LA MECCANICA CLASSICA

Cinematica

Studia il movimento dei corpi
(cioè ***come*** essi si muovono)

Dinamica

Studia le cause del movimento dei corpi
(cioè ***perchè*** essi si muovono)

Statica

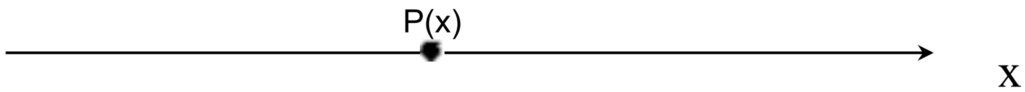
Si occupa delle condizioni di equilibrio dei corpi
(è un caso particolare della Dinamica)

CINEMATICA

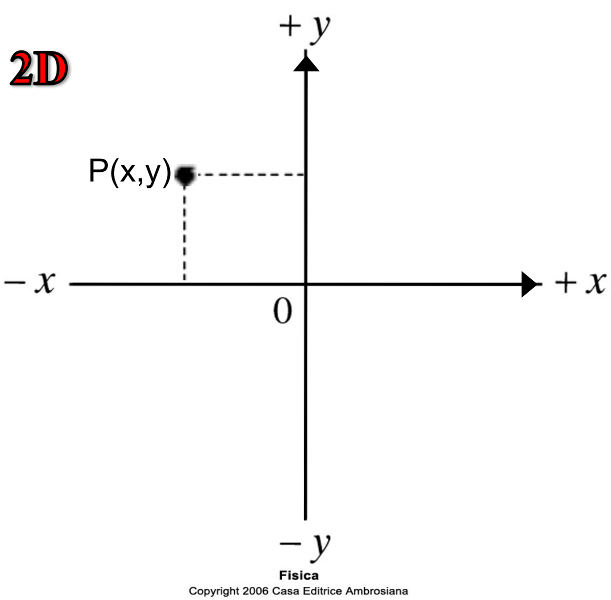
Diagrammi cartesiani in una, due e tre dimensioni

Renato Cartesio (1596-1650)

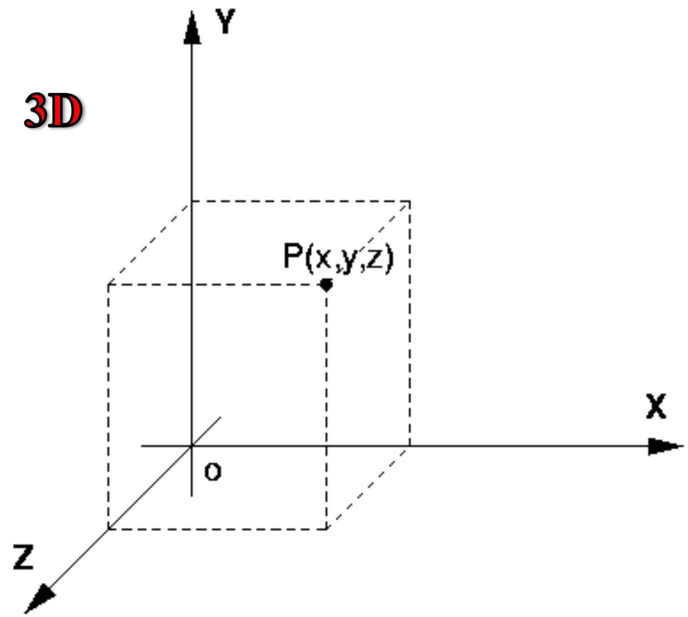
1D



2D



3D



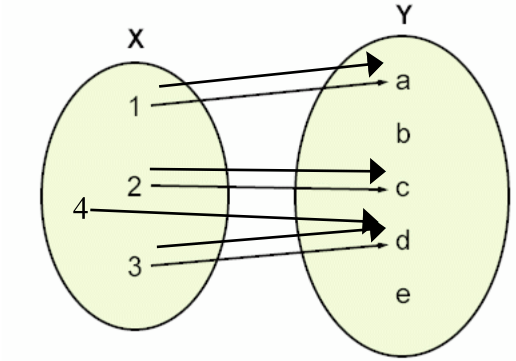
Diagrammi cartesiani e Funzioni Matematiche

In matematica, una **funzione** (G.Leibniz, 1694) è una relazione tra due insiemi, chiamati **dominio** e **codominio** della funzione, che associa a **ogni** elemento del dominio **uno ed un solo** elemento del codominio. In un **diagramma cartesiano in 2D**, il dominio coincide con l'asse *x* e il codominio con l'asse *y*. La funzione, indicata con $\boldsymbol{y = f(x)}$, potrà essere quindi rappresentata con un **grafico**, ossia con una curva che unisce tutti i punti individuati dalle **infinite coppie di valori *x* e *y*** che soddisfano la (ossia sono soluzioni della) **equazione in due incognite** definita dalla funzione stessa.

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

$$y = f(x)$$

dominio codominio



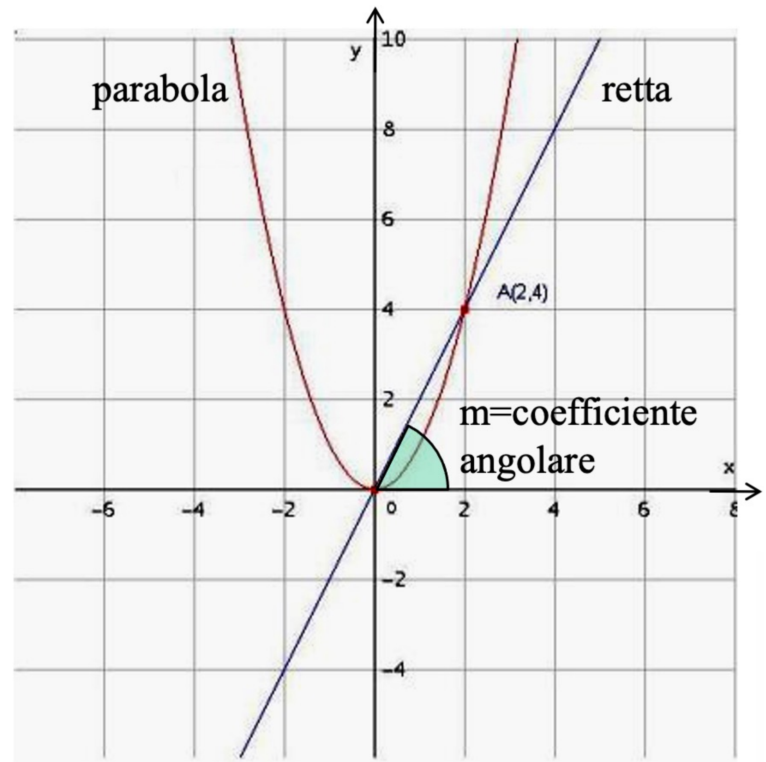
Es. Funzioni algebriche:

Retta di coefficiente angolare *m:*

$$y = mx + q$$

Parabola con asse parallelo all'asse *y:*

$$y = x^2$$

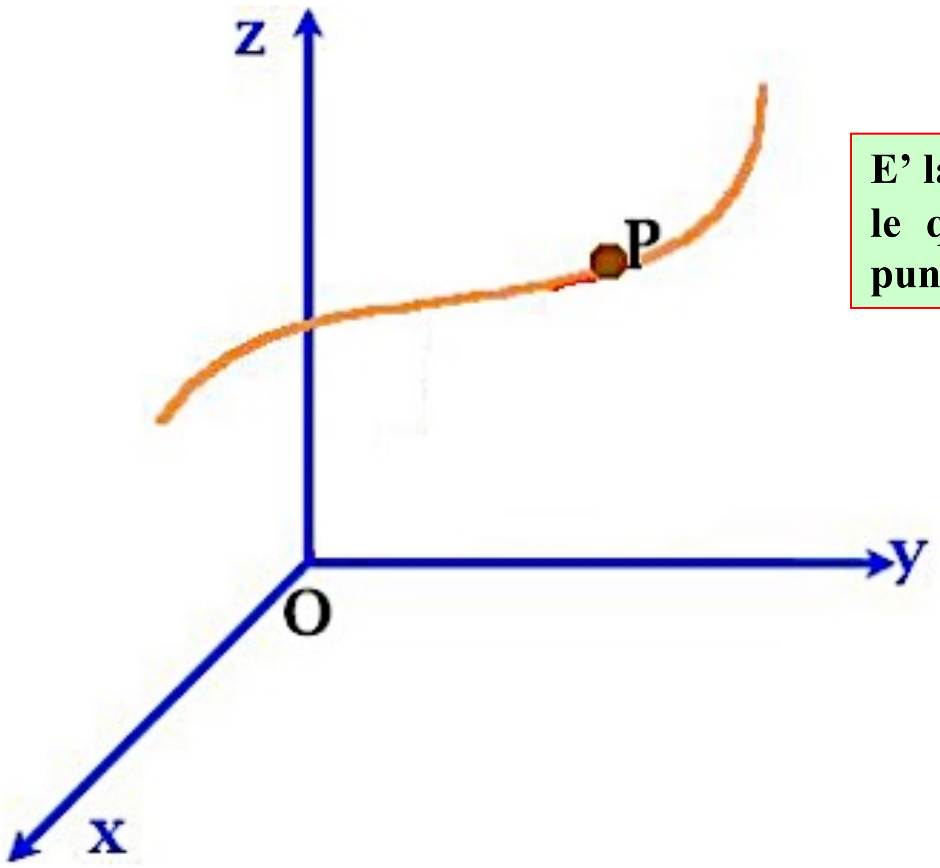


NOTA BENE: Ovviamente le due variabili della funzione non devono chiamarsi per forza *x* e *y*. Ad esempio, in cinematica, spesso sull'asse *x* troveremo il tempo *t* e sull'asse *y* una delle dimensioni spaziali (ma anche la velocità o l'accelerazione)

I 3 Concetti Fondamentali della Cinematica

1) Il Sistema di Riferimento

E' l'insieme di tutti gli oggetti rispetto ai quali il movimento avviene con le stesse caratteristiche ed è rappresentato di solito da un <u>diagramma cartesiano</u>



2) La Traiettoria

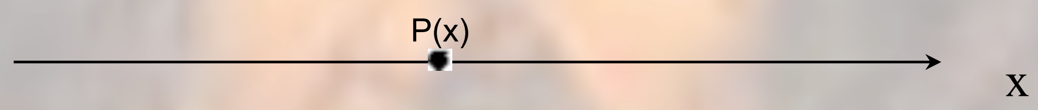
E' la linea che unisce tutte le posizioni attraverso le quali è passato un oggetto (ad esempio un punto materiale P) in movimento

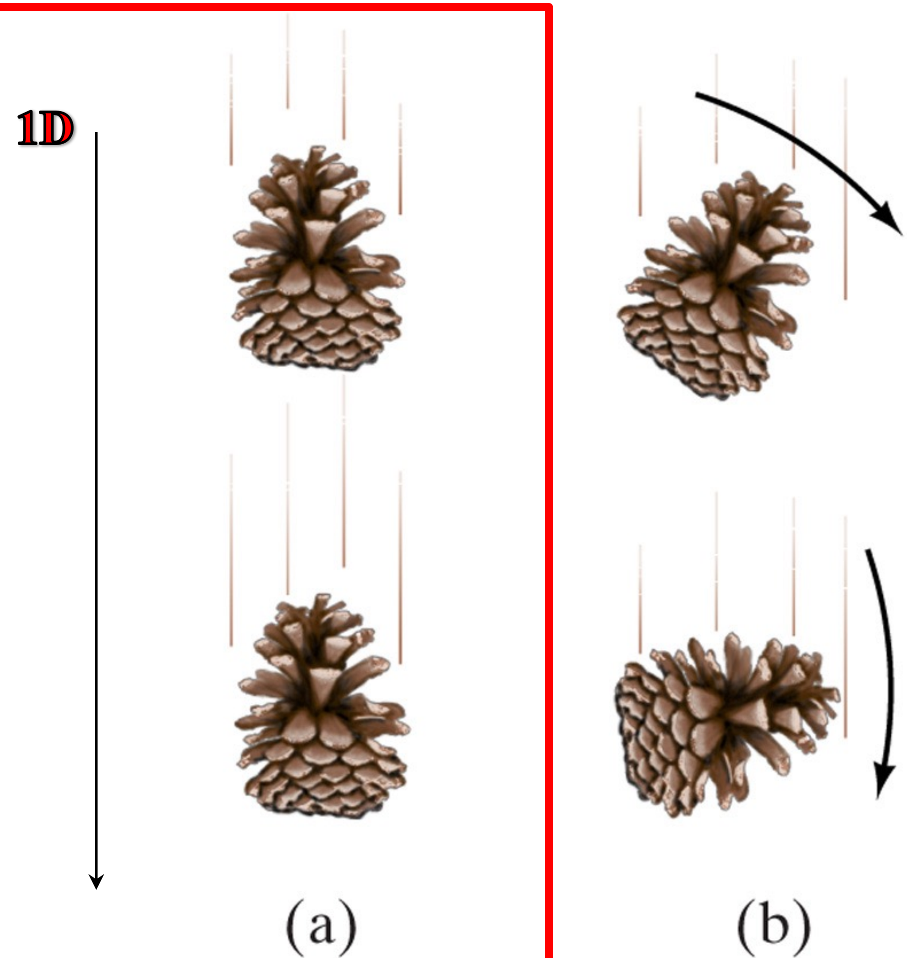
3) Il Punto Materiale

E' un oggetto così piccolo rispetto alle dimensioni della traiettoria da esso percorsa che può essere considerato un punto geometrico (però dotato di massa). Talvolta ci riferiremo ad esso utilizzando altri termini quali "corpo" o "particella".

Cinematica in una dimensione

1D

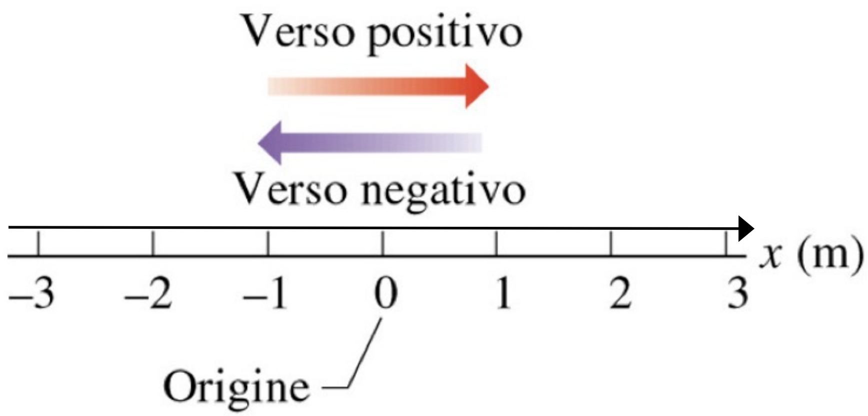




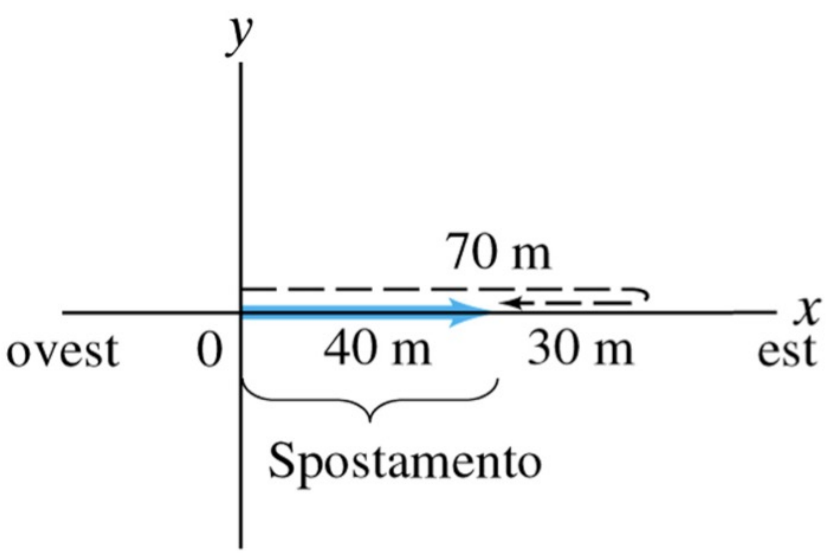
Moto di traslazione

Moto di rototraslazione

Moto e spostamento in un sistema di riferimento unidimensionale (asse x, unità di misura: metro m)



Lo **spostamento** è definito come il cambiamento di posizione di un oggetto (o di un punto materiale), rappresenta cioè di quanto l'oggetto, ad un certo istante del moto, è lontano dal suo punto di partenza (**da non confondere con la distanza totale percorsa, anche se spesso si identifica con essa**).



Il Vettore Spostamento

Lo spostamento è una **grandezza vettoriale** e come tale, a differenza delle *grandezze scalari* definite solo da un valore numerico, è caratterizzato da 3 elementi: **direzione**, **verso** e **modulo** (o intensità). In 1D la direzione è fissa e coincide, chiaramente, con la direzione dell'asse x.

Consideriamo un oggetto in moto tra due istanti di tempo t_1 e t_2, nei quali assume rispettivamente le posizioni x_1 e x_2 :

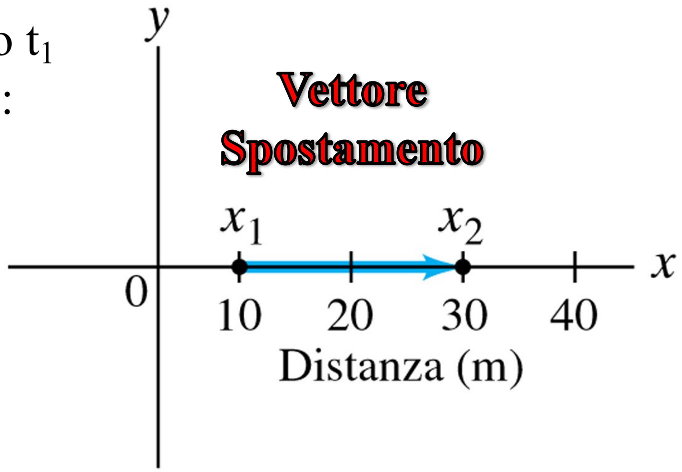
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Spostamento (qui uguale alla distanza percorsa)

$$Se \quad x_1 = 10.0 \; m \qquad x_2 = 30.0 \; m \quad :$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 30.0m - 10.0m = 20.0m$$

Lo spostamento è positivo

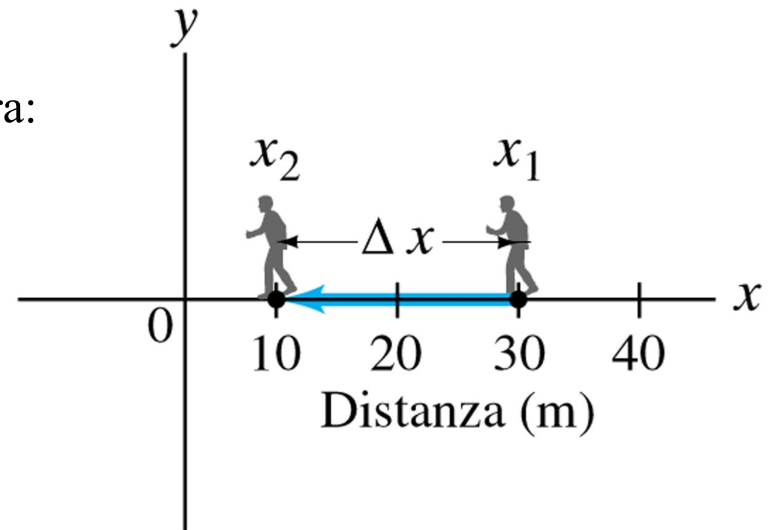


Consideriamo una persona in movimento verso sinistra:

$$Se \quad x_1 = 30.0 \; m \qquad x_2 = 10.0 \; m \quad :$$

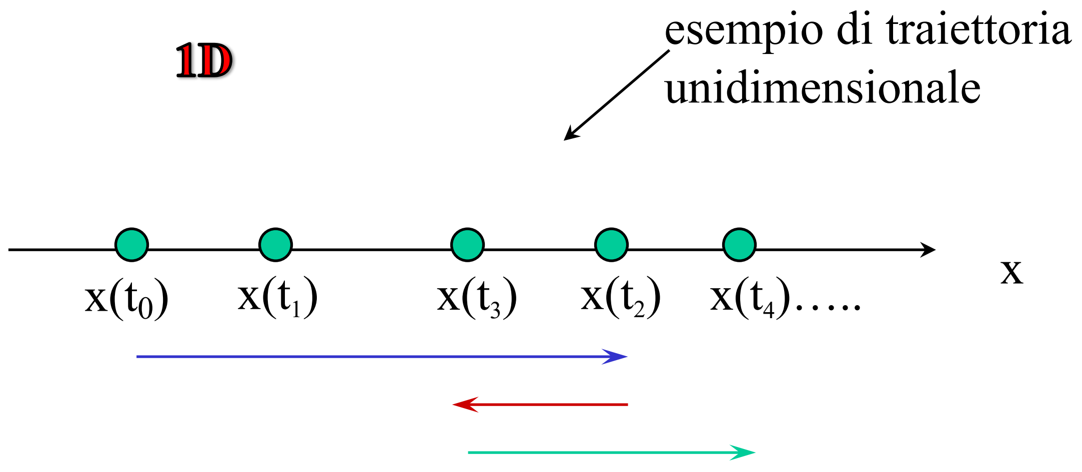
$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10.0m - 30.0m = -20.0m$$

Lo spostamento è negativo



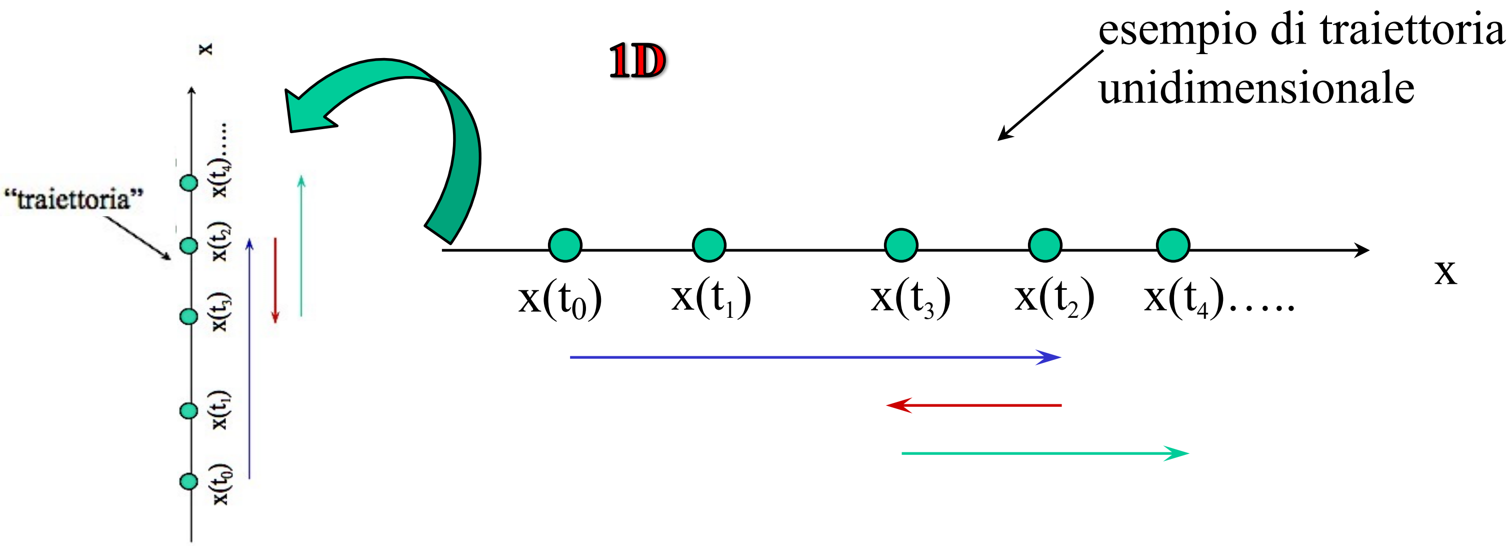
Traiettorie in una dimensione

E' difficile visualizzare la **traiettoria** di un punto materiale in un sistema di riferimento unidimensionale in funzione del tempo:



Traiettorie in una dimensione

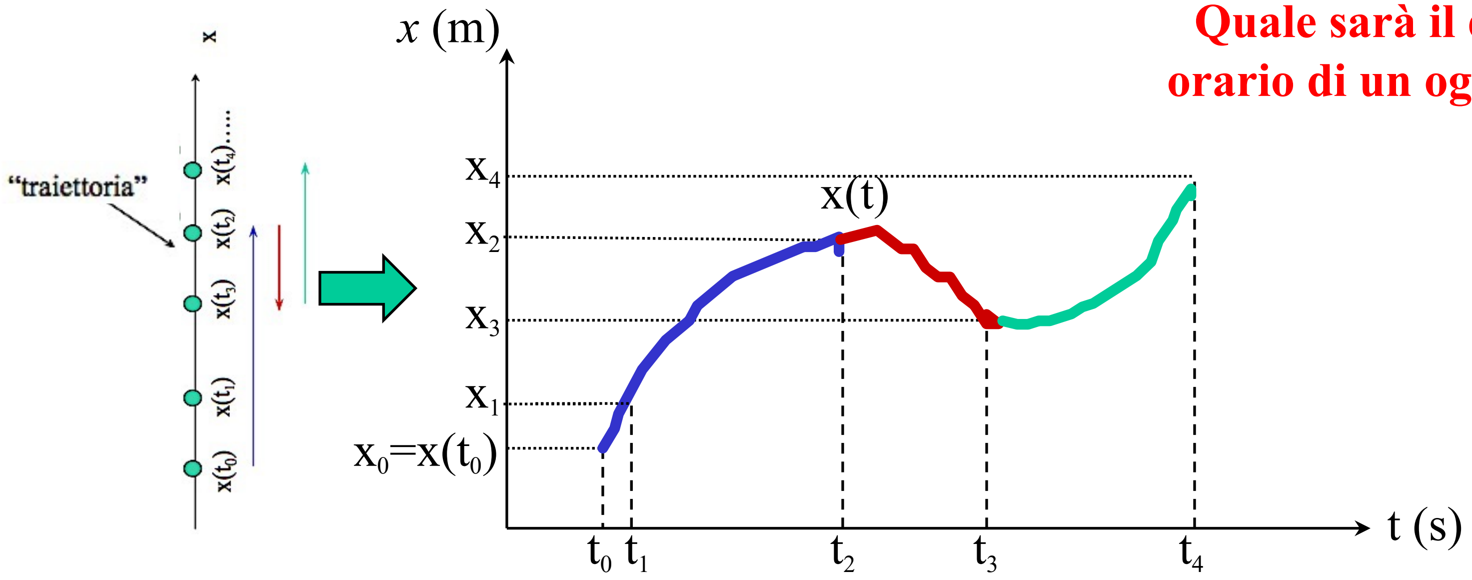
E' difficile visualizzare la **traiettoria** di un punto materiale in un sistema di riferimento unidimensionale in funzione del tempo:



Si ricorre dunque al cosiddetto "**diagramma orario**"…

Il Diagramma Orario $x = f(\mathrm{t})$

Il Diagramma orario permette di rappresentare la posizione di un oggetto o di un punto materiale in moto unidimensionale al passare del tempo (espresso in secondi) sotto forma di una **curva** (<u>da non confondere con la traiettoria dell'oggetto nello spazio reale</u>) descritta dalla **funzione** $x(\mathrm{t})$, ossia $x = f(\mathrm{t})$.



Quale sarà il diagramma orario di un oggetto fermo?

Il Diagramma Orario $x = f(t)$

Il Diagramma orario permette di rappresentare la posizione di un oggetto o di un punto materiale in moto unidimensionale al passare del tempo (espresso in secondi) sotto forma di una **curva** (<u>da non confondere con la traiettoria dell'oggetto nello spazio reale</u>) descritta dalla **funzione** $x(t)$, ossia $x = f(t)$.

Quale sarà il diagramma orario di un oggetto fermo?

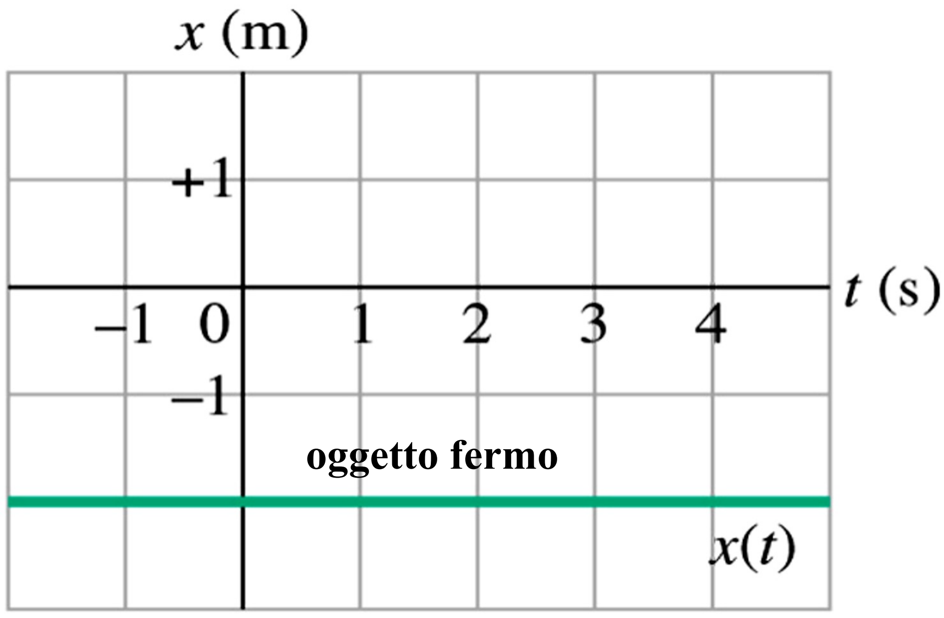
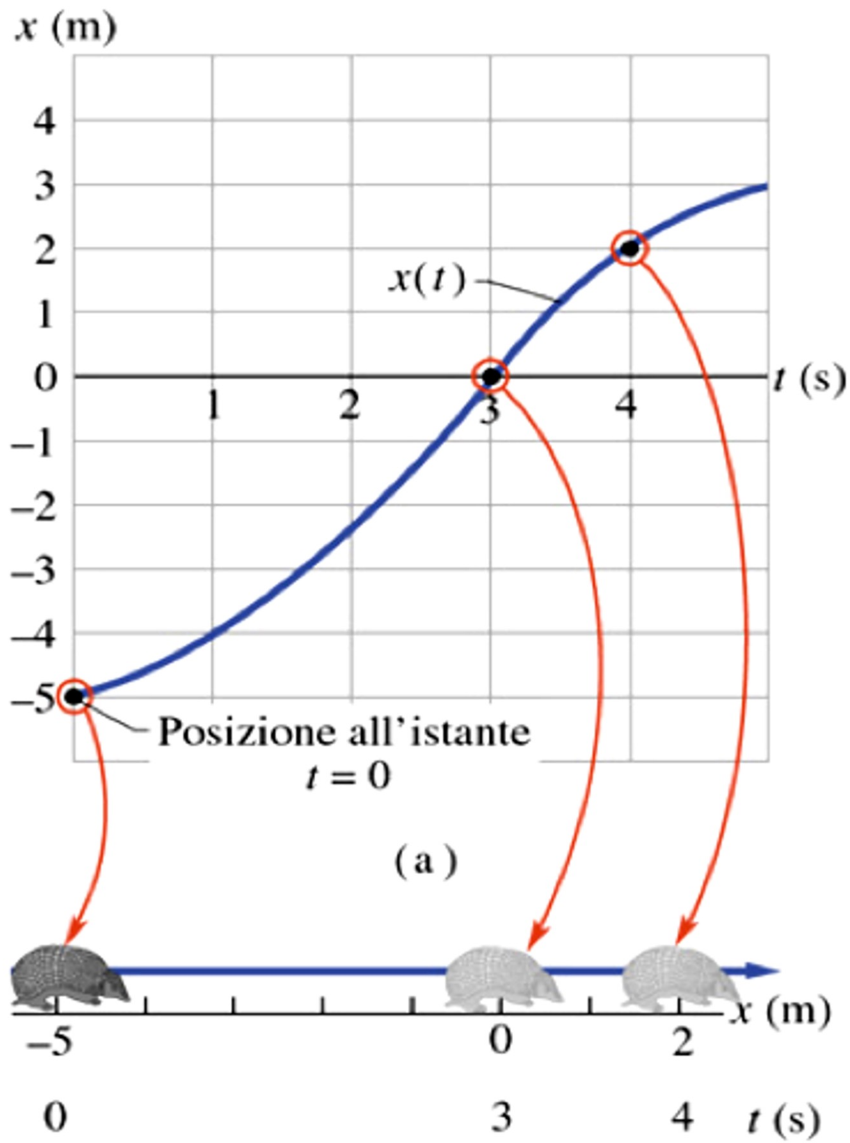


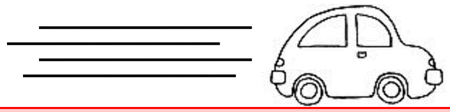
Diagramma orario
della posizione di un armadillo al passare del tempo



Qual'è la velocità dell'armadillo?

Traiettoria reale unidimensionale

La Velocità Scalare Media



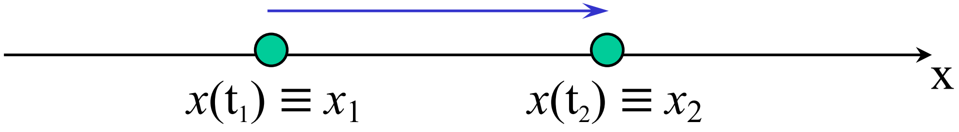
La velocità di un oggetto si definisce come la distanza percorsa dall'oggetto durante il suo cammino divisa per il tempo impiegato a percorrere tale distanza

Velocità scalare media

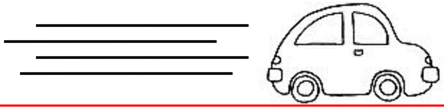
$$\bar{v} = \frac{distanza\ percorsa}{tempo\ trascorso}$$

unità di misura: metri al secondo (m/s)

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



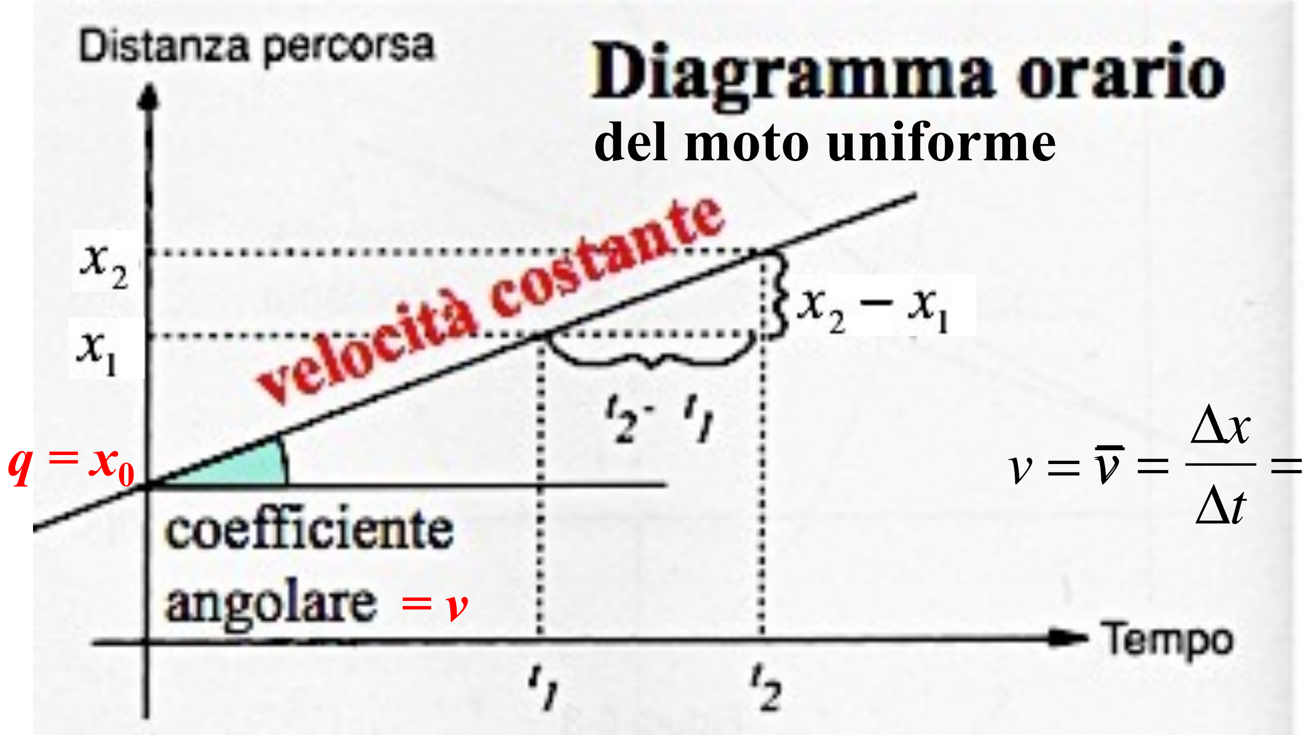
Il Moto Uniforme (v = costante)



Un corpo si muove di **moto uniforme** se la sua velocità scalare è **costante**. Questo vuol dire che il corpo copre **spazi uguali in tempi uguali** e la sua velocità, ad ogni istante, è uguale alla sua velocità media: $v = \overline{v}$

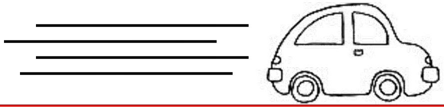
Equazione del moto uniforme $\rightarrow x(t) = x_o + vt$

Equazione di una retta, del tipo: y = q + mx



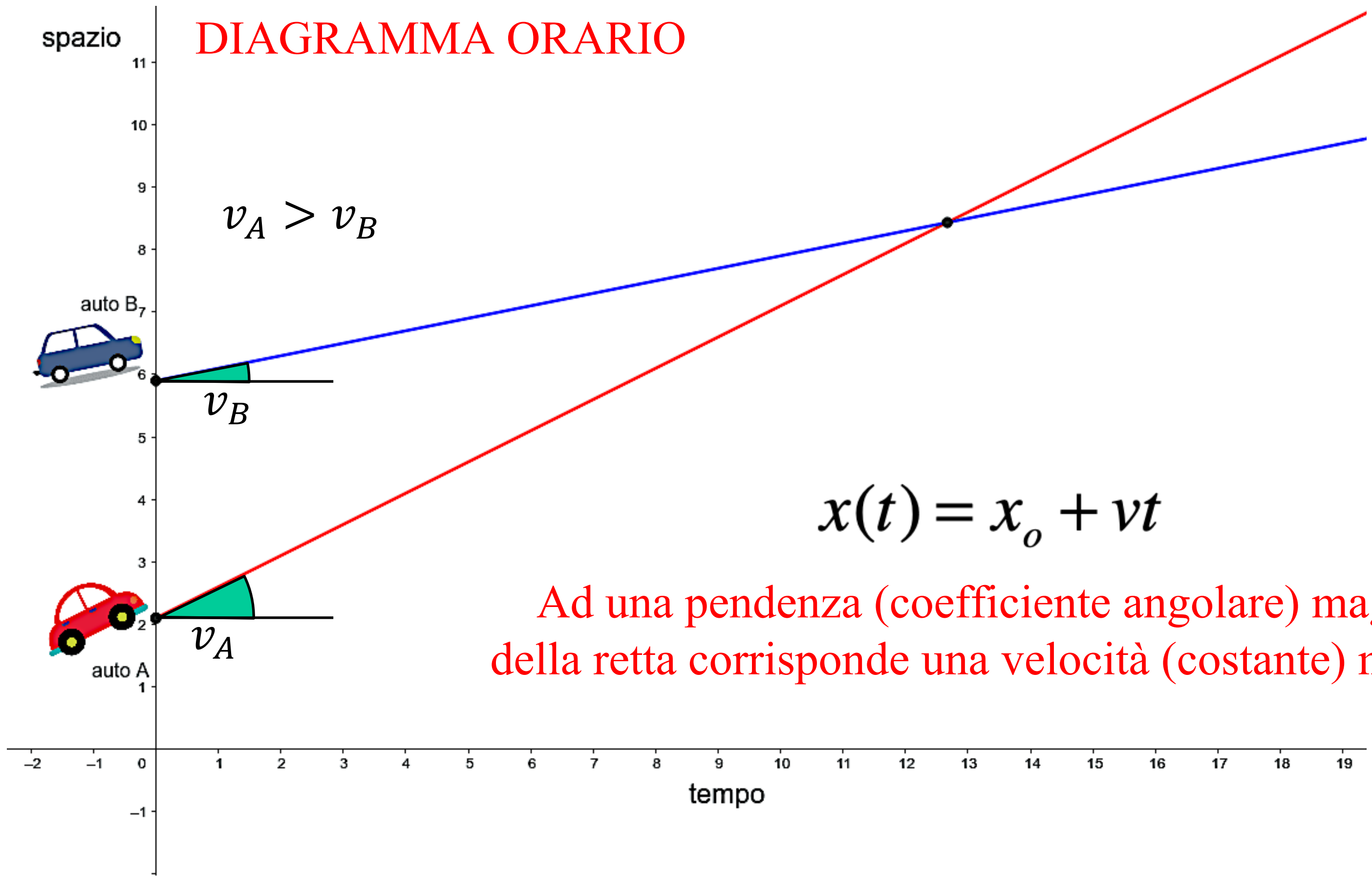
$$v = \overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Il Moto Uniforme (v = costante)



Un corpo si muove di **moto uniforme** se la sua velocità scalare è **costante**. Questo vuol dire che il corpo copre **spazi uguali in tempi uguali** e la sua velocità, ad ogni istante, è uguale alla sua velocità media: $v = \overline{v}$

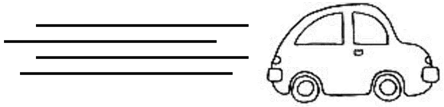
DIAGRAMMA ORARIO



$$x(t) = x_o + vt$$

Ad una pendenza (coefficiente angolare) maggiore della retta corrisponde una velocità (costante) maggiore

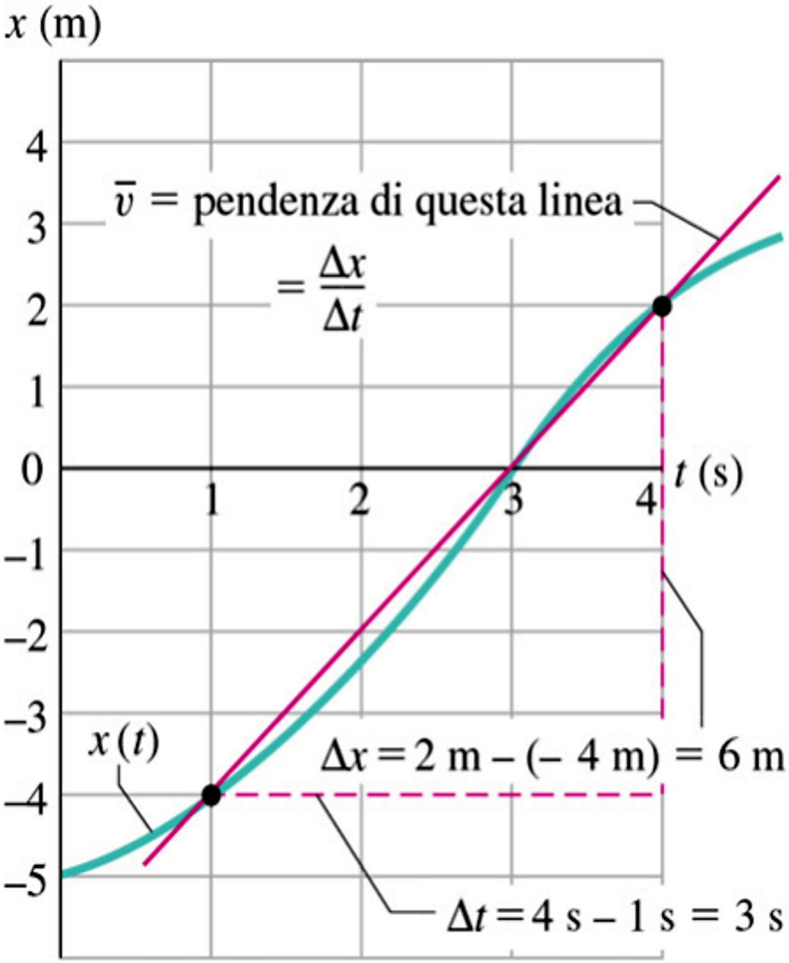
Moto a Velocità Variabile



In generale, anche se la velocità cambia nel tempo, la velocità scalare media è uguale alla **pendenza** (coefficiente angolare) **della retta che unisce i due punti** tra i quali si verifica il moto.

Nel caso dell'armadillo visto prima avremo:

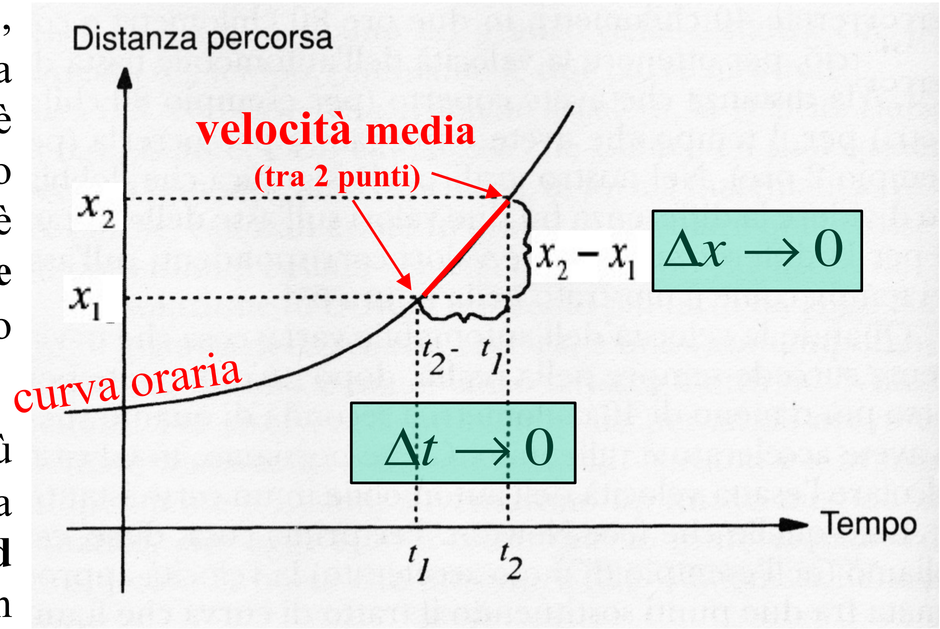
$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6m}{3s} = 2\,m/s$$



La velocità istantanea e il calcolo infinitesimale

Grazie al nuovo metodo introdotto da Cartesio, già nel XVII secolo si era in grado di calcolare la velocità media di un corpo. Ma nè Galileo, nè Cartesio, nè i loro contemporanei, erano in grado di calcolare la **velocità istantanea** di un corpo nè tantomeno di descrivere il **moto di un corpo che procede a velocità variabile**, crescente o decrescente.

La soluzione al problema fu trovata un secolo più tardi da **Isaac Newton**, il vero gigante della fisica classica, e dal grande filosofo e logico **Gottfried Leibniz**, i quali nel XVIII secolo inventarono un nuovo metodo matematico noto come **calcolo infinitesimale.**



Newton

Leibniz

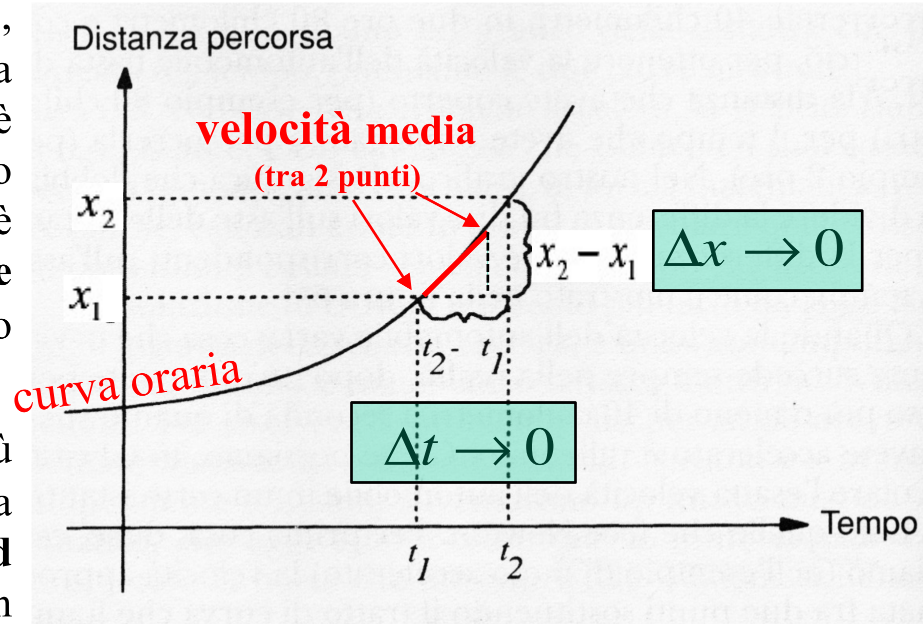
Con questo metodo la **velocità istantanea** resta definita attraverso un 'passaggio al limite' come la *velocità media durante un intervallo di tempo infinitamente piccolo* (cioè, al limite, per Δt tendente a zero):

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \qquad v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocità istantanea e il calcolo infinitesimale

Grazie al nuovo metodo introdotto da Cartesio, già nel XVII secolo si era in grado di calcolare la velocità media di un corpo. Ma nè Galileo, nè Cartesio, nè i loro contemporanei, erano in grado di calcolare la **velocità istantanea** di un corpo nè tantomeno di descrivere il **moto di un corpo che procede a velocità variabile**, crescente o decrescente.

La soluzione al problema fu trovata un secolo più tardi da **Isaac Newton**, il vero gigante della fisica classica, e dal grande filosofo e logico **Gottfried Leibniz**, i quali nel XVIII secolo inventarono un nuovo metodo matematico noto come **calcolo infinitesimale.**



Newton

Leibniz

Con questo metodo la **velocità istantanea** resta definita attraverso un ‘passaggio al limite’ come la *velocità media durante un intervallo di tempo infinitamente piccolo* (cioè, al limite, per Δt tendente a zero):

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \qquad v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

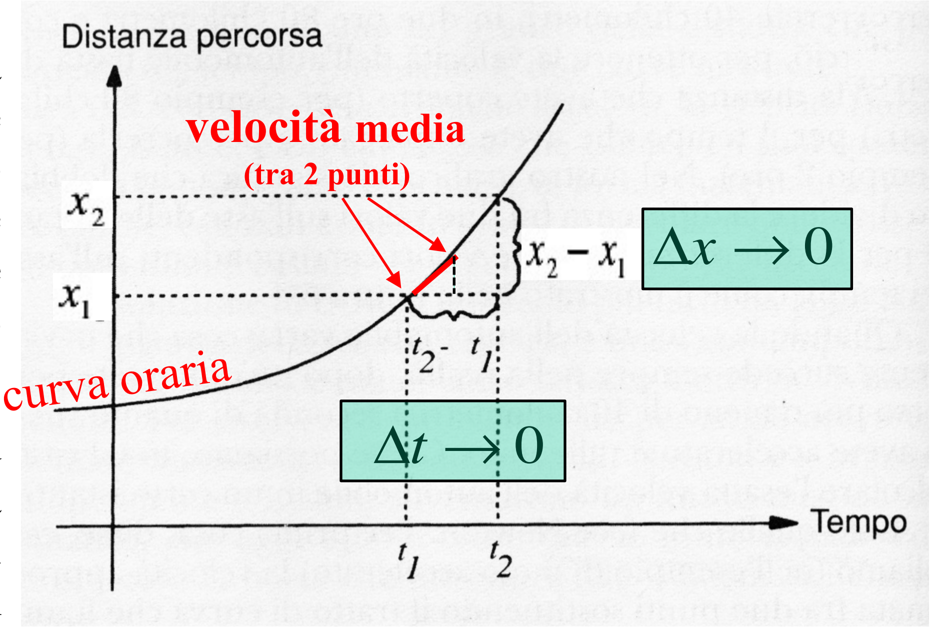
La velocità istantanea e il calcolo infinitesimale

Grazie al nuovo metodo introdotto da Cartesio, già nel XVII secolo si era in grado di calcolare la velocità media di un corpo. Ma nè Galileo, nè Cartesio, nè i loro contemporanei, erano in grado di calcolare la **velocità istantanea** di un corpo nè tantomeno di descrivere il **moto di un corpo che procede a velocità variabile**, crescente o decrescente.

La soluzione al problema fu trovata un secolo più tardi da **Isaac Newton**, il vero gigante della fisica classica, e dal grande filosofo e logico **Gottfried Leibniz**, i quali nel XVIII secolo inventarono un nuovo metodo matematico noto come **calcolo infinitesimale.**

Newton

Leibniz

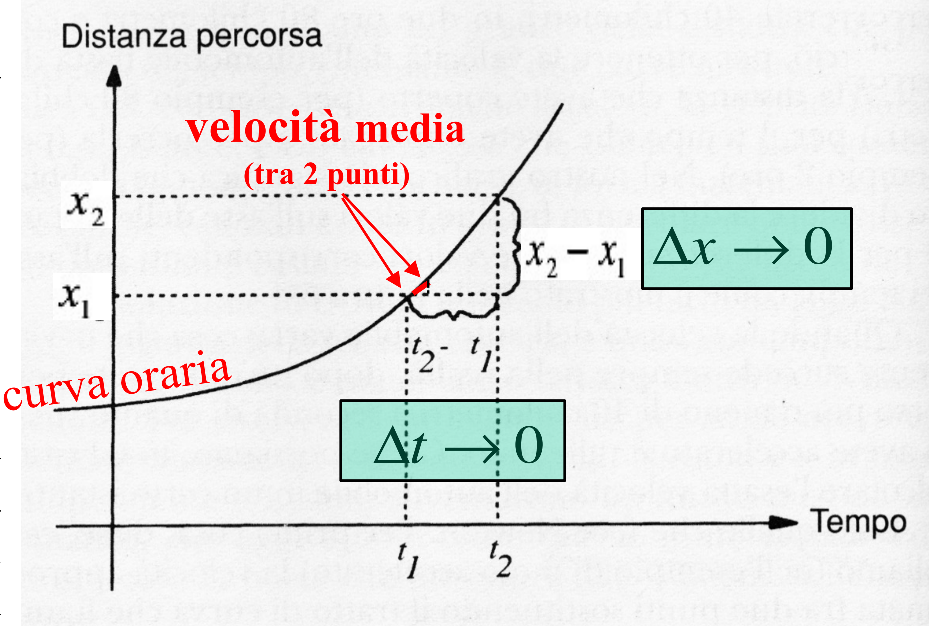


Con questo metodo la **velocità istantanea** resta definita attraverso un 'passaggio al limite' come la *velocità media durante un intervallo di tempo infinitamente piccolo* (cioè, al limite, per Δt tendente a zero):

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \to \qquad v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocità istantanea e il calcolo infinitesimale

Grazie al nuovo metodo introdotto da Cartesio, già nel XVII secolo si era in grado di calcolare la velocità media di un corpo. Ma nè Galileo, nè Cartesio, nè i loro contemporanei, erano in grado di calcolare la **velocità istantanea** di un corpo nè tantomeno di descrivere il **moto di un corpo che procede a velocità variabile**, crescente o decrescente.



La soluzione al problema fu trovata un secolo più tardi da **Isaac Newton**, il vero gigante della fisica classica, e dal grande filosofo e logico **Gottfried Leibniz**, i quali nel XVIII secolo inventarono un nuovo metodo matematico noto come **calcolo infinitesimale.**

Newton

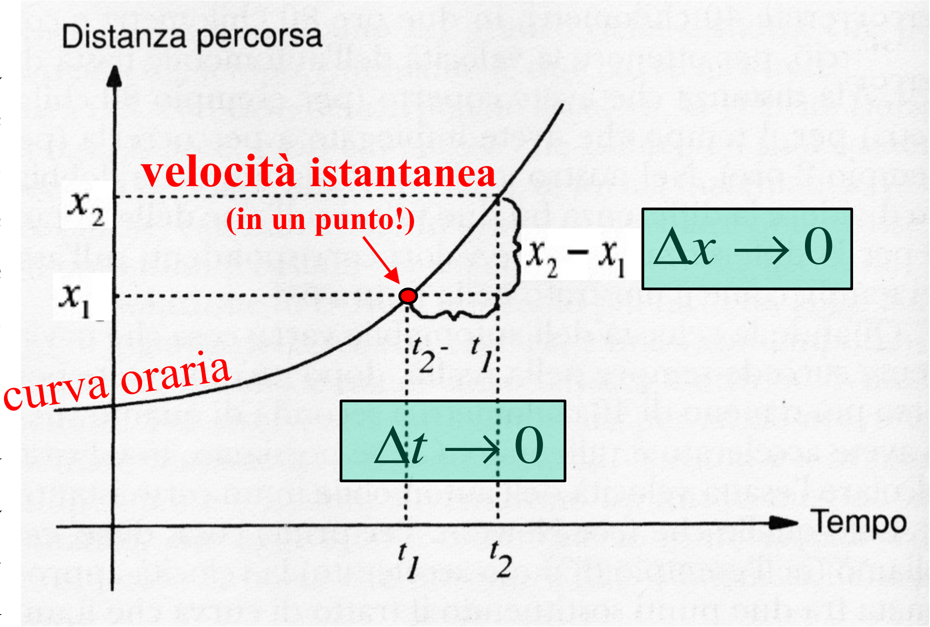
Leibniz

Con questo metodo la **velocità istantanea** resta definita attraverso un 'passaggio al limite' come la *velocità media durante un intervallo di tempo infinitamente piccolo* (cioè, al limite, per Δt tendente a zero):

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \qquad v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocità istantanea e il calcolo infinitesimale

Grazie al nuovo metodo introdotto da Cartesio, già nel XVII secolo si era in grado di calcolare la velocità media di un corpo. Ma nè Galileo, nè Cartesio, nè i loro contemporanei, erano in grado di calcolare la **velocità istantanea** di un corpo nè tantomeno di descrivere il **moto di un corpo che procede a velocità variabile**, crescente o decrescente.



La soluzione al problema fu trovata un secolo più tardi da **Isaac Newton**, il vero gigante della fisica classica, e dal grande filosofo e logico **Gottfried Leibniz**, i quali nel XVIII secolo inventarono un nuovo metodo matematico noto come **calcolo infinitesimale.**

Newton

Leibniz

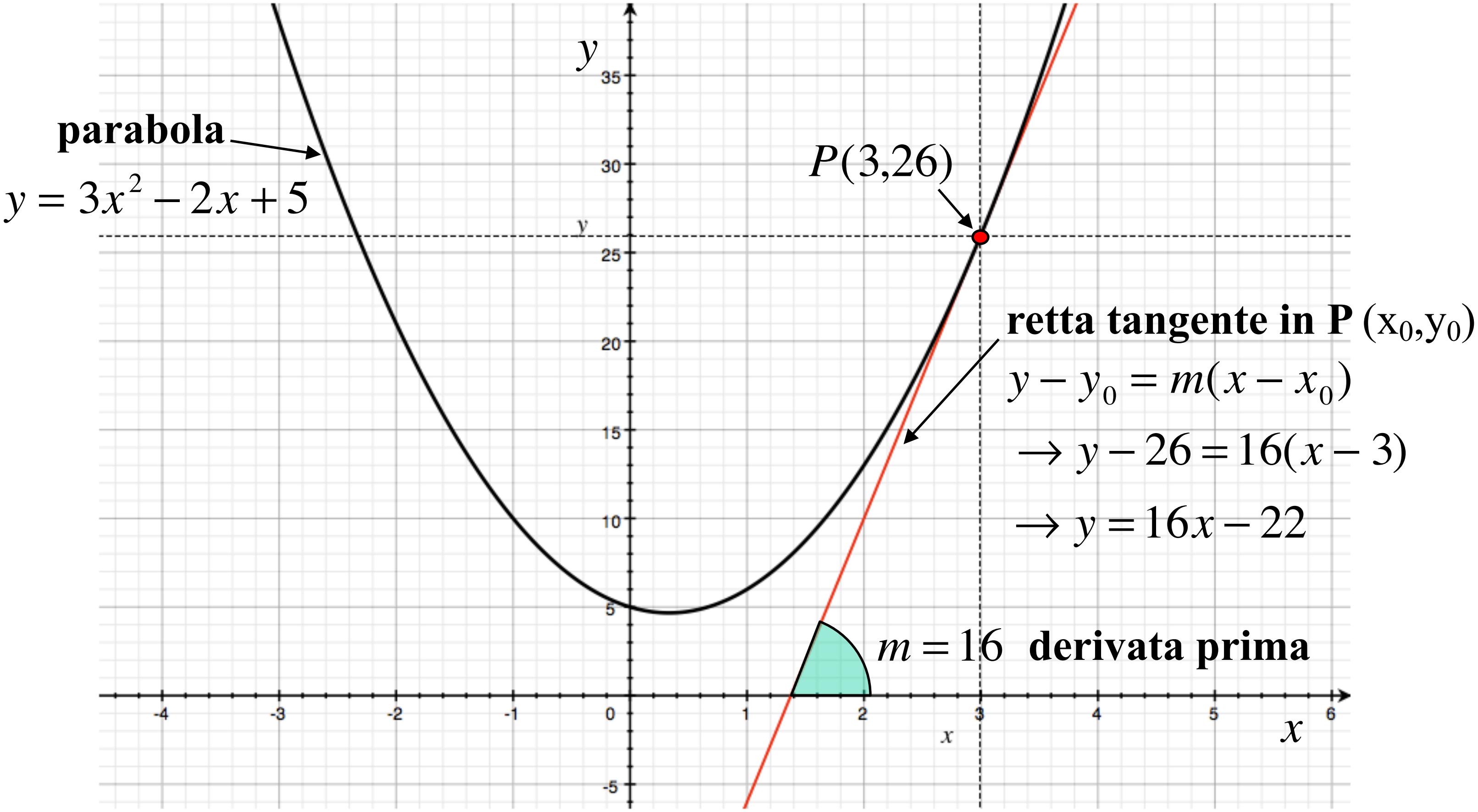
Con questo metodo la **velocità istantanea** resta definita attraverso un 'passaggio al limite' come la *velocità media durante un intervallo di tempo infinitamente piccolo* (cioè, al limite, per Δt tendente a zero):

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \to \qquad v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Calcolo della derivata prima di una $y = f(x)$ in un punto

Il procedimento utilizzato da Newton per ricavare la velocità istantanea equivale a quello che matematicamente viene definito “**calcolo della derivata prima di una funzione in un punto**”.

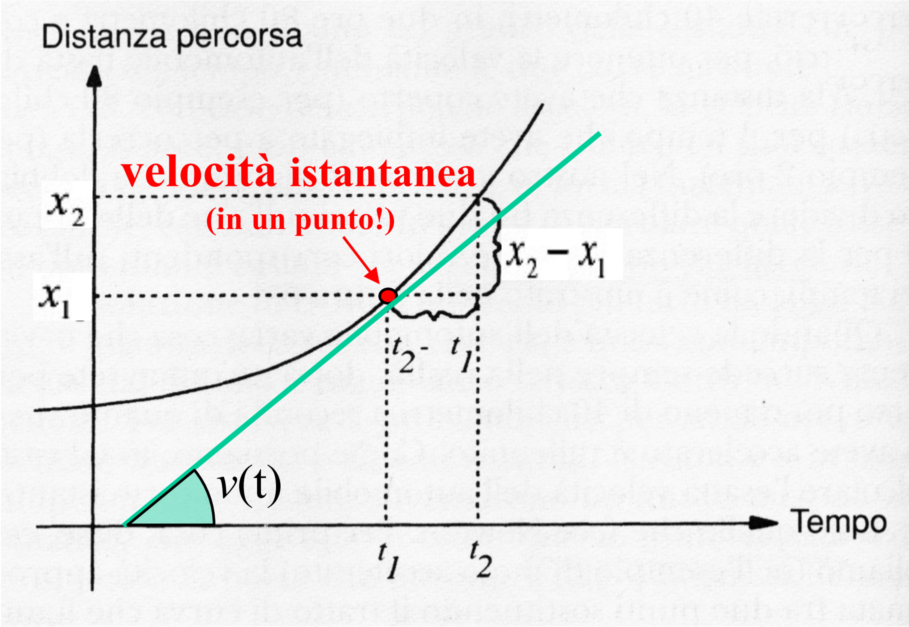
Calcolare la **derivata prima di una funzione** (ad esempio la parabola in figura) **in un suo punto** P (x_0,y_0) equivale a trovare il valore del **coefficiente angolare (cioè la pendenza) della retta tangente** alla funzione in quel punto, per mezzo del quale si può anche scrivere l’equazione della retta medesima:



La velocità istantanea è la derivata prima dello spostamento!

La velocità istantanea non è nient'altro che la **derivata prima** dello spazio rispetto al tempo calcolata in un certo istante di tempo e coincide con il **coefficiente angolare della retta tangente** alla curva oraria *x*(t) in quell'istante di tempo:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



La velocità istantanea è la derivata prima dello spostamento!

La velocità istantanea non è nient'altro che la **derivata prima** dello spazio rispetto al tempo calcolata in un certo istante di tempo e coincide con il **coefficiente angolare della retta tangente** alla curva oraria $x = f(t)$ in quell'istante di tempo:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Anche la **velocità**, come lo spostamento, è una **grandezza vettoriale.** Nel caso unidimensionale il suo modulo coincide con la velocità scalare. Una **velocità negativa** (cioè un **coefficiente angolare negativo** della retta tangente nel diagramma orario) indica semplicemente un verso di percorrenza nel senso delle x decrescenti (l'armadillo torna indietro...)

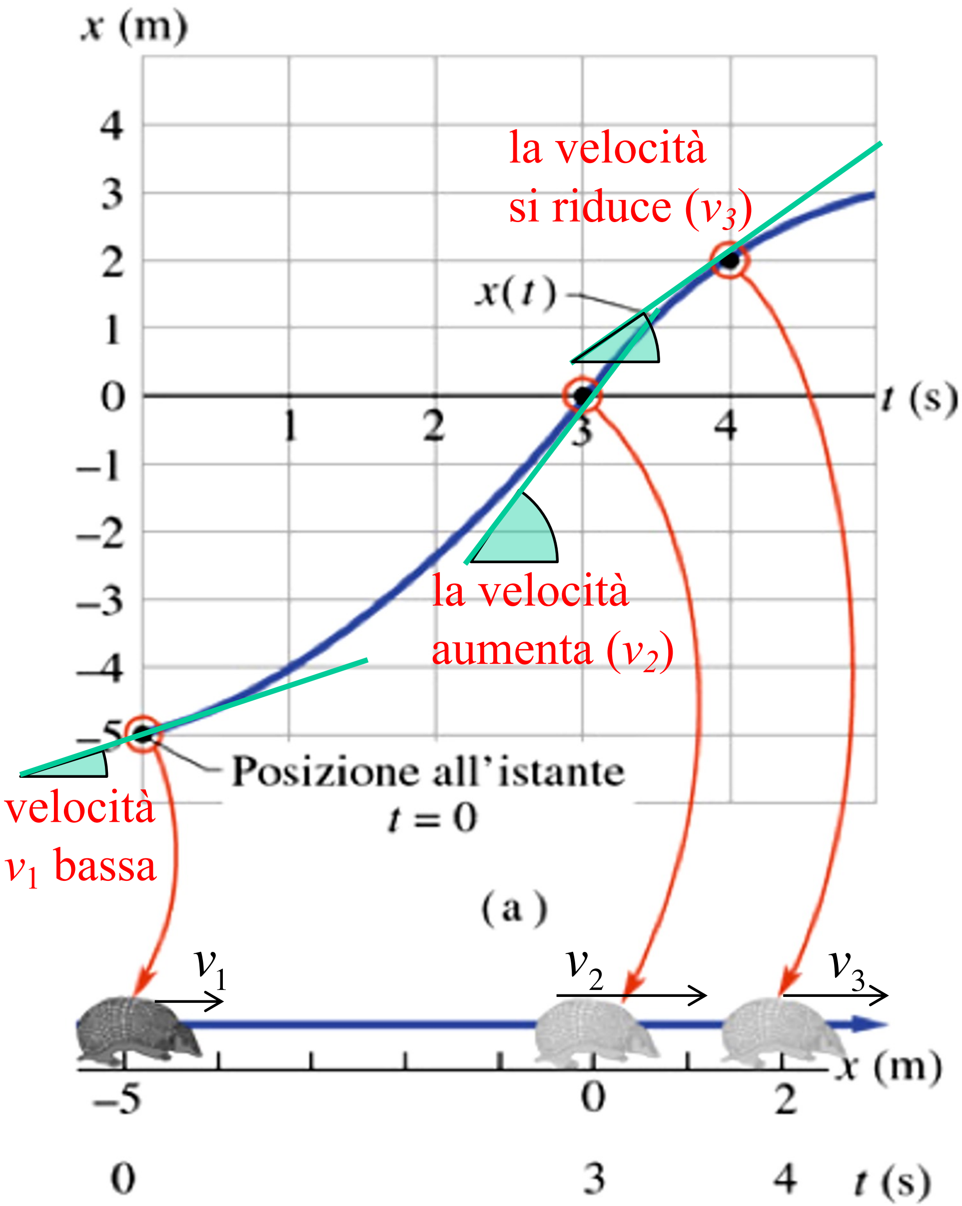
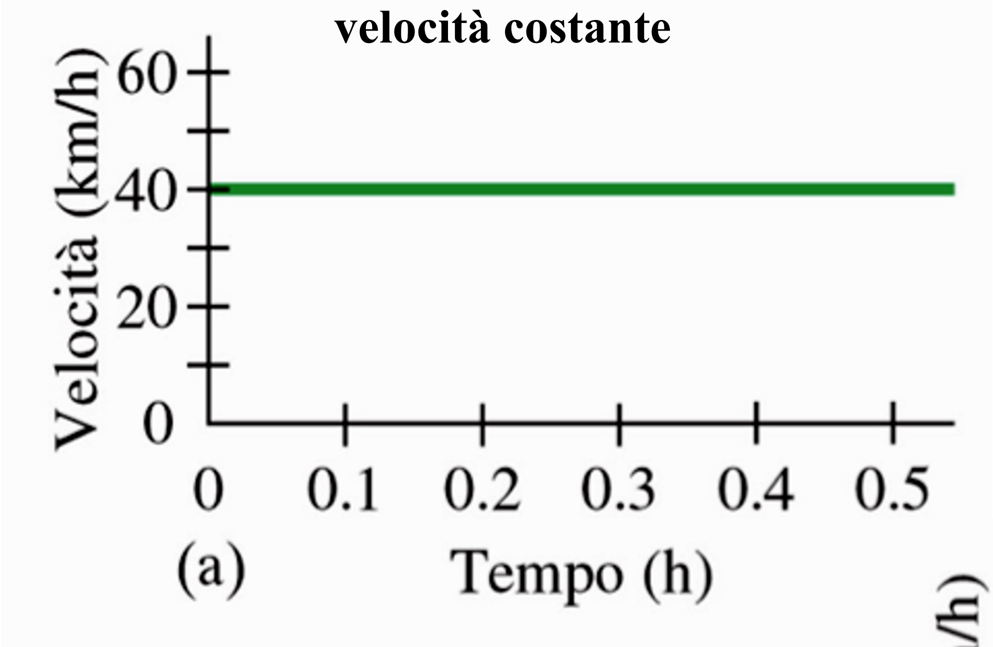
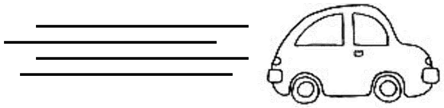
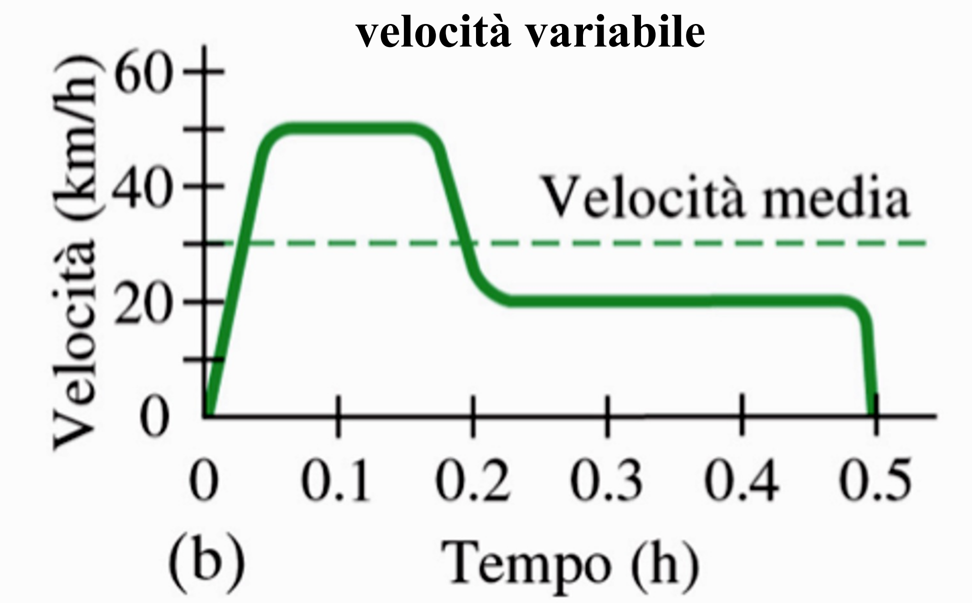
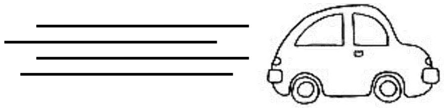


Diagramma della Velocità: $v = f\,(t)$







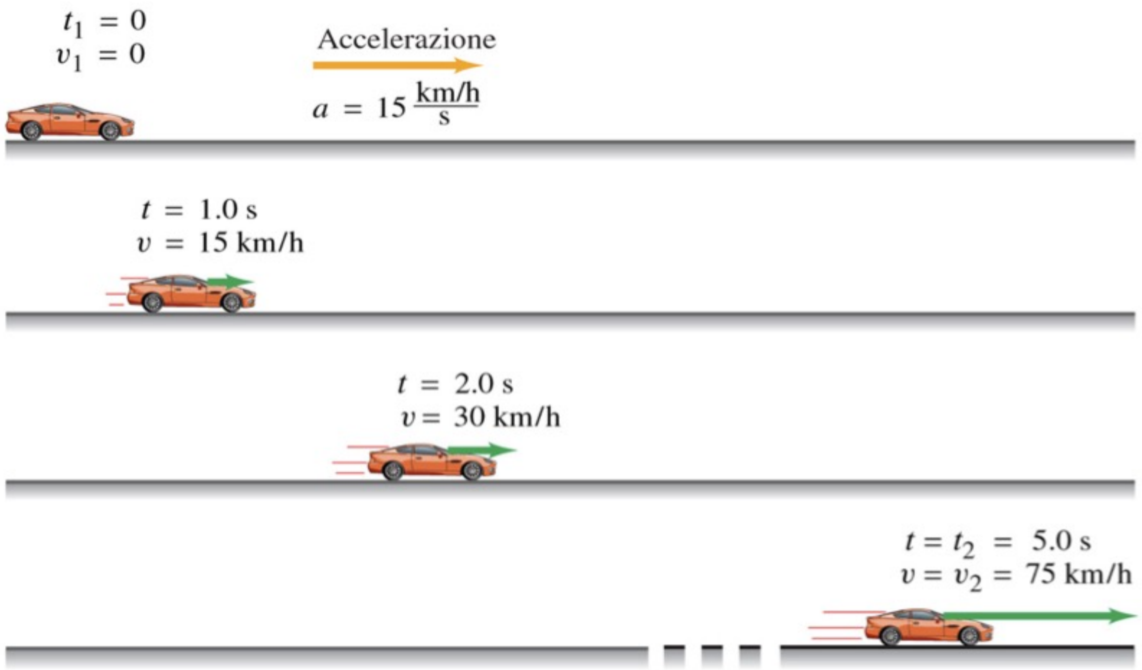


Accelerazione media

Quando la velocità di un corpo varia si dice che esso è sottoposto ad una **accelerazione** (o che sta accelerando). L'accelerazione media si calcola come rapporto tra la variazione di velocità ($v_2 - v_1$) e l'intervallo di tempo ($t_2 - t_1$) impiegato per farla variare:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

unità di misura: metri al secondo quadrato (m/s^2)



Esempio

Un auto, partendo da ferma, accelera su una strada diritta fino a 75 km/h in 5.0 s. Qual'è la sua accelerazione media?

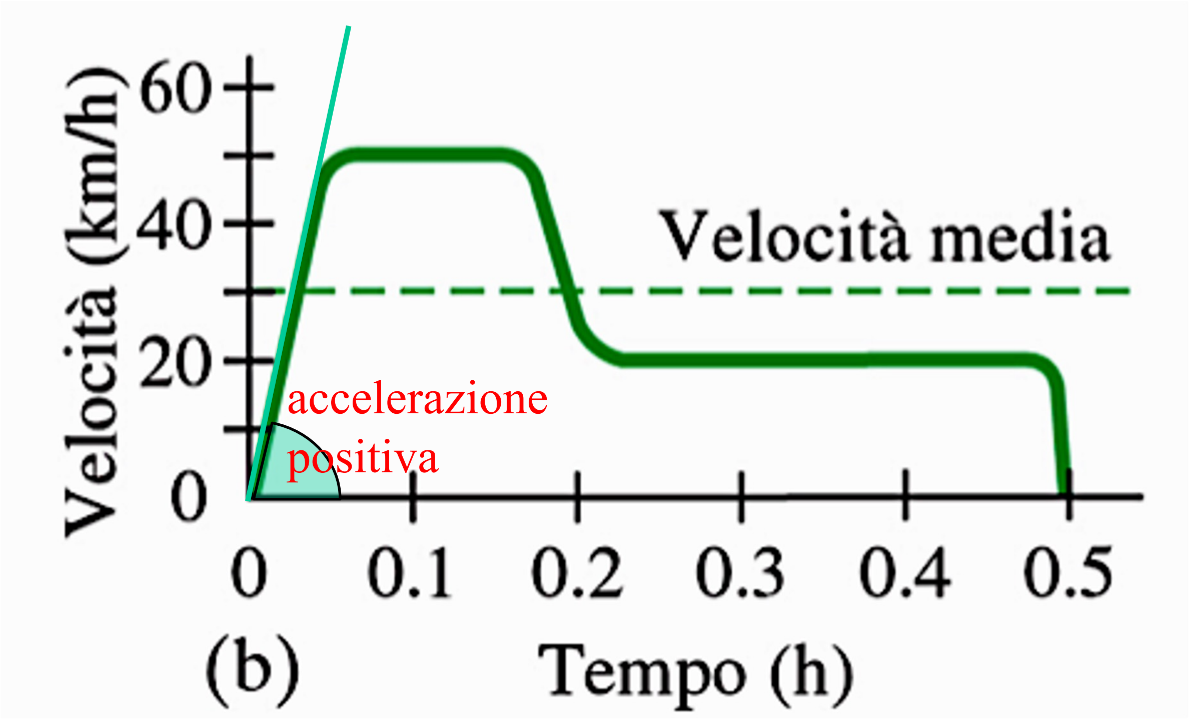
$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{75km/h \;-\; 0km/h}{5.0s} = 15\frac{km/h}{s}\left(\frac{1000m}{1km}\right)\left(\frac{1h}{3600s}\right) = 4.2m/s^2$$

Accelerazione istantanea

L'accelerazione istantanea (o semplicemente accelerazione) è la rapidità di variazione della velocità in un certo istante ed è matematicamente rappresentata dalla derivata prima della velocità rispetto al tempo:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Geometricamente rappresenta dunque la **pendenza della curva v(t)** in un certo punto.

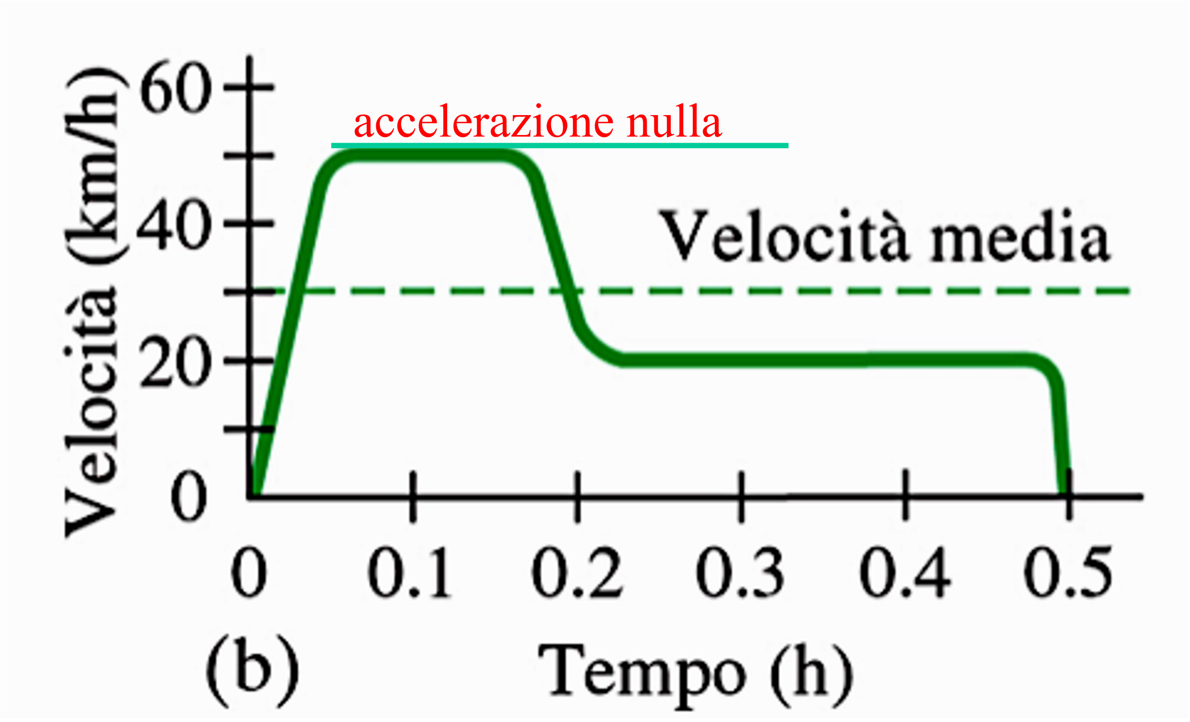


Accelerazione istantanea

L'accelerazione istantanea (o semplicemente accelerazione) è la rapidità di variazione della velocità in un certo istante ed è matematicamente rappresentata dalla derivata prima della velocità rispetto al tempo:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Geometricamente rappresenta dunque la **pendenza della curva v(t)** in un certo punto.

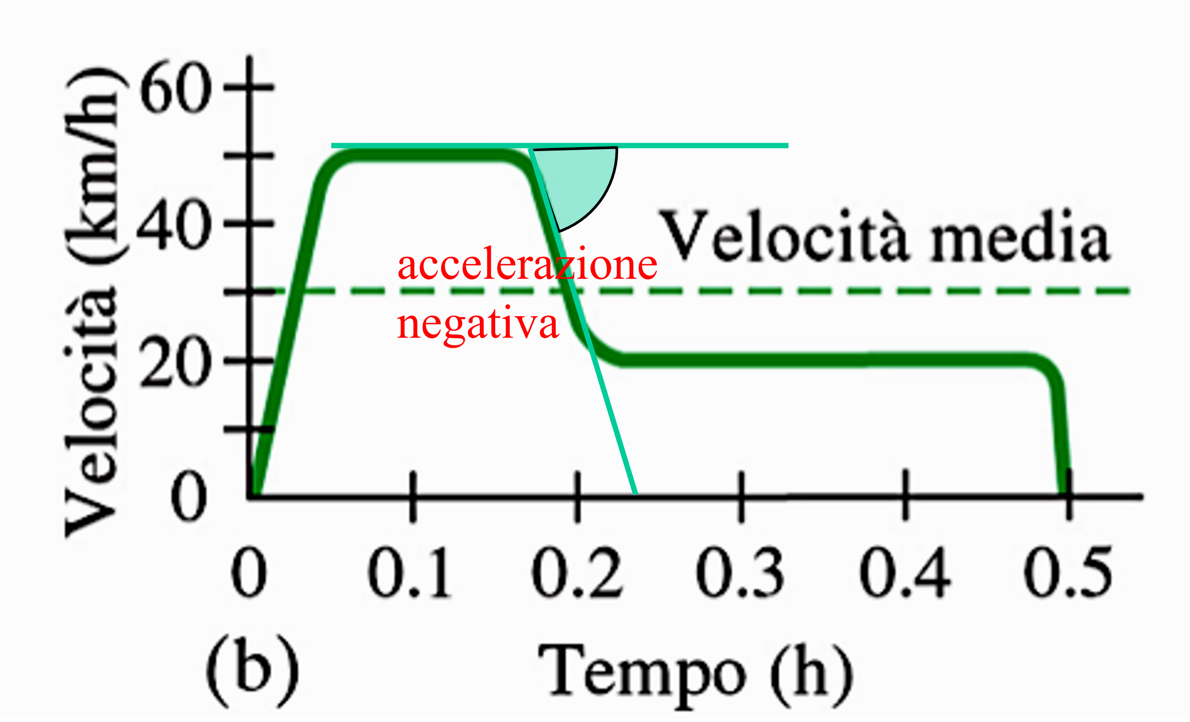


Accelerazione istantanea

L'accelerazione istantanea (o semplicemente accelerazione) è la rapidità di variazione della velocità in un certo istante ed è matematicamente rappresentata dalla derivata prima della velocità rispetto al tempo:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Geometricamente rappresenta dunque la **pendenza della curva v(t)** in un certo punto.



Accelerazione istantanea

L'accelerazione istantanea (o semplicemente accelerazione) è la rapidità di variazione della velocità in un certo istante ed è matematicamente rappresentata dalla derivata prima della velocità rispetto al tempo:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Geometricamente rappresenta dunque la **pendenza della curva v(t)** in un certo punto, ossia ad un certo istante.

Combinando questa equazione con quella che descrive la velocità istantanea per una particella avremo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

che ci dice che l'accelerazione della particella in un certo istante è la cosiddetta **derivata seconda (**ossia la derivata della derivata prima) della sua posizione rispetto al tempo.

Derivata n-esima

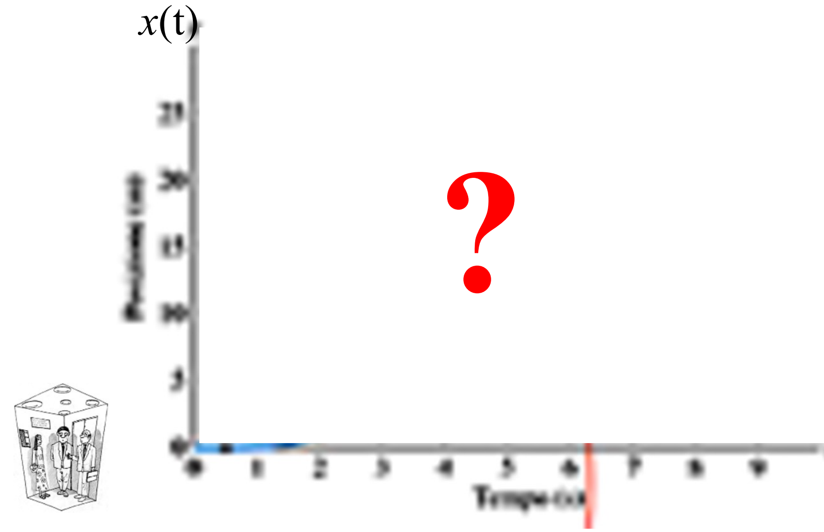
$$f'' = f^{(2)} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},$$

$$f''' = f^{(3)} = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3},$$

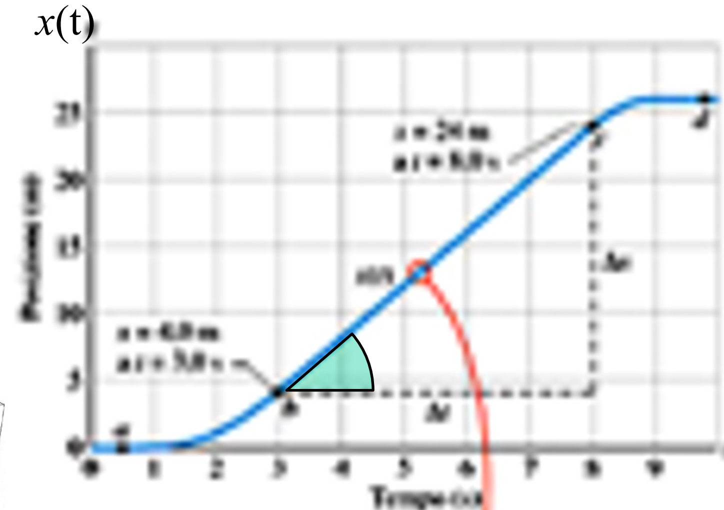
...

$$f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}.$$

Esercizio. Consideriamo il moto della **cabina di un ascensore** che è inizialmente ferma, poi si muove verso l'alto (considerato come verso positivo) e infine si arresta. Immaginando di conoscere il suo **diagramma orario** ***x*(t)**, riuscite a disegnare il **diagramma della velocità *v*(t)** e quello **dell'accelerazione *a*(t)?**



Esercizio. Consideriamo il moto della **cabina di un ascensore** che è inizialmente ferma, poi si muove verso l'alto (considerato come verso positivo) e infine si arresta. Immaginando di conoscere il suo **diagramma orario** ***x*(t)**, riuscite a disegnare il **diagramma della velocità *v*(t)** e quello **dell'accelerazione *a*(t)?**



In questo tratto la velocità dell'ascensore è costante…

SUGGERIMENTO: ricavate la velocità *v*(t) in qualsiasi istante dalla pendenza della curva *x*(t) in quell'istante, poi ricavate l'accelerazione *a*(t) in qualsiasi istante dalla pendenza della curva *v*(t) in quell'istante…