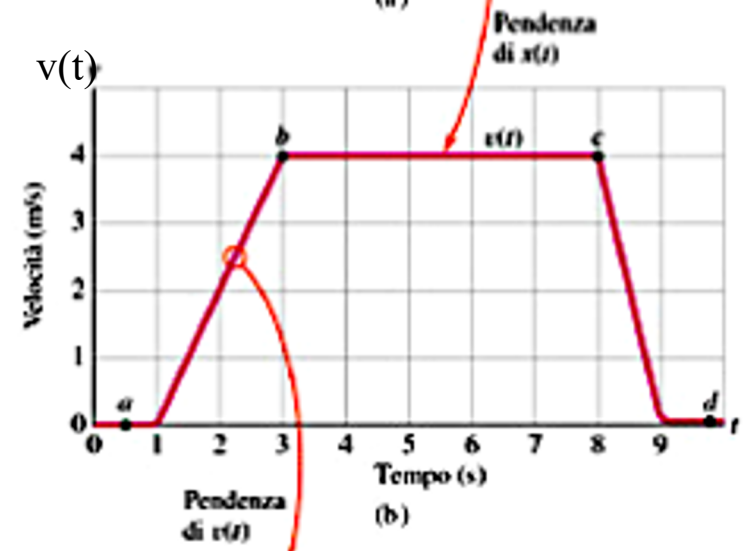
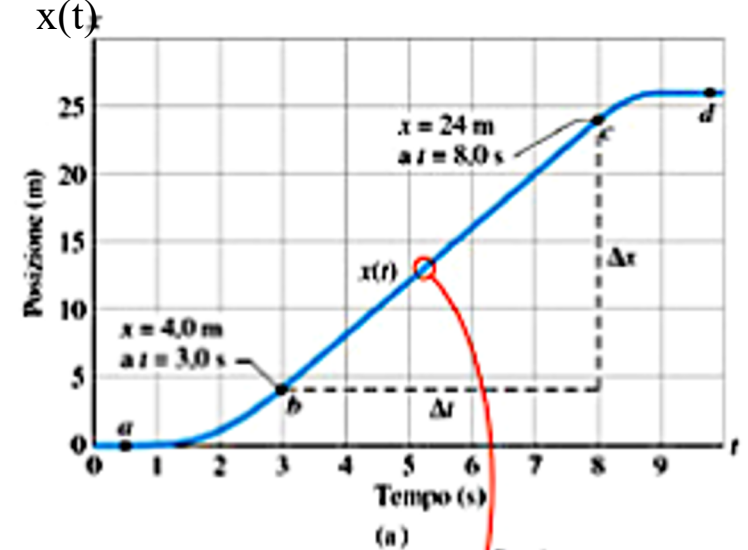
IDEA CHIAVE 1: ricavare la velocità in qualsiasi istante dalla pendenza della curva $x(t)$ in quell'istante

Punti a e d : pendenza e velocità sono entrambe nulle quando la cabina è ferma

Intervallo bc : la pendenza è costante e non nulla, quindi la cabina si muove a velocità costante e la pendenza di $x(t)$ è:

$$v_{bc} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{24\text{ m} - 4.0\text{ m}}{8.0\text{ s} - 3.0\text{ s}} = +4.0\text{ m/s}$$

Intervalli ab e cd : la pendenza cambia ad ogni istante e così anche la velocità



IDEA CHIAVE 1: ricavare la velocità in qualsiasi istante dalla pendenza della curva $x(t)$ in quell'istante

Punti a e d : pendenza e velocità sono entrambe nulle quando la cabina è ferma

Intervallo bc : la pendenza è costante e non nulla, quindi la cabina si muove a velocità costante e la pendenza di $x(t)$ è:

$$v_{bc} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{24\text{m} - 4.0\text{m}}{8.0\text{s} - 3.0\text{s}} = +4.0\text{m/s}$$

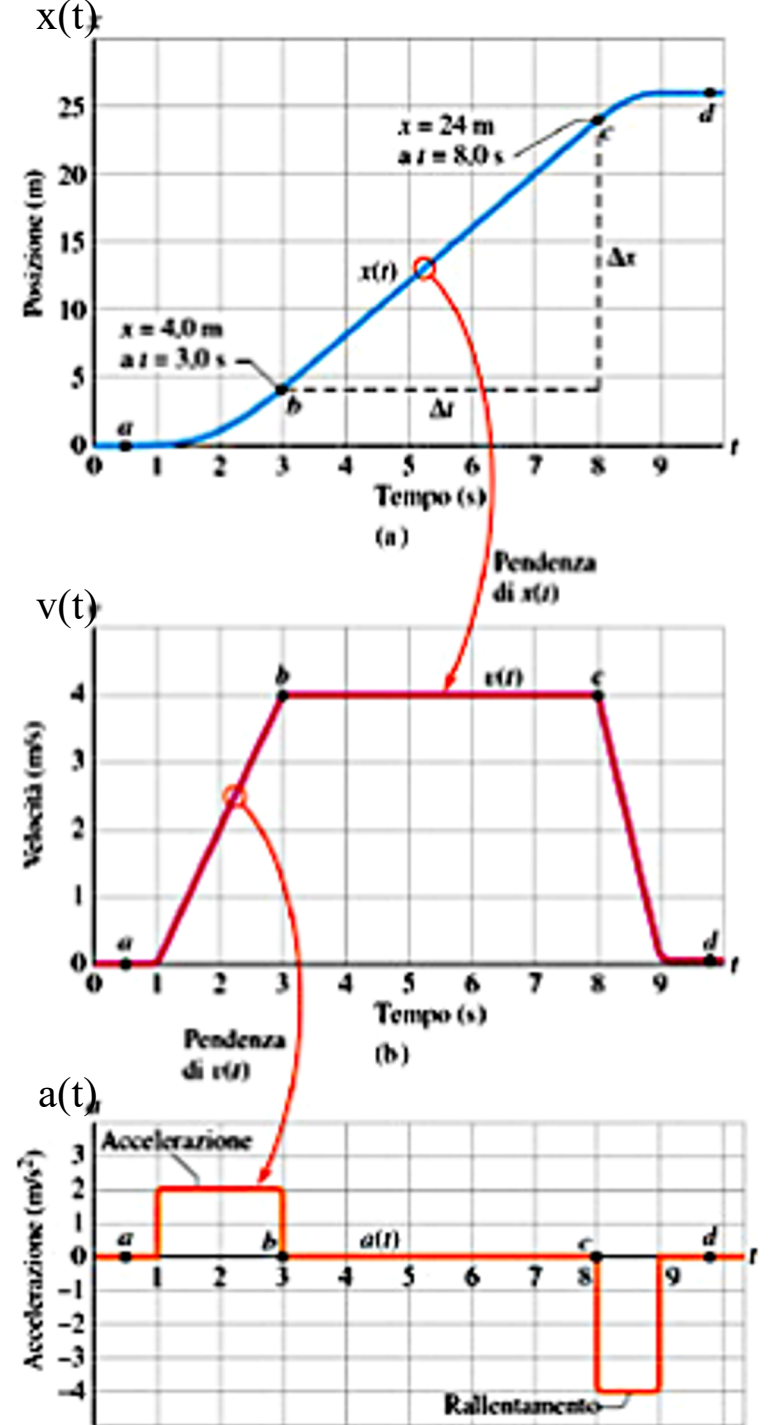
Intervalli ab e cd : la pendenza cambia ad ogni istante e così anche la velocità

IDEA CHIAVE 2: ricavare l'accelerazione in qualsiasi istante dalla pendenza della curva $v(t)$ in quell'istante

Notiamo che quando $v(t)$ è costante la pendenza di $v(t)$ è nulla e quindi l'accelerazione è zero; invece, quando la pendenza è costante e non nulla, anche l'accelerazione è costante e non nulla e mantiene il segno della pendenza:

$$a_{ab} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4\text{m/s} - 0\text{m/s}}{3.0\text{s} - 1.0\text{s}} = +2.0\text{m/s}^2$$

$$a_{cd} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0\text{m/s} - 4\text{m/s}}{9.0\text{s} - 8.0\text{s}} = -4.0\text{m/s}^2$$



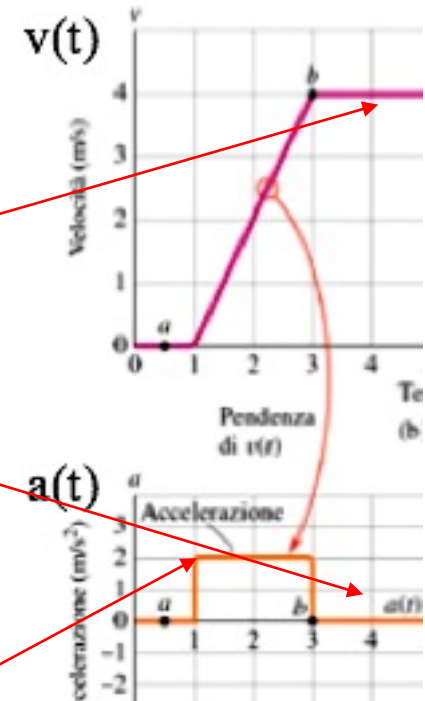
Due quesiti sull'accelerazione

Se l'accelerazione di un corpo è zero, significa che anche la sua velocità è zero?

NO!

E il viceversa? Se la velocità di un corpo è zero, significa che anche la sua accelerazione è sempre zero?

NO!

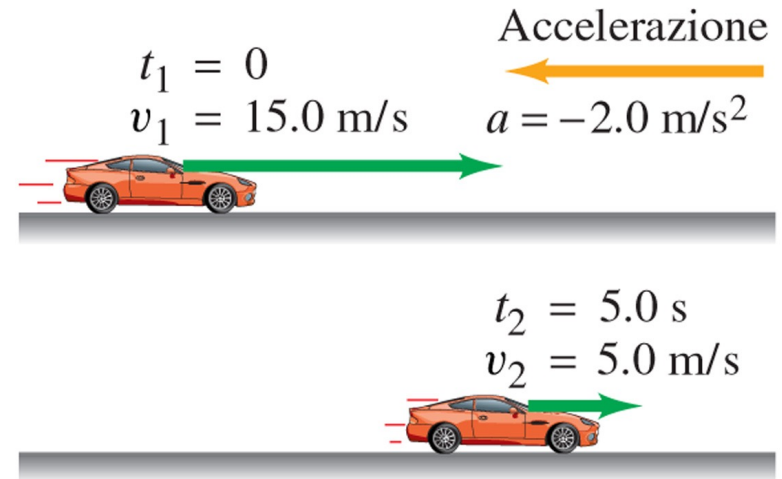


Accelerazione vettoriale negativa

Esempio

Un'automobile si sta muovendo verso destra (direzione asse x positivo) lungo un'autostrada rettilinea. A un certo istante il conducente pigia sul freno. Se la velocità al momento in cui il guidatore inizia ad azionare i freni è $v_1=15.0$ m/s, e ci mette 5.0 s a rallentare fino alla velocità $v_2=5.0$ m/s, quale è stata l'accelerazione media dell'auto?

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{5.0 \text{ m/s} - 15.0 \text{ m/s}}{5.0 \text{ s}} = -2.0 \text{ m/s}^2$$



Fisica
Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

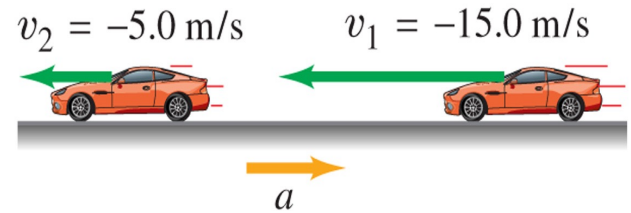
Come spostamento e velocità, anche l'accelerazione è una **grandezza vettoriale**, il cui modulo coincide con l'accelerazione scalare. Anche in questo caso il segno algebrico rappresenta il verso lungo l'asse x : un segno negativo indica quindi una accelerazione diretta nel verso negativo dell'asse. E' questo un esempio di **decelerazione**.

Decelerazione

Esempio

Decelerazione non significa necessariamente accelerazione negativa, come nell'esempio precedente. Se infatti l'auto di prima si muove stavolta verso sinistra lungo l'asse x , rallentando essa avrà una accelerazione positiva:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-5.0 \text{ m/s} - (-15.0 \text{ m/s})}{5.0 \text{ s}} = +2.0 \text{ m/s}^2$$



Parleremo quindi di **decelerazione** tutte e sole quelle volte in cui il **modulo** della velocità diminuisce nel tempo e quindi il vettore della velocità e quello dell'accelerazione **puntano in direzioni opposte**.



Moto uniformemente accelerato

In molti dei più comuni tipi di moto l'accelerazione è **costante** o pressochè costante (ad esempio quando deceleriamo avvicinandoci a un semaforo rosso, o quando acceleriamo ripartendo al verde).

Quando l'accelerazione è costante, la **distinzione** tra accelerazione media e istantanea perde di significato e quindi possiamo scrivere:

$$a = \bar{a} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

dove v_0 è la velocità al tempo $t=0$ e v è la velocità al generico istante di tempo t .



Moto uniformemente accelerato

In molti dei più comuni tipi di moto l'accelerazione è **costante** o pressochè costante (ad esempio quando deceleriamo avvicinandoci a un semaforo rosso, o quando acceleriamo ripartendo al verde).

Quando l'accelerazione è costante, la **distinzione** tra accelerazione media e istantanea perde di significato e quindi possiamo scrivere:

$$a = \bar{a} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

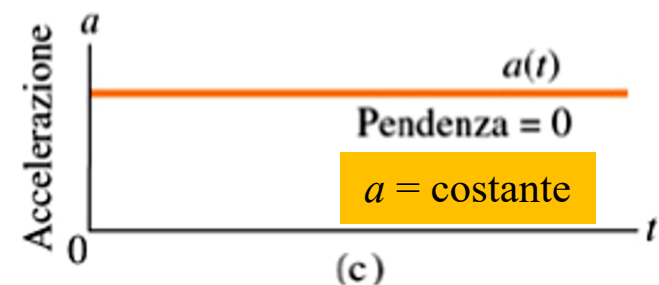
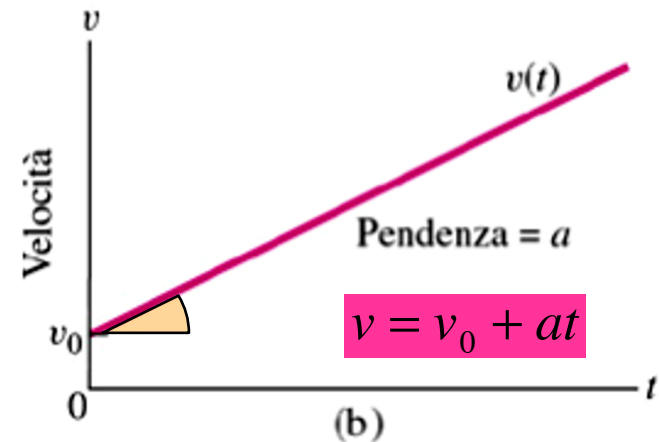
dove v_0 è la velocità al tempo $t=0$ e v è la velocità al generico istante di tempo t .

Avremo quindi la seguente **relazione tra velocità e accelerazione**:

$$\frac{v - v_0}{t} = a \rightarrow v(t) = v_0 + at$$

che è l'equazione di una retta, cioè del tipo:

$$y = q + mx$$



Moto uniformemente accelerato

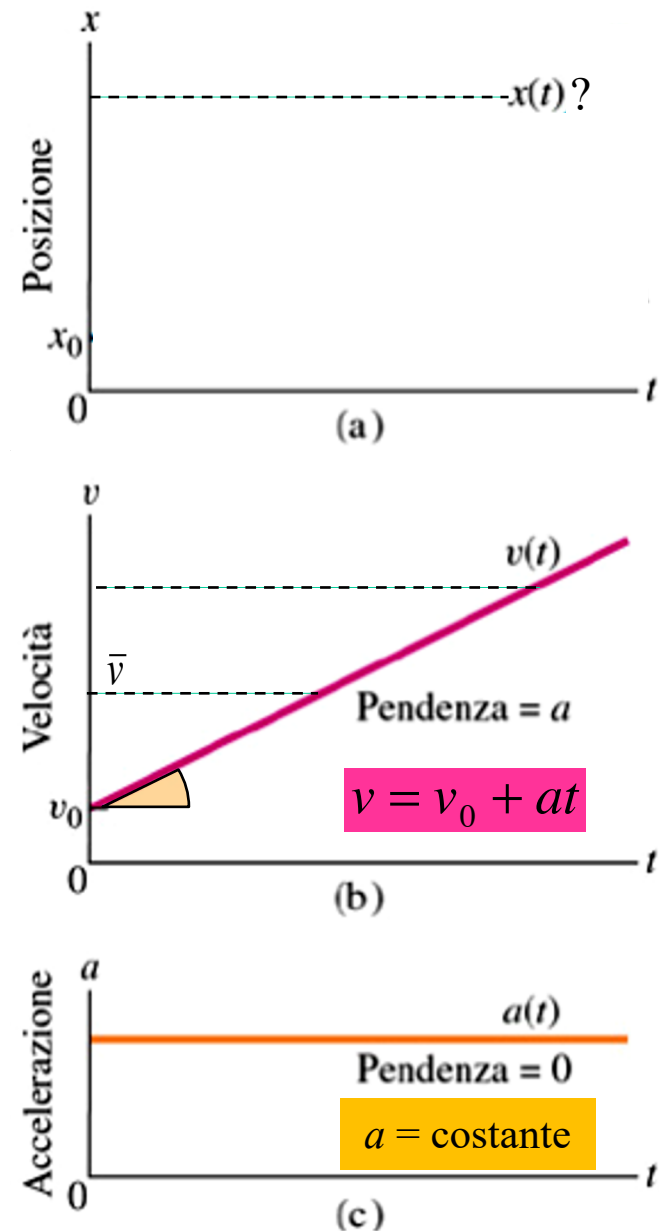
Analogamente possiamo scrivere:

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t - 0} \rightarrow x(t) = x_0 + \bar{v}t$$

dove x_0 è la posizione del punto materiale considerato al tempo $t=0$ e \bar{v} è la **velocità media** tra $t=0$ e un istante successivo t . Questa l'equazione è uguale a quella, già incontrata, che descrive lo **spostamento nel moto uniforme** (una retta nel diagramma orario), ma stavolta c'è la *velocità media* al posto della velocità costante.

Essendo, come visto poc'anzi, la velocità funzione **lineare** del tempo, possiamo esprimere la velocità media \bar{v} anche come **media aritmetica** tra la velocità nel punto iniziale v_0 e la velocità nel generico punto finale $v=v(t)$:

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$$



Moto uniformemente accelerato

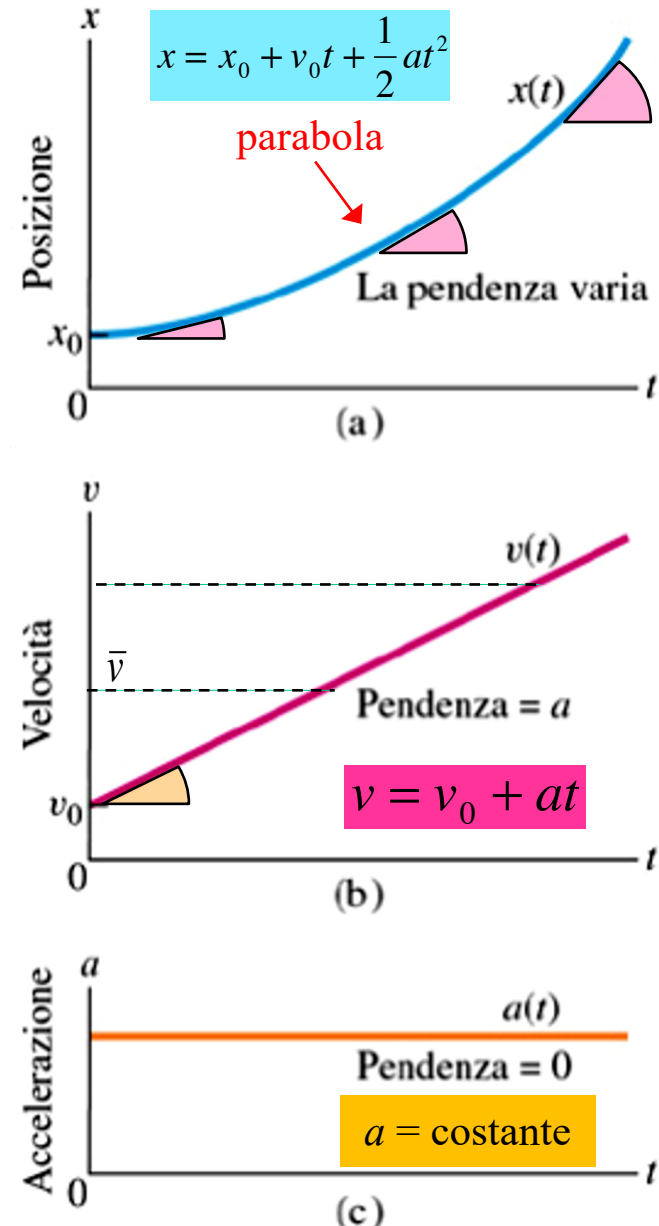
Utilizzando infine l'espressione $v = v_0 + at$, sostituiamo la v nell'equazione precedente ottenendo:

$$\bar{v} = \frac{1}{2}[v_0 + (v_0 + at)] = v_0 + \frac{1}{2}at$$

che sostituita a sua volta nell'espressione $x(t) = x_0 + \bar{v}t$, darà finalmente la **dipendenza dello spostamento dall'accelerazione**:

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

che è una dipendenza di tipo quadratico (equazione di una **parabola** nel diagramma orario, la cui **pendenza** punto per punto è rappresentata dalla corrispondente velocità istantanea – che evidentemente aumenta nel moto uniformemente accelerato).



Moto con accelerazione costante

Manipolando algebricamente le **due equazioni** fondamentali appena ricavate, e cioè:

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

si ricava un'altra **equazione** molto utile nella risoluzione dei problemi pratici riguardanti il moto ad accelerazione costante, in particolare quando tra i dati iniziali non c'è il tempo:

**Si ricava t dalla prima equazione e si
sostituisce nella seconda...**

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{v - v_0}{a} \\ x(t) = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 \end{cases} \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Provate a ricavarla da soli...

Equazioni del moto

uniformemente accelerato

(a=cost)

Grandezza mancante

(I) $v = v_0 + at$ \longrightarrow $x - x_0$

(II) $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ \longrightarrow v

(III) $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ \longrightarrow t

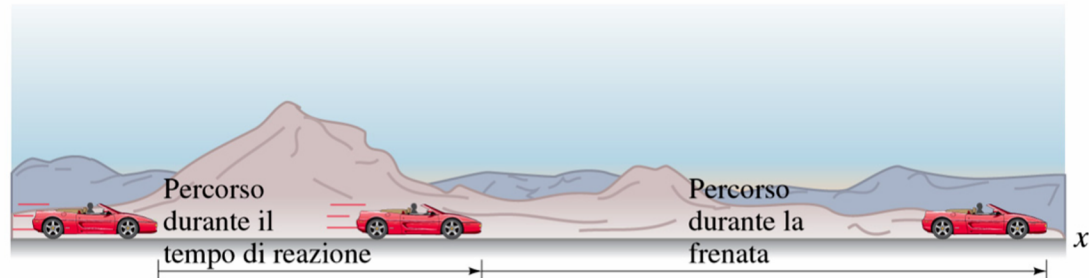
Esercizio di esempio

Determiniamo la minima distanza di frenata di un'automobile che viaggia ad una velocità costante $v = 14\text{m/s}$.

Distinguiamo **2 intervalli** di tempo:

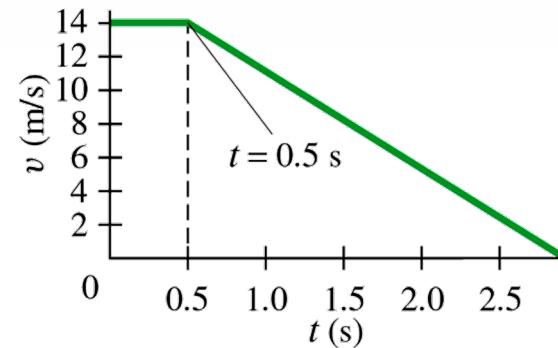
(1) **Tempo di reazione:** comincia quando il guidatore decide di premere il pedale del freno e finisce quando il piede tocca il pedale. In questo intervallo, che assumiamo sia 0.50s , l'accelerazione è nulla.

(2) **Tempo di frenata:** comincia quando l'auto inizia a frenare e termina quando l'auto è completamente ferma. Assumiamo che l'accelerazione in questo intervallo sia costante e pari ad $a = -6\text{ m/s}^2$.



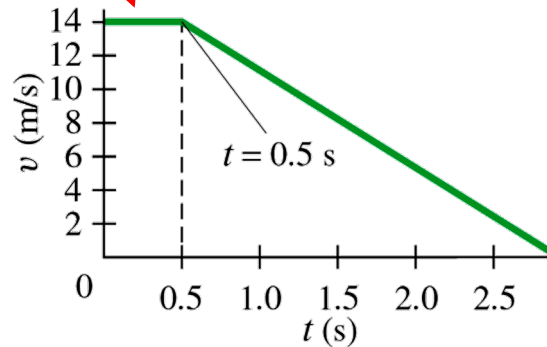
(1) $v = \text{costante} = 14\text{ m/s}$
 $t = 0.50\text{ s}$
 $a = 0$

(2) v in diminuzione da 14 m/s a zero
 $a = -6.0\text{ m/s}^2$



Quale equazione scegliere per determinare lo spazio percorso durante il tempo di reazione? (il moto qui è uniforme)

(1) **Dati:**
 $t = 0.50 \text{ s}$
 $v_0 = 14 \text{ m/s}$
 $v = 14 \text{ m/s}$
 $a = 0$
 $x_0 = 0$



- **incognita:** x
 - **accelerazione nulla:** a

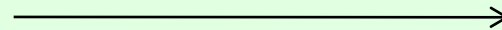
Equazioni del moto

uniformemente accelerato

Grandezza mancante

($a = \text{cost}$)

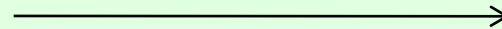
(I) $v = v_0 + at$



$x - x_0$

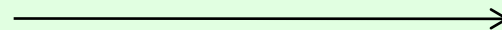
Equazione del moto uniforme

(II) $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$



v

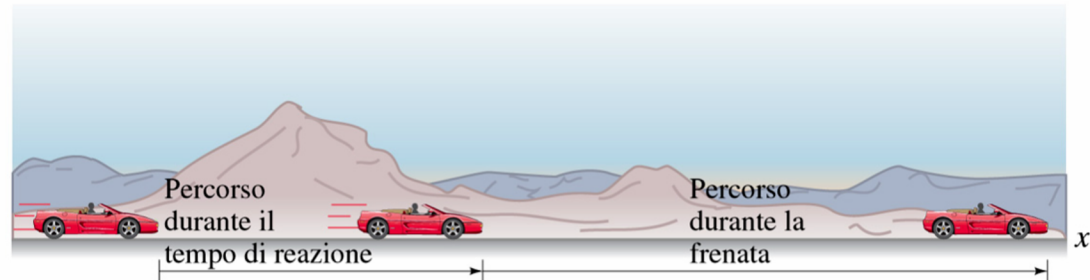
(III) $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$



t

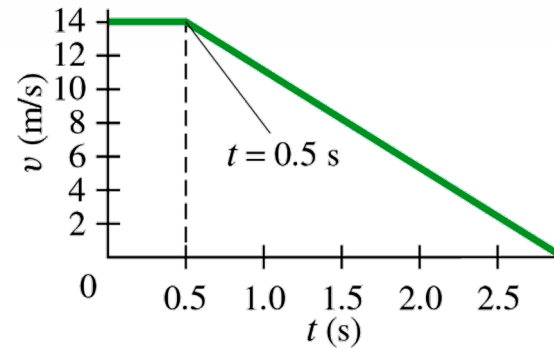
Esercizio di esempio

Determiniamo la minima distanza di frenata di un'automobile che viaggia ad una velocità costante $v = 14\text{m/s}$.



(1) $v = \text{costante} = 14 \text{ m/s}$
 $t = 0.50 \text{ s}$
 $a = 0$

(2) v in diminuzione da 14 m/s a zero
 $a = -6.0 \text{ m/s}^2$



Distinguiamo **2 intervalli** di tempo:

(1) **Tempo di reazione:** comincia quando il guidatore decide di premere il pedale del freno e finisce quando il piede tocca il pedale. In questo intervallo, che assumiamo sia 0.50s , l'accelerazione è nulla.

(2) **Tempo di frenata:** comincia quando l'auto inizia a frenare e termina quando l'auto è completamente ferma. Assumiamo che l'accelerazione in questo intervallo sia costante e pari ad $a = -6 \text{ m/s}^2$.

Soluzione

(1) **Spazio percorso durante il tempo di reazione:** occorre utilizzare l'equazione II del moto uniformemente accelerato (con $a=0$ in questo caso): $x = 0 + v_0 t = (14\text{m/s})(0.50\text{s}) = 7.0\text{m}$

(2) **Spazio totale percorso:**

(1) Dati:	(2) Dati:
$t = 0.50 \text{ s}$	$x_0 = 7.0 \text{ m}$
$v_0 = 14 \text{ m/s}$	$v_0 = 14 \text{ m/s}$
$v = 14 \text{ m/s}$	$v = 0$
$a = 0$	$a = -6 \text{ m/s}^2$
$x_0 = 0$	

Incognita:

x

Quale equazione scegliere per determinare lo spazio percorso durante la decelerazione?

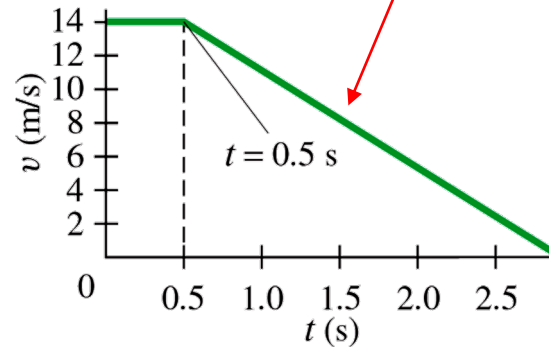
(2) **Dati:**

$$x_0 = 7.0 \text{ m}$$

$$v_0 = 14 \text{ m/s}$$

$$v = 0$$

$$a = -6 \text{ m/s}^2$$



- incognita: x

- grandezza mancante: t

Equazioni del moto

uniformemente accelerato

Grandezza mancante

($a = \text{cost}$)

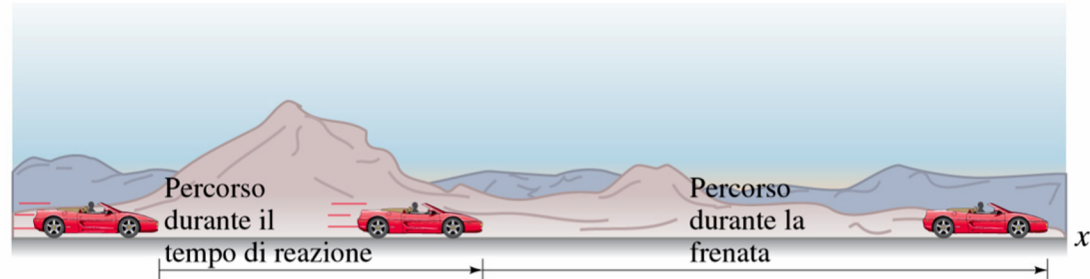
(I) $v = v_0 + at$ \longrightarrow $x - x_0$

(II) $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ \longrightarrow v

(III) $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ \longrightarrow t

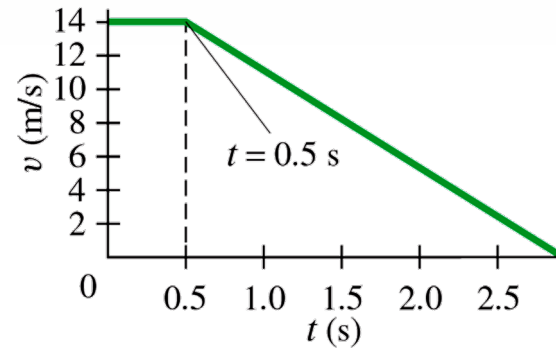
Esercizio di esempio

Determiniamo la minima distanza di frenata di un'automobile che viaggia ad una velocità costante $v = 14\text{m/s}$.



(1) $v = \text{costante} = 14\text{ m/s}$
 $t = 0.50\text{ s}$
 $a = 0$

(2) v in diminuzione da 14 m/s a zero
 $a = -6.0\text{ m/s}^2$



Distinguiamo **2 intervalli** di tempo:

(1) **Tempo di reazione:** comincia quando il guidatore decide di premere il pedale del freno e finisce quando il piede tocca il pedale. In questo intervallo, che assumiamo sia 0.50s , l'accelerazione è nulla.

(2) **Tempo di frenata:** comincia quando l'auto inizia a frenare e termina quando l'auto è completamente ferma. Assumiamo che l'accelerazione in questo intervallo sia costante e pari ad $a = -6\text{ m/s}^2$.

Soluzione

(1) **Spazio percorso durante il tempo di reazione:** occorre utilizzare l'equazione II del moto uniformemente accelerato (con $a=0$ in questo caso): $x = 0 + v_0 t = (14\text{m/s})(0.50\text{s}) = 7.0\text{m}$

(2) **Spazio totale percorso:** dal calcolo precedente abbiamo ricavato $x_0 = 7.0\text{ m}$, e stavolta utilizziamo l'equazione III del moto uniformemente accelerato, risolta però rispetto ad x :

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = 7.0\text{m} + \frac{0 - (14\text{m/s})^2}{2(-6.0\text{m/s}^2)} = 7.0\text{m} + \frac{-196\text{m}^2/\text{s}^2}{-12\text{m/s}^2} = 7.0\text{m} + 16\text{m} = 23\text{m}$$

(1) **Dati:**

$$t = 0.50\text{ s}$$

$$v_0 = 14\text{ m/s}$$

$$v = 14\text{ m/s}$$

$$a = 0$$

$$x_0 = 0$$

(2) **Dati:**

$$x_0 = 7.0\text{ m}$$

$$v_0 = 14\text{ m/s}$$

$$v = 0$$

$$a = -6\text{ m/s}^2$$

Incognita:

x

Dall'equazione III del moto uniformemente accelerato notiamo che la **distanza di frenata**, cioè lo spazio totale $(x - x_0)$ percorso dall'auto dal momento in cui si preme il freno fino all'arresto completo del'auto, aumenta proporzionalmente al **quadrato** della velocità iniziale, ossia in maniera **non lineare**: andando a velocità doppia occorrerà quindi una distanza di frenata quattro volte maggiore, e così via...

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \longrightarrow x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \xrightarrow{v=0} x - x_0 = \frac{-v_0^2}{2a}$$

E' dunque consigliabile, per chi guida, tenerne conto per la valutazione della corretta distanza di sicurezza da tenere rispetto al veicolo che ci precede, al fine di evitare spiacevoli "inconvenienti"...

